꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021 ~ 2023 전국연합학력평가 단원별 기출문제

수 학

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

C/O/N/T/E/N/T/S

01. 지수함수와 로그함수 ····· 01

02. 삼각함수 ····· 20

03. 수열 ····· 38

04. 함수의 극한과 연속 ····· 55

05. 다항함수의 미분법 ····· 63

06. 다항함수의 적분법 ····· 79

07. 경우의 수 ····· 92

08. 확률 ····· 108

09. 통계 ····· 118

10. 함수의 극한과 연속 ····· 126

11. 미분법 ····· 141

12. 적분법 ····· 156

13. 이차곡선 ····· 163

14. 평면벡터 ····· 179

15. 공간좌표와 공간도형 ····· 186

정답 및 해설 ····· 193

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 01 지수함수와 로그함수

2023. 3월 학력평가

1. $\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2023. 4월 학력평가

2. $\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 6월 수능 모의평가

3. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

2023. 7월 학력평가

4. $4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}-1}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2023. 9월 수능 모의평가

5. $3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}$의 값은?[2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2023. 10월 학력평가

6. $2^{\sqrt{2}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2023. 11월 대학수학능력시험

7. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은?[2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022. 3월 학력평가

8. $(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2022. 4월 학력평가

9. $(27\times\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

2022. 6월 수능 모의평가

10. $(-\sqrt{2})^4\times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 7월 학력평가

11. $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2022. 9월 수능 모의평가

12. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

2022. 10월 학력평가

13. $\sqrt{8} \times 4^{\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

2022. 11월 대학수학능력시험

14. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2021. 3월 학력평가

15. $\log_8 16$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2021. 4월 학력평가

16. $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2021. 6월 수능 모의평가

17. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2021. 7월 학력평가

18. $4^{\frac{1}{2}} + \log_2 8$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

19. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2021년 10월 전국연합

20. $\log_3 x = 3$일 때, x의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 11월 대학수학능력시험

21. $\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2020. 3월 학력평가

22. $8^{\frac{4}{3}}\times 2^{-2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 3월 학력평가

23. 방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=64$를 만족시키는 실수 x의 값은? [2점]

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 9

2020. 4월 학력평가

24. $3\times 8^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2020. 4월 학력평가

25. $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2020. 6월 수능 모의평가

26. $\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2020. 7월 학력평가

27. $4^{\log_2 3}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2020. 7월 학력평가

28. 32×2^{-3}의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2020. 9월 수능 모의평가

29. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 10월 학력평가

30. $\log_3 54+\log_9 \frac{1}{36}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

31. $\log_2\sqrt{8}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2020. 11월 대학수학능력시험

32. $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $3^{\frac{1}{2}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{3}{2}}$ ⑤

2020. 11월 대학수학능력시험

33. $3^0\times 8^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 3월 학력평가

34. 두 점 A$(m,\ m+3)$, B$(m+3,\ m-3)$에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

2023. 3월 학력평가

35. $\log_2 96-\frac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 4월 학력평가

36. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 4월 학력평가

37. 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2},\ 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2023. 6월 수능 모의평가

38. 상수 a $(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2023. 6월 수능 모의평가

39. 부등식 $2^{x-6}\le\left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

2023. 7월 학력평가

40. 방정식 $\log_2(x-5)=\log_4(x+7)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

41. 두 실수 a, b가 $3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은?[3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

2023. 9월 수능 모의평가

42. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

2023. 10월 학력평가

43. 방정식

$$\log_2(x-2)=1+\log_4(x+6)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

2023. 11월 대학수학능력시험

44. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은?(단, m은 $0<m<1$인 상수이다.)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2022. 3월 학력평가

45. $\frac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 4월 학력평가

46. 부등식 $\log_2 x \le 4-\log_2(x-6)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 15 ② 19 ③ 23 ④ 27 ⑤ 31

2022. 4월 학력평가

47. $\log_2 9\times\log_3 16$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 6월 수능 모의평가

48. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

2022. 7월 학력평가

49. $\log_3 7\times\log_7 9$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 7월 학력평가

50. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

51. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.[3점]

2022. 11월 대학수학능력시험

52. 방정식 $\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.[3점]

2021. 3월 학력평가

53. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

2021. 4월 학력평가

54. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 6월 수능 모의평가

55. $\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 7월 학력평가

56. 부등식 $5^{2x-7}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

57. $\log_2 100-2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

2021년 10월 전국연합

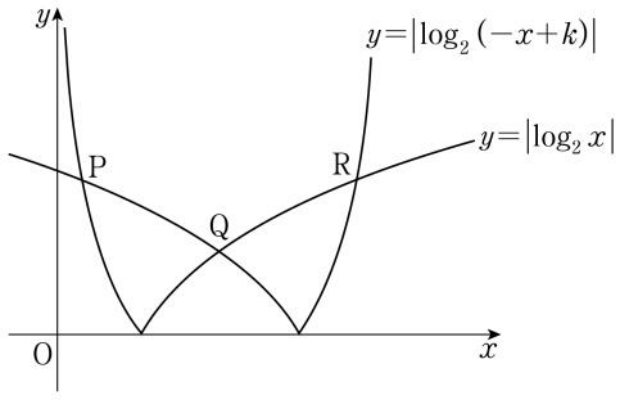
58. 곡선 $y=6^{-x}$ 위의 두 점 $A(a, 6^{-a})$, $B(a+1, 6^{-a-1})$에 대하여 선분 AB는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이다. 6^{-a}의 값은? [3점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

2021년 10월 전국연합

59. 2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선 $y=|\log_2(-x+k)|$, $y=|\log_2 x|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) [3점]

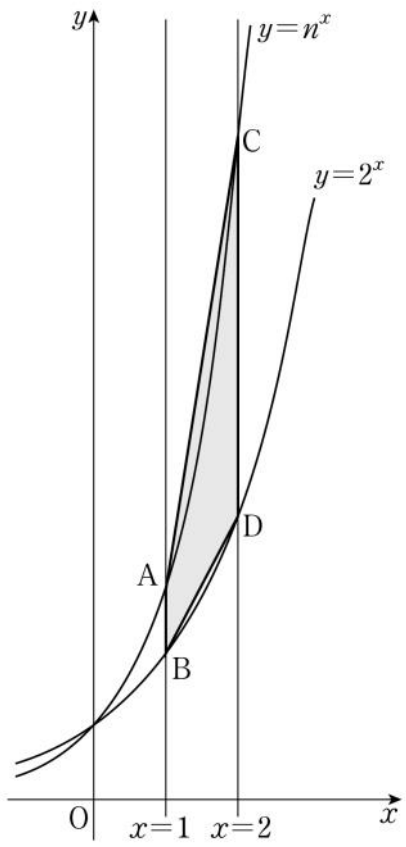
① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021년 10월 전국연합

60. 그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]



2021. 11월 대학수학능력시험

61. $\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 3월 학력평가

62. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x$가 곡선 $y=a^x$과 만나는 점의 좌표를 $(p, -p)$, 곡선 $y=a^{2x}$과 만나는 점의 좌표를 $(q, -q)$라 할 때, $\log_a pq=-8$이다. $p+2q$의 값은? [3점]

① 0 ② −2 ③ −4 ④ −6 ⑤ −8

2020. 3월 학력평가

63. $10\le x<1000$인 실수 x에 대하여 $\log x^3-\log\dfrac{1}{x^2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 x의 개수를 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

64. 부등식 $2^{x-4}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 4월 학력평가

65. 함수 $y=a+\log_2 x$의 그래프가 점 (4, 7)을 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

66. $\log_3 10+\log_3\dfrac{9}{5}-\log_3\dfrac{2}{3}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

67. 함수 $f(x)=2^{x+p}+q$의 그래프의 점근선이 직선 $y=-4$이고 $f(0)=0$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 상수이다.) [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

68. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2020. 6월 수능 모의평가

69. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

2020. 6월 수능 모의평가

70. 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)=2^{|x|}$의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

2020. 6월 수능 모의평가

71. 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 2)$, $(4, \log_2 a)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 6월 수능 모의평가

72. 함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$가 닫힌구간 $[0, 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 정수이다.) [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

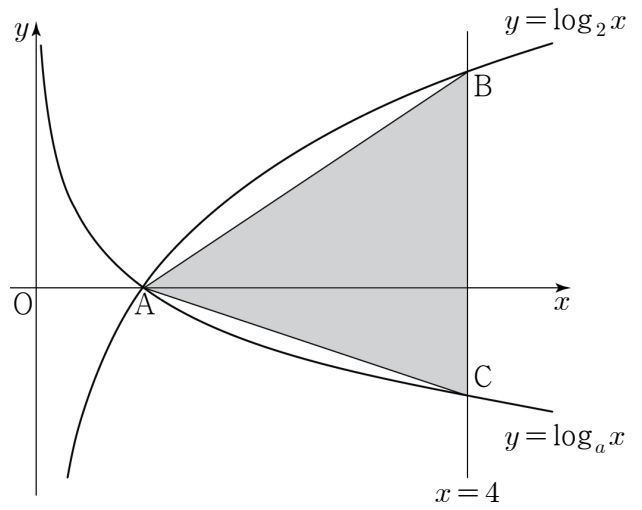
2020. 7월 학력평가

73. 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, g(b))$의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

2020. 7월 학력평가

74. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x\,(0<a<1)$이 x축 위의 점 A에서 만난다. 직선 $x=4$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B, 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은? [3점]



① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

2020. 7월 학력평가

75. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여 $\log_{27} a=\log_3 \sqrt{b}$일 때, $20\log_b \sqrt{a}$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

76. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가 $\log_a b=\frac{\log_b x}{2}=\frac{\log_c a}{4}$를 만족시킬 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

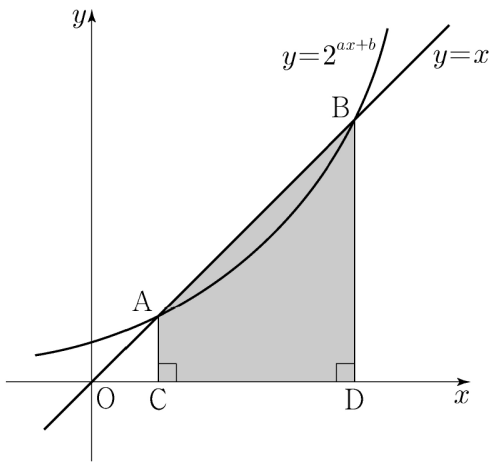
꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 9월 수능 모의평가

77. $\log_5 40+\log_5 \frac{5}{8}$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

78. 곡선 $y=2^{ax+b}$와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2020. 9월 수능 모의평가

79. 방정식 $\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점]

2020. 10월 학력평가

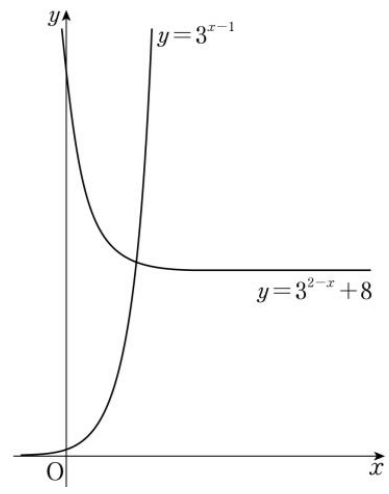
80. 부등식 $\log_2(x^2-7x)-\log_2(x+5)\le 1$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

2020. 10월 학력평가

81. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 곡선 $y=3^{2-x}+8$과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자. 직선 $x=t+1$이 x축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{x-1}$과 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABCD가 직사각형일 때, 이 사각형의 넓이는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



2020. 11월 대학수학능력시험

82. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 11월 대학수학능력시험

83. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 11월 대학수학능력시험

84. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

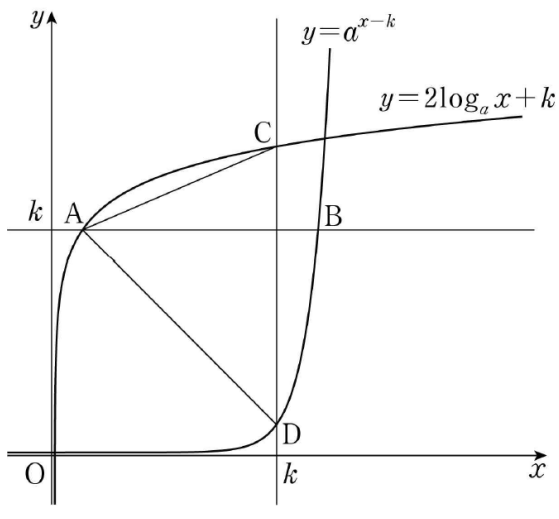
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 11월 대학수학능력시험

85. $\log_3 72-\log_3 8$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 3월 학력평가

86. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



2023. 4월 학력평가

87. 상수 $a(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

2023. 6월 수능 모의평가

88. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

○ 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
○ 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
○ 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

2023. 7월 학력평가

89. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

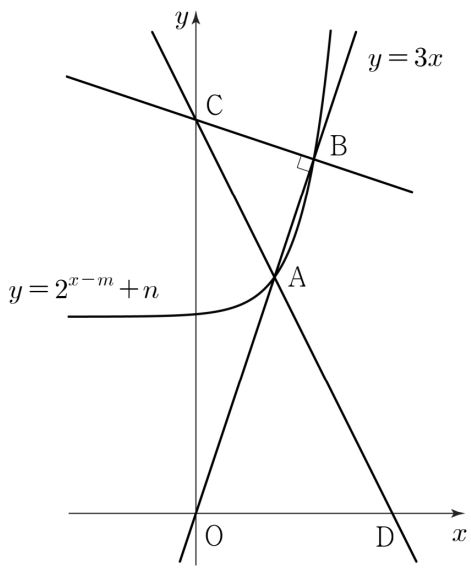
의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

90. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n$ $(m>0, n>0)$과 직선 $y=3x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



2023. 9월 수능 모의평가

91. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2023. 10월 학력평가

92. 자연수 $n\,(n\ge 2)$에 대하여 $n^2-16n+48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

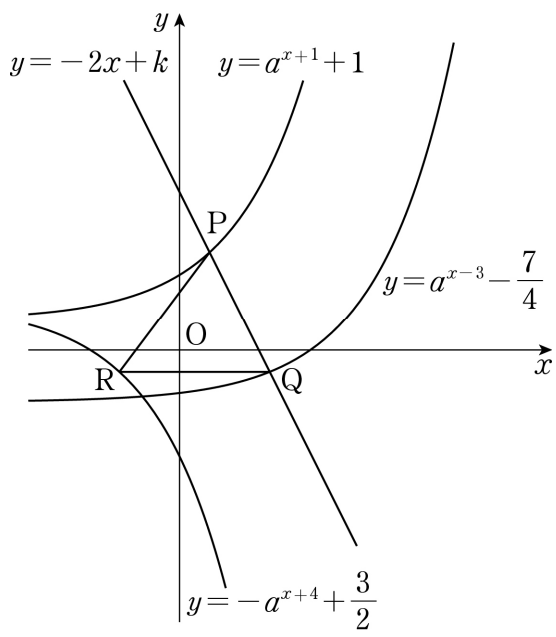
2023. 10월 학력평가

93. 그림과 같이 두 상수 $a\,(a>1)$, k에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1,\quad y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{PR}=\overline{QR}=5$일 때, $a+k$의 값은? [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

2023. 11월 대학수학능력시험

94. 양수 a에 대하여 $x\ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

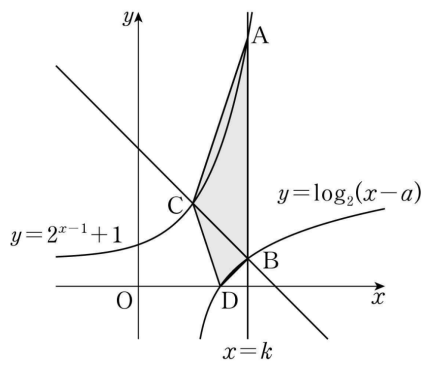
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1\le x<6) \\ a\log_4(x-5) & (x\ge 6) \end{cases}$$

이다. $t\ge 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 3월 학력평가

95. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

2022. 3월 학력평가

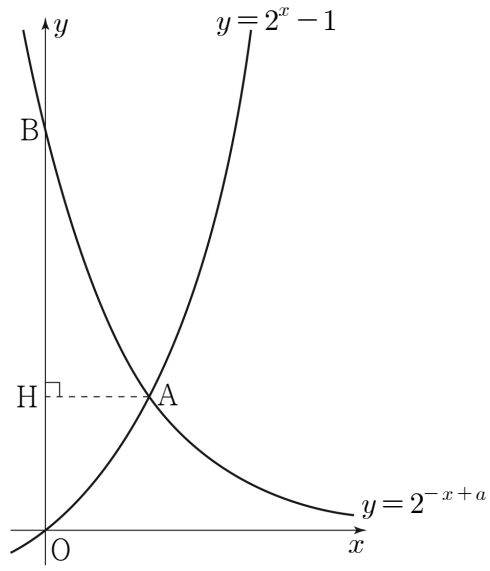
96. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 A(a, b)가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) [4점]

2022. 4월 학력평가

97. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OB}=3\times\overline{OH}$이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$ ④ $\log_2 7$ ⑤ 3

2022. 6월 수능 모의평가

98. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

99. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다.

점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

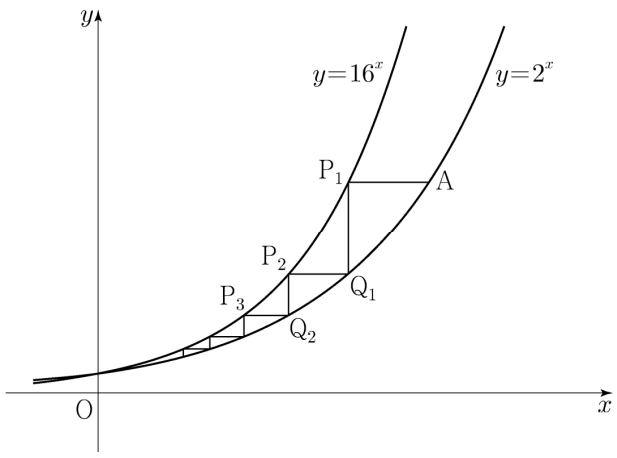
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각

P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때,

$x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는

자연수 k의 개수는? [4점]

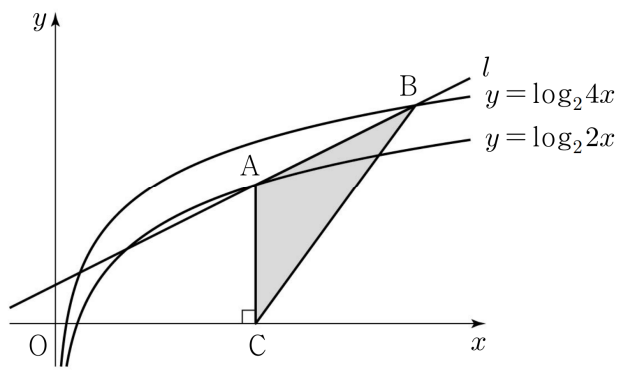
① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



2022. 7월 학력평가

100. 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\dfrac{21}{4}$ ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ $\dfrac{23}{4}$ ⑤ 6



2022. 9월 수능 모의평가

101. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

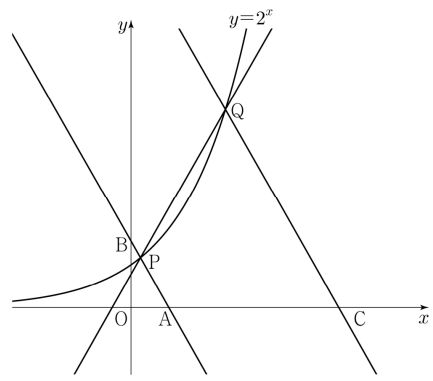
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2022. 9월 수능 모의평가

102. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



2022. 10월 학력평가

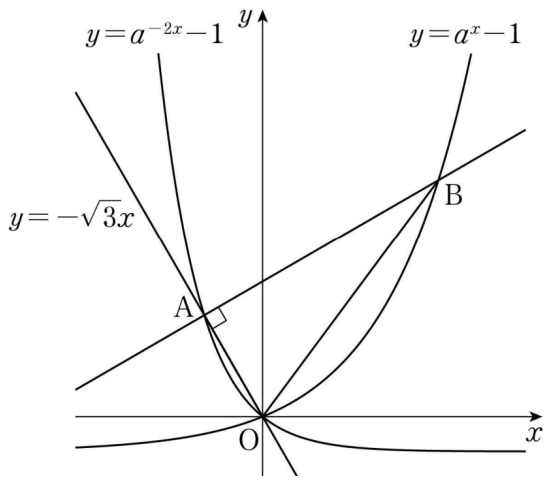
103. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=-\log_2(-x)$, $y=\log_2(x+2a)$가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

104. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-2x}-1$, $y=a^{x}-1$이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



2022. 11월 대학수학능력시험

105. 자연수 $m\,(m\geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은?[4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

2022. 11월 대학수학능력시험

106. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\left|3^{x+2}-n\right| & (x<0)\\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.[4점]

2021. 3월 학력평가

107. 함수

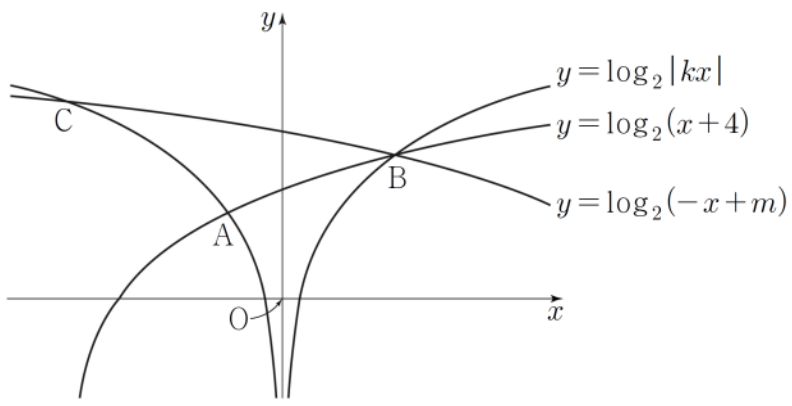
$$f(x)=\begin{cases}2^{x} & (x<3)\\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\geq 3)\end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

2021. 4월 학력평가

108. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021. 6월 수능 모의평가

109. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

110. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

2021. 7월 학력평가

111. 2 이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(4)+f(27)$의 값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

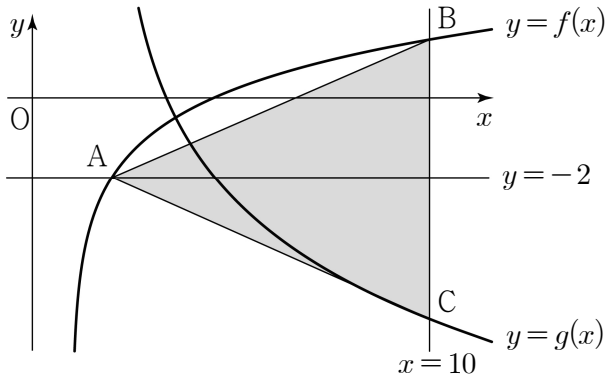
2021. 7월 학력평가

112. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

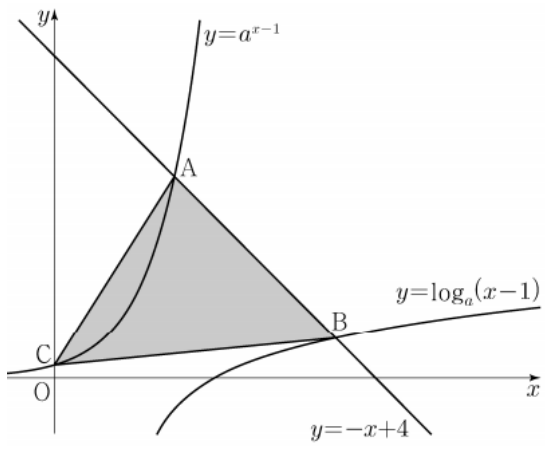
이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



2021. 9월 수능 모의평가

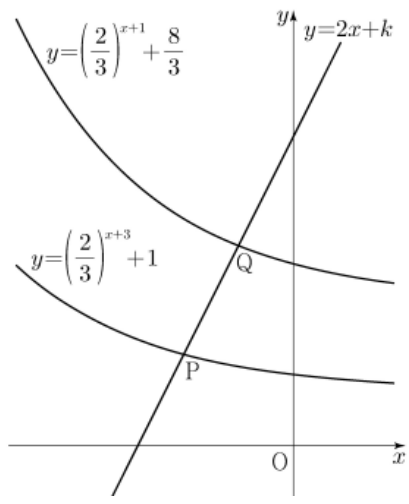
113. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



2021. 11월 대학수학능력시험

114. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 11월 대학수학능력시험

115. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.

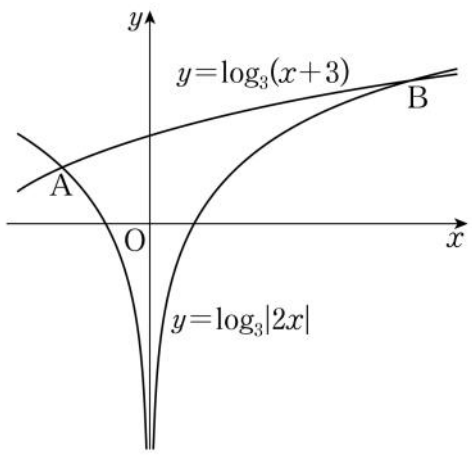
함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

2020. 3월 학력평가

116. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



2020. 3월 학력평가

117. 다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

(ⅰ) $m>0$인 경우
n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.

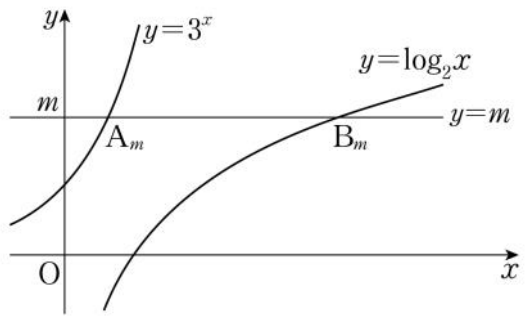
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
(가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

2020. 3월 학력평가

118. 그림과 같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 A_mB_m의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, … 이라 할 때, a_3의 값은? [4점]



① 502 ② 504 ③ 506 ④ 508 ⑤ 510

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

119. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(n-5)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2020. 4월 학력평가

120. 두 함수 $f(x)=x^2-6x+11$, $g(x)=\log_3 x$가 있다. 정수 k에 대하여

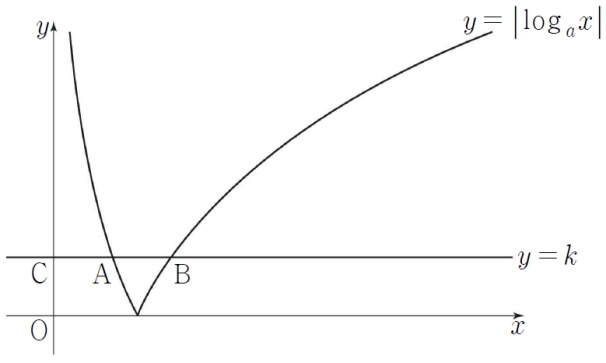
$$k<(g\circ f)(n)<k+2$$

를 만족시키는 자연수 n의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(0)+h(3)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2020. 4월 학력평가

121. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=k\,(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$일 때, 곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



2020. 4월 학력평가

122. 1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [4점]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

2020. 4월 학력평가

123. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$에 대하여 두 양수 a, $b\,(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.
(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

2020. 6월 수능 모의평가

124. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$
ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$
ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

125. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$이다. $\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

2020. 6월 수능 모의평가

126. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

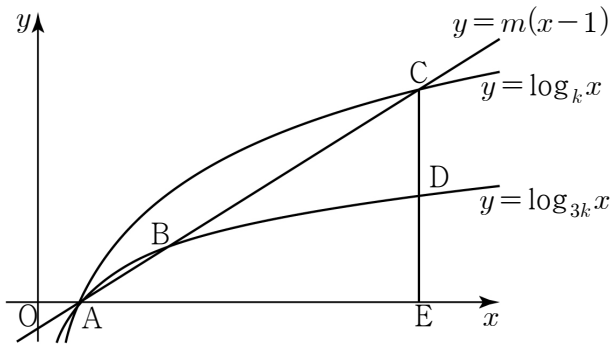
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 7월 학력평가

127. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]



2020. 9월 수능 모의평가

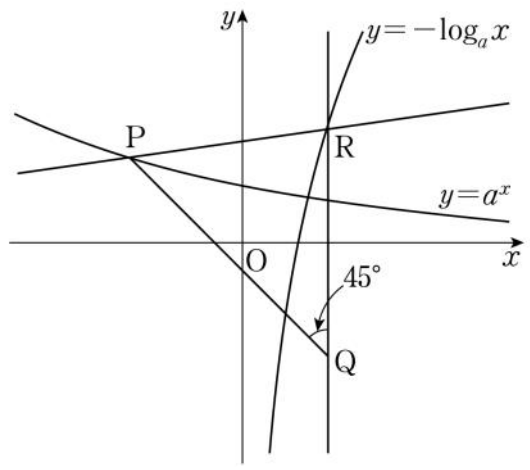
128. $\angle A=90°$이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4\frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

129. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2020. 10월 학력평가

130. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 11월 대학수학능력시험

131. $\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 02 삼각함수

2023. 3월 학력평가

1. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$이고 $\sin(\pi+\theta)>0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

2020. 3월 학력평가

2. θ가 제3사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

2020. 7월 학력평가

3. $\tan\frac{4}{3}\pi$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

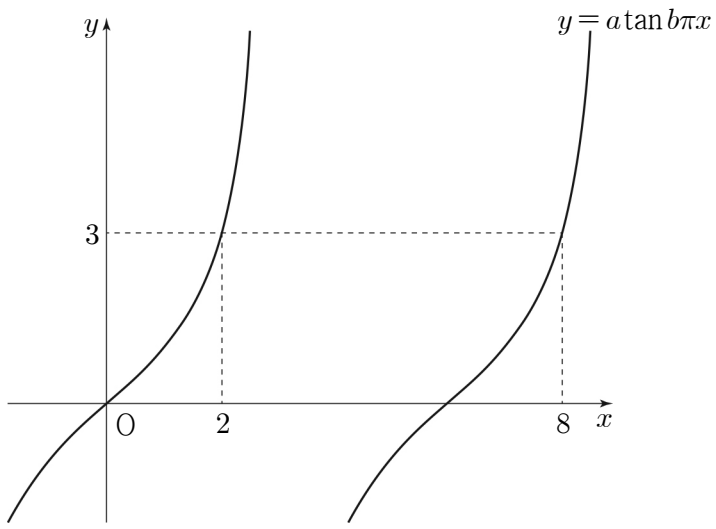
2020. 9월 수능 모의평가

4. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

2023. 4월 학력평가

5. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2, 3)$, $(8, 3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2023. 6월 수능 모의평가

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

2023. 6월 수능 모의평가

7. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

8. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{3}{5}$이고 $\sin\theta\cos\theta<0$일 때, $\sin\theta+2\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

2023. 9월 수능 모의평가

9. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

2023. 10월 학력평가

10. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여

$$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=18$$

일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2023. 11월 대학수학능력시험

11. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

2023. 11월 대학수학능력시험

12. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.[3점]

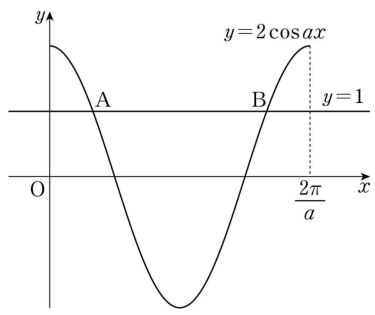
2022. 3월 학력평가

13. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

2022. 3월 학력평가

14. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\le x\le\frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=\frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

2022. 4월 학력평가

15. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $(2\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

16. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

2022. 6월 수능 모의평가

17. 닫힌구간 $[0,\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

2022. 7월 학력평가

18. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② 1 ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{13}{10}$

2022. 9월 수능 모의평가

19. $\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

2022. 10월 학력평가

20. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=2\cos(\pi-\theta)$일 때, $\cos\theta\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2022. 11월 대학수학능력시험

21. $\tan\theta<0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은?[3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2021. 3월 학력평가

22. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 4월 학력평가

23. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기가 4π일 때, $f(\pi)$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

2021. 4월 학력평가

24. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 6월 수능 모의평가

25. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 7월 학력평가

26. $\cos(-\theta)+\sin(\pi+\theta)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{7}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{9}{25}$

2021. 9월 수능 모의평가

27. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2021년 10월 전국연합

28. 함수 $y=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

2021. 11월 대학수학능력시험

29. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

2020. 3월 학력평가

30. 중심각의 크기가 1라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오. [3점]

2020. 3월 학력평가

31. $0\le x<2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin 4x$가 만나는 점의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

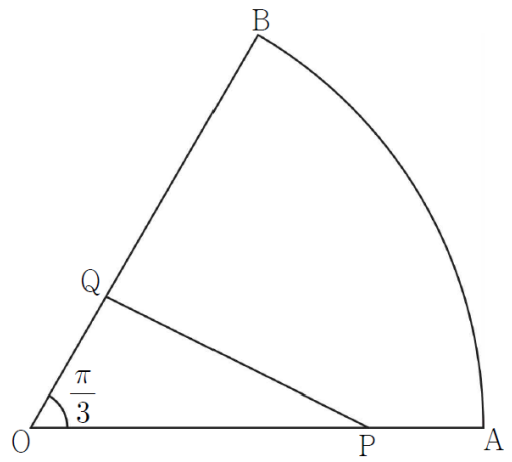
2020. 4월 학력평가

32. $0<x\le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x=\cos^2 x+\cos x$와 부등식 $\sin x>\cos x$를 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

2020. 4월 학력평가

33. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 3:1로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 1:2로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때 호 AB의 길이는? [3점]



① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

2020. 4월 학력평가

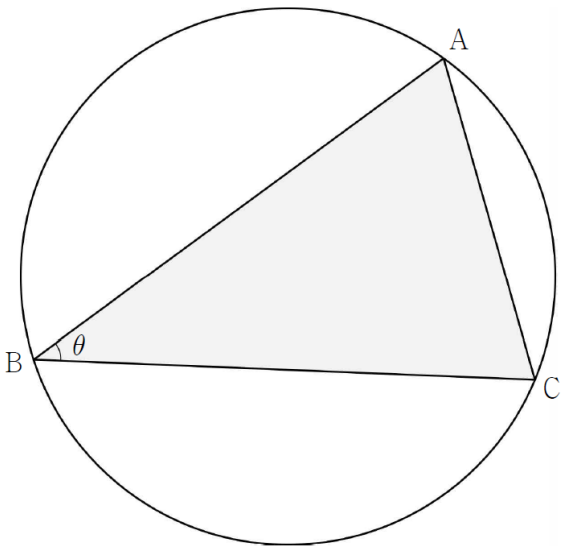
34. $\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

35. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하고 변 AC의 길이가 5인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2020. 6월 수능 모의평가

36. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

2020. 6월 수능 모의평가

37. 함수 $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값을 구하시오. [3점]

2020. 7월 학력평가

38. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 있다. 함수 $f(x)$는 주기가 4π이고 최솟값이 -1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

2020. 7월 학력평가

39. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$인 예각삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$이다. $\angle A=\theta$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

2020. 7월 학력평가

40. $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3}{4}\pi$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

2020. 7월 학력평가

41. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

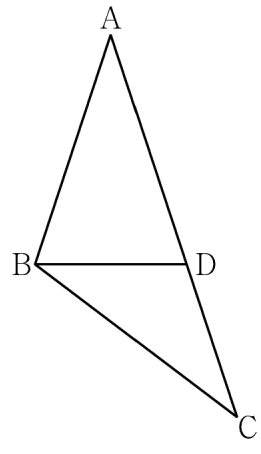
2020. 9월 수능 모의평가

42. $\overline{AB}=8$이고 $\angle A=45°$, $\angle B=15°$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

2020. 9월 수능 모의평가

43. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

44. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin x = \sqrt{3}(1+\cos x)$의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

2020. 10월 학력평가

45. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$ 일 때, $30(1-\sin\theta)$의 값을 구하시오. [3점]

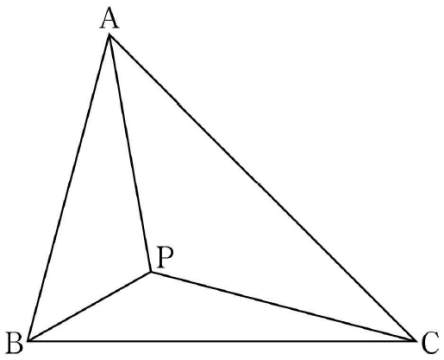
2020. 10월 학력평가

46. $0 \le x < 2\pi$일 때, 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

2023. 3월 학력평가

47. 그림과 같이 $\angle BAC = 60^\circ$ $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

2023. 3월 학력평가

48. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

> (가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
> (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

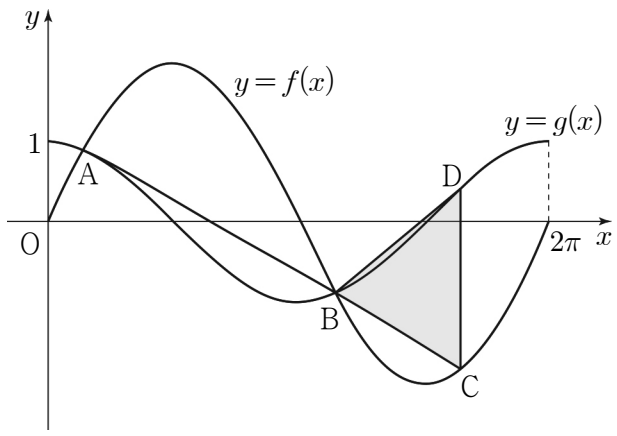
2023. 4월 학력평가

49. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k\times\alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

2023. 4월 학력평가

50. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3:1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

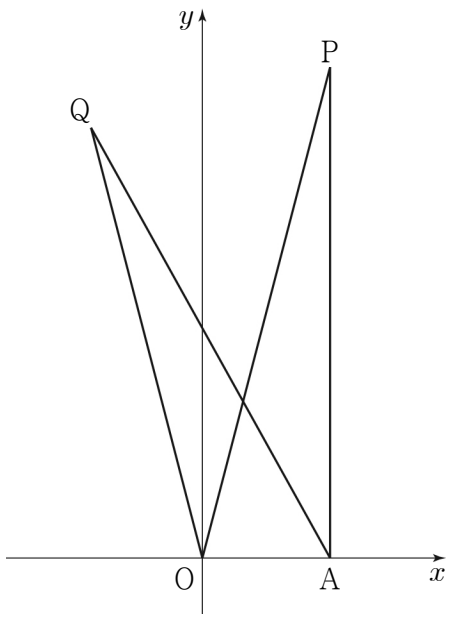
2023. 4월 학력평가

51. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AP}=\overline{AQ}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{OP}>\overline{OQ}$이다.

(나) $\cos(\angle OPA)=\cos(\angle OQA)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

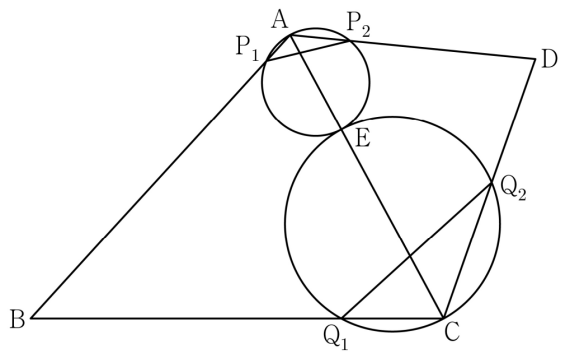


2023. 6월 수능 모의평가

52. 그림과 같이

$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\dfrac{1}{3}$, $\angle DAB>\dfrac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

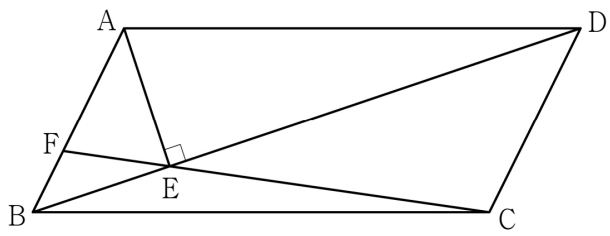
2023. 7월 학력평가

53. $0\le x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2023. 7월 학력평가

54. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle AFC)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{20}{3}$ ② 7 ③ $\dfrac{22}{3}$ ④ $\dfrac{23}{3}$ ⑤ 8

2023. 9월 수능 모의평가

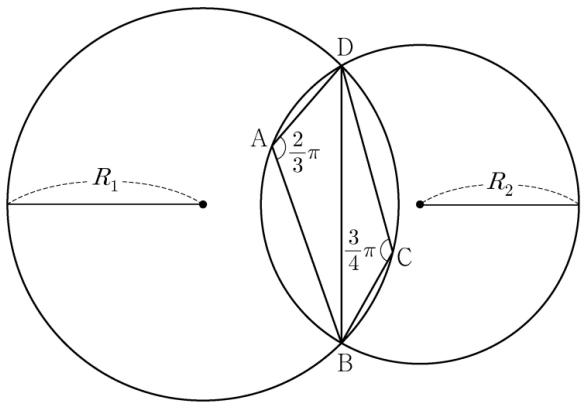
55. $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le \sin\dfrac{\pi}{7}$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\le x\le\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\dfrac{8}{7}\pi$ ② $\dfrac{17}{14}\pi$ ③ $\dfrac{9}{7}\pi$ ④ $\dfrac{19}{14}\pi$ ⑤ $\dfrac{10}{7}\pi$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

56. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$이고

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $R_2=$ (가) $\times\overline{BD}$이다,.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+1^2-$ (나) 이므로 $R_1\times R_2=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.[4점]

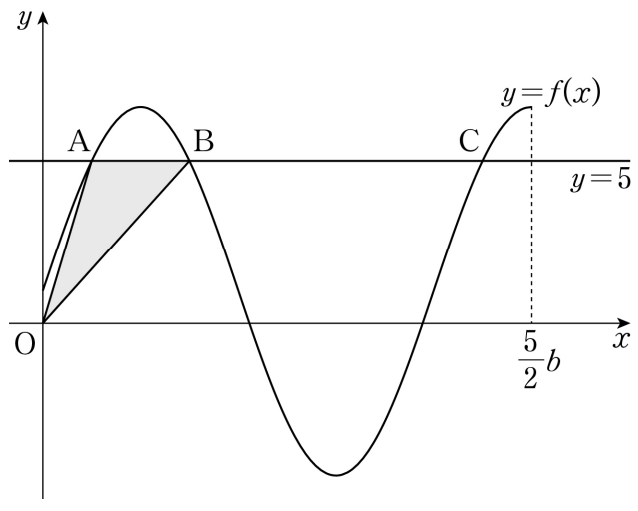
2023. 10월 학력평가

57. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자. $\overline{BC}=\overline{AB}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.)

[4점]



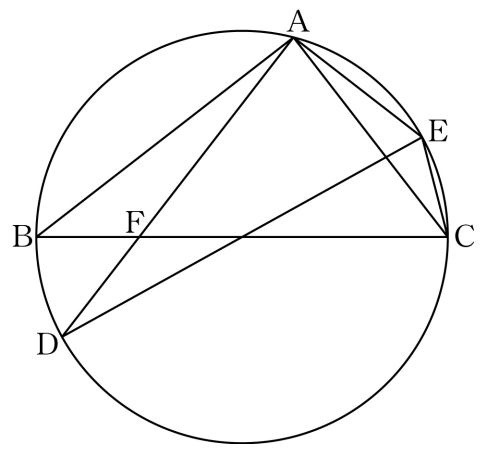
① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

2023. 10월 학력평가

58. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC}=\overline{DE}=4,\ \overline{BF}=\overline{CE},\ \sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$$

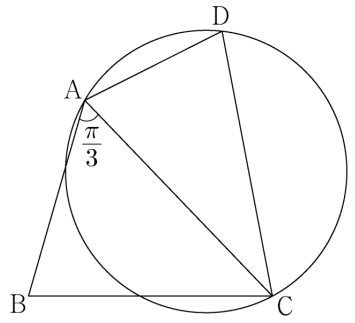
이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



2023. 11월 대학수학능력시험

59. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?[4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

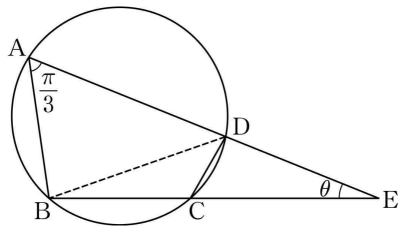
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 3월 학력평가

60. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=\overline{BC}=2$, $\overline{AD}=3$, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{CD}=$ (가)

이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서

$\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$

이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

이를 이용하면

$\overline{ED}=$ (나)

이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\sin\theta=$ (다)

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

2022. 4월 학력평가

61. 자연수 k에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

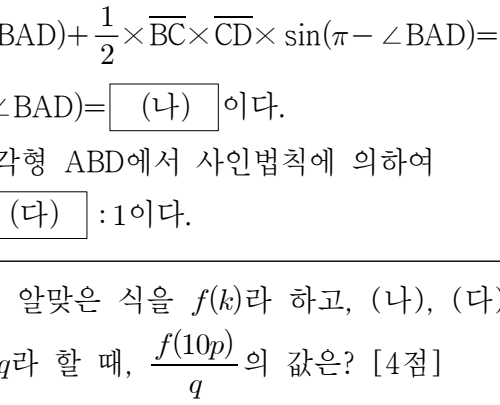
$0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

2022. 4월 학력평가

62. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

- $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
- 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

$\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ACB)=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{\text{(가)}}}{\overline{BC}}\right)$,

$\cos(\angle DCA)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{\text{(가)}}}{\overline{CD}}\right)$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$

에서 $\sin(\angle BAD)=$ (나)이다.

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{BD}:R=$ (다) $:1$이다.

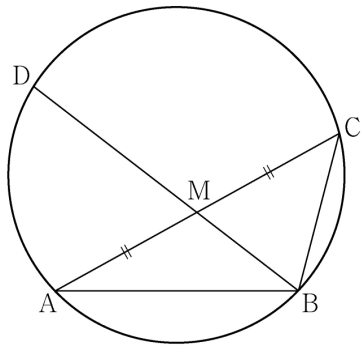
위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은? [4점]

① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

63. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

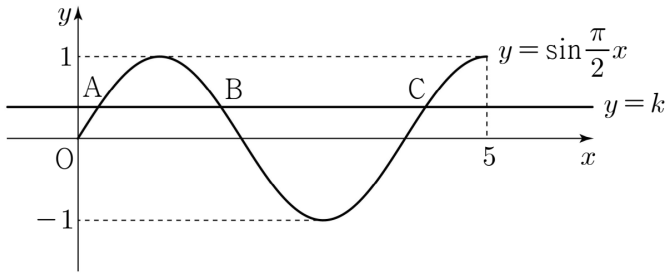


① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

2022. 7월 학력평가

64. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x(0\le x\le 5)$가 직선 $y=k(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



2022. 7월 학력평가

65. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

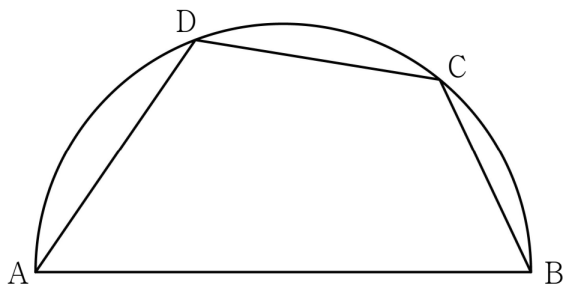
<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



2022. 9월 수능 모의평가

66. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)[4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

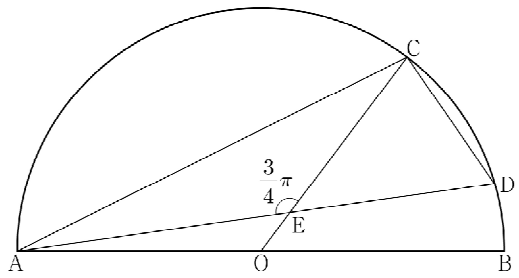
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

67. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은?[4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

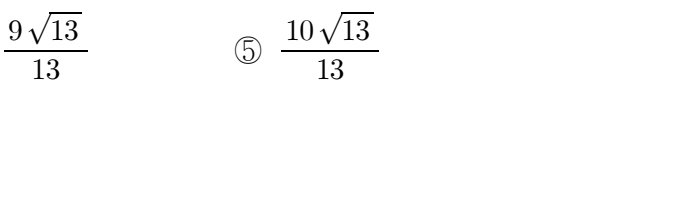
2022. 10월 학력평가

68. 양수 a에 대하여 $f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|\left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

2022. 10월 학력평가

69. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E을 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여
$\cos(\angle ABC)=$ (가) 이다.
삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-(\text{(가)})^2}$ 이므로
사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 (나) 이다.
삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$ 이므로
$\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$ 이다.
삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여 $\overline{DE}=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

2022. 11월 대학수학능력시험

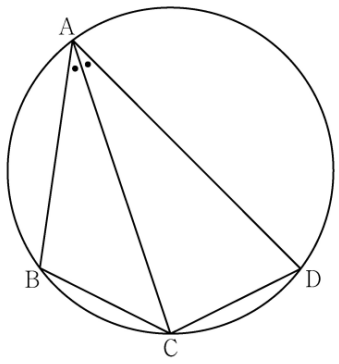
70. 함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.[4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 11월 대학수학능력시험

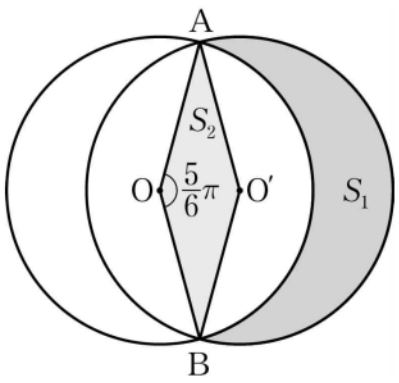
71. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 이 원의 반지름의 길이는?[4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

2021. 3월 학력평가

72. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$이다.

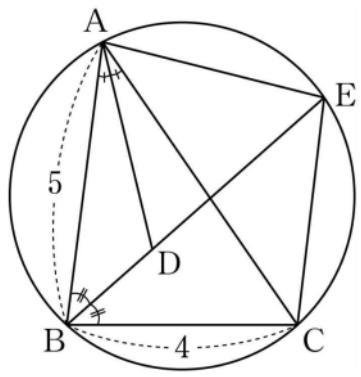


원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, S_1-S_2의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

2021. 3월 학력평가

73. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



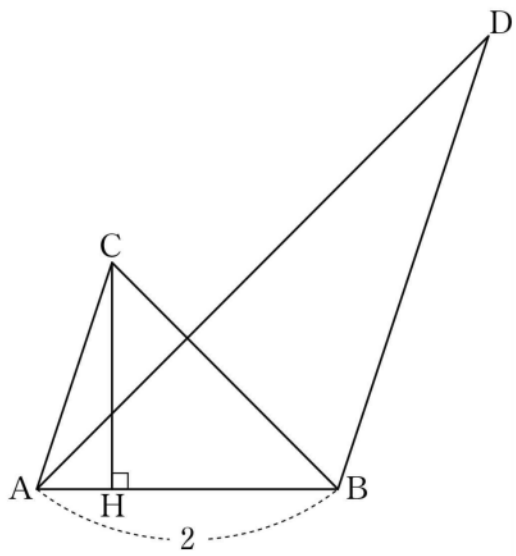
<보 기>

ㄱ. $\overline{AC}=6$
ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021. 3월 학력평가

74. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}/\!/\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 1 : 3으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \angle CAB<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

75. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x-\sin(\pi+x)-2=0$의 모든 해의 합은? [4점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

2021. 4월 학력평가

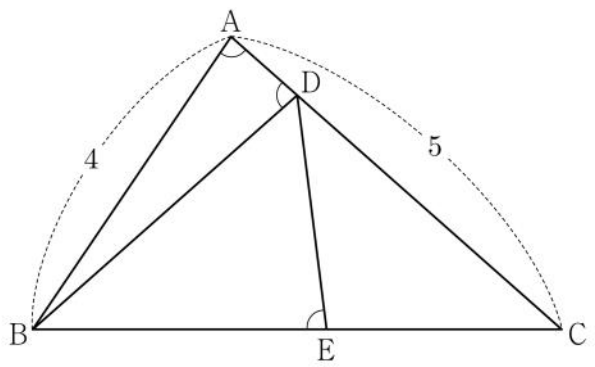
76. $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

2021. 6월 수능 모의평가

77. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

2021. 6월 수능 모의평가

78. $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021. 7월 학력평가

79. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$3\cos^2 x+5\sin x-1=0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

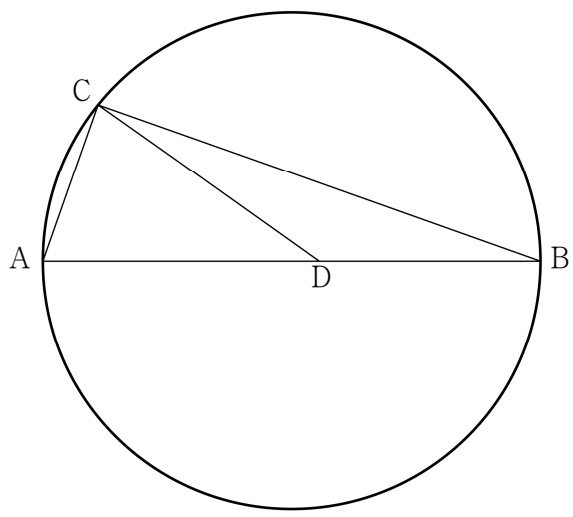
① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

2021. 7월 학력평가

80. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

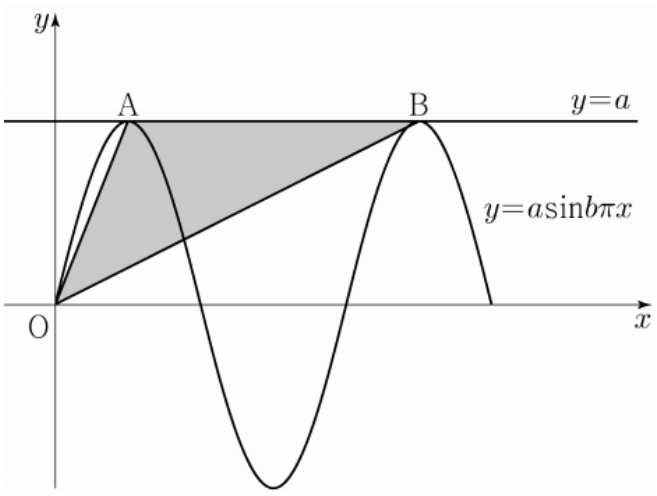
이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

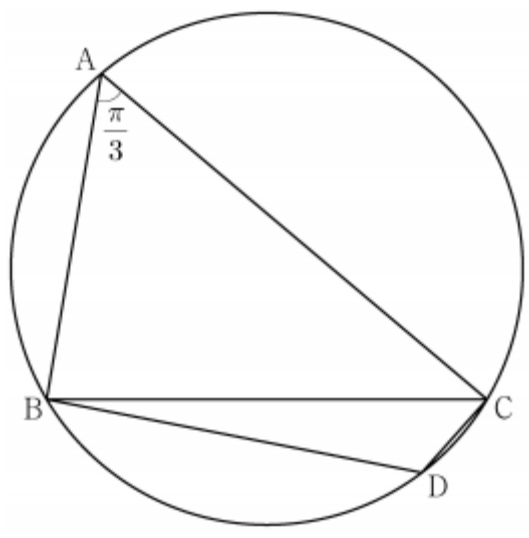
81. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은?(단, O는 원점이다.) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

82. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

2021년 10월 전국연합

83. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

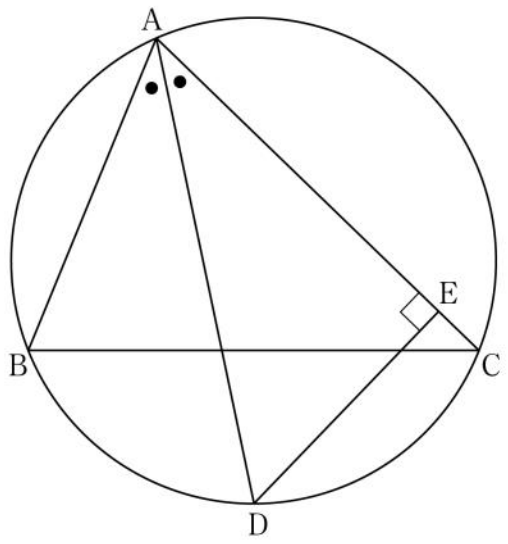
$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{k}{6}\pi\right)\\ 2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi\right)\end{cases}$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

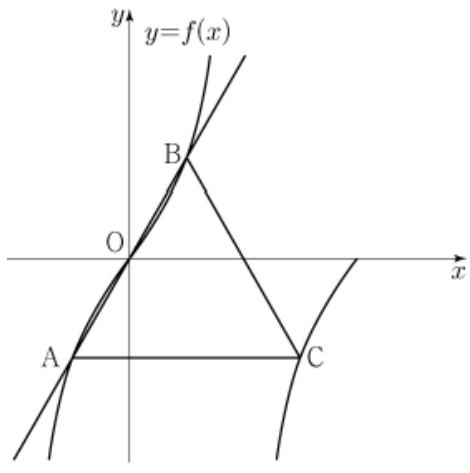
2021년 10월 전국연합

84. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



2021. 11월 대학수학능력시험

85. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?(단, O는 원점이다.) [4점]

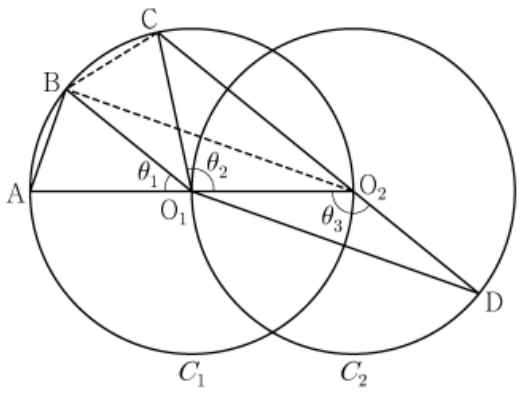


① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 11월 대학수학능력시험

86. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때,

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=$ (가) 이고

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나) 이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=$ (다) 이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

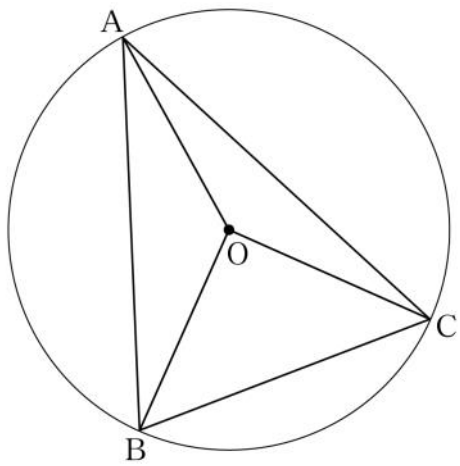
$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\text{(가)}}{2}+\text{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

2020. 3월 학력평가

87. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

2020. 3월 학력평가

88. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ라 하자. $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$일 때, $9\left(\sin^2\beta+\tan^2\gamma\right)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x축의 양의 방향이다.) [4점]

2020. 3월 학력평가

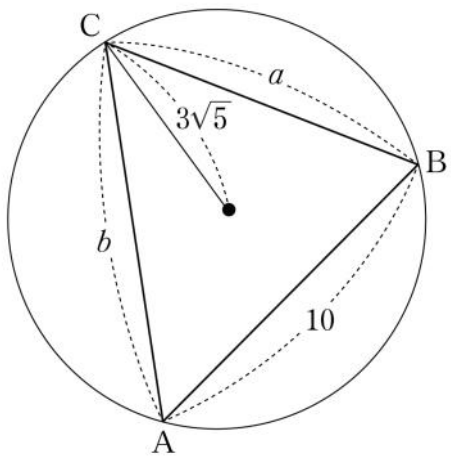
89. $0<a<\dfrac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a},\dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $A\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $B\left(\dfrac{7}{2}\pi,0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

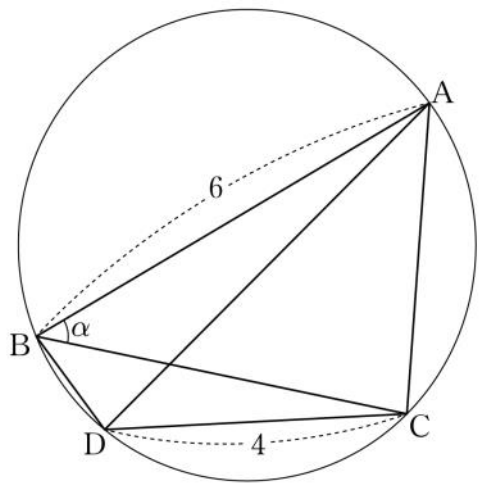
90. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은? [4점]

① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



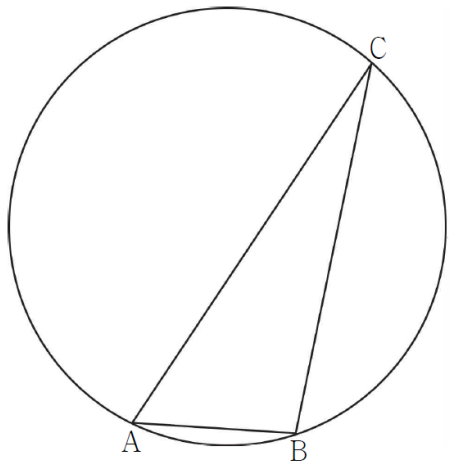
2020. 3월 학력평가

91. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



2020. 4월 학력평가

92. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



① $\dfrac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\dfrac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$

2020. 4월 학력평가

93. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A_3=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 4월 학력평가

94. $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가 두 직선 $y=9$, $y=2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a\times b$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

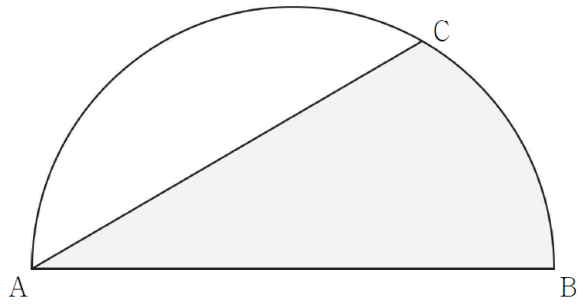
2020. 4월 학력평가

95. 두 함수 $f(x)=\cos(ax)+1$, $g(x)=|\sin 3x|$의 주기가 서로 같을 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2020. 4월 학력평가

96. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C가 있다. 호 CB의 길이가 2π일 때, 두 선분 AB, AC와 호 CB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]



① $5\pi+9\sqrt{3}$ ② $5\pi+10\sqrt{3}$ ③ $6\pi+9\sqrt{3}$
④ $6\pi+10\sqrt{3}$ ⑤ $7\pi+9\sqrt{3}$

2020. 6월 수능 모의평가

97. $0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점]

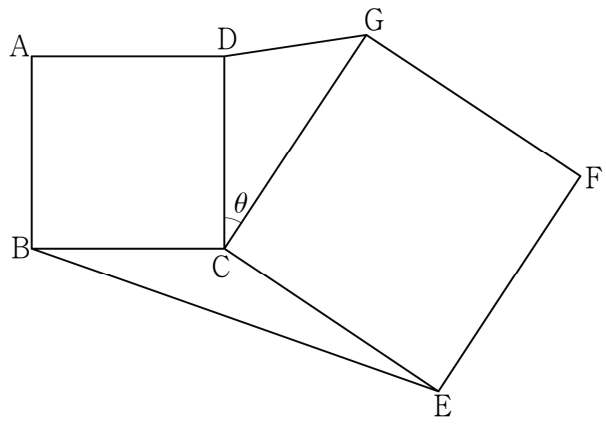
① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

2020. 7월 학력평가

98. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) [4점]

2020. 7월 학력평가

99. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다. $\angle DCG=\theta\,(0<\theta<\pi)$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이다. $\overline{DG}\times\overline{BE}$의 값은? [4점]



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

2020. 7월 학력평가

100. 자연수 n에 대하여 $0\le x<2^{n+1}$일 때, 부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\le-\frac{1}{2}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 9월 수능 모의평가

101. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\ g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
> $\{x|f(x)=a\}\subset\{x|g(x)=a\}$
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

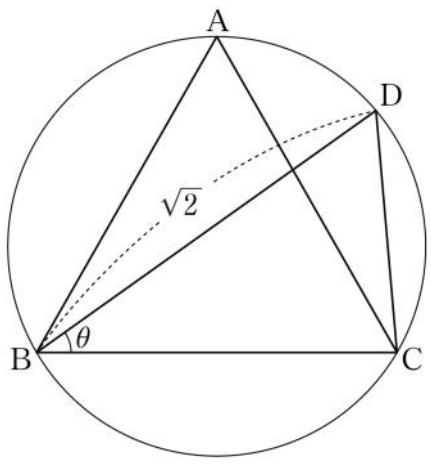
102. 그림과 같이 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$ ④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

2020. 10월 학력평가

103. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? [4점]

① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$



2020. 10월 학력평가

104. 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y=-x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi,\pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, a_2+a_3의 값을 구하시오. [4점]

2020. 11월 대학수학능력시험

105. $0\le x\le 4\pi$일 때, 방정식

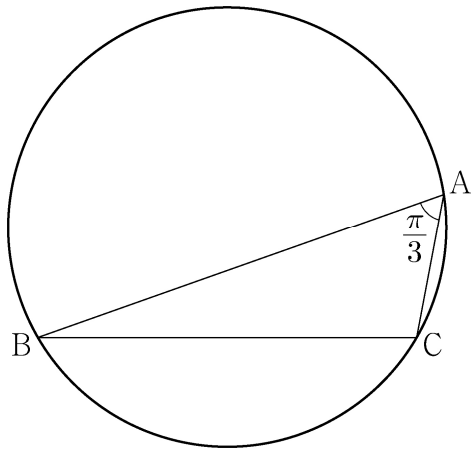
$$4\sin^2 x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

2020. 11월 대학수학능력시험

106. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.[4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 03 수열

2023. 3월 학력평가

1. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_5=4,\ a_7=4a_6-16$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

2023. 4월 학력평가

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $\frac{a_5}{a_3}=4$일 때, a_4의 값은? [2점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

2022. 7월 학력평가

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=1$일 때, a_5의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2022. 11월 대학수학능력시험

4. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_2+a_4=30$, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$를 만족시킬 때, a_1의 값은? [2점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

2021. 3월 학력평가

5. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=100$일 때, a_1의 값은? [2점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

2021. 4월 학력평가

6. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5-a_2의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 4월 학력평가

7. 첫째항이 2이고 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_2의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

2020. 6월 수능 모의평가

8. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=a_2+6$$

일 때, a_4의 값은? [2점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

2020. 6월 수능 모의평가

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3=20$일 때, a_2의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 7월 학력평가

10. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $a_3=6$일 때, $\frac{a_2}{a_1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 11월 대학수학능력시험

11. 첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2023. 9월 수능 모의평가

12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$, $a_5+a_7=36$일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 3월 학력평가

13. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 6월 수능 모의평가

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

2023. 7월 학력평가

15. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3{}^2=a_6,\ a_2-a_1=2$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

2023. 7월 학력평가

16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 9월 수능 모의평가

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오.[3점]

2023. 10월 학력평가

18. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 2인 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_2=b_2,\ a_4=b_4$$

를 만족시킬 때, a_1+b_1의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2023. 10월 학력평가

19. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_7-S_4=0$, $S_6=30$이다. a_2의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2023. 10월 학력평가

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 11월 대학수학능력시험

21. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_4-S_2=3a_4$, $a_5=\frac{3}{4}$일 때, a_1+a_2의 값은?[3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

2023. 11월 대학수학능력시험

22. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오.[3점]

2022. 3월 학력평가

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4=6,\quad 2a_7=a_{19}$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 3월 학력평가

24. 부등식 $\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}<\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{k-1})$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 4월 학력평가

25. 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1=b_1,\ \sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}b_n=160$$

일 때, a_3+b_3의 값은? [3점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

2022. 4월 학력평가

26. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=1$, $a_5=2(a_3)^2$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2022. 6월 수능 모의평가

27. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2+a_3=\frac{3}{2}$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

2022. 6월 수능 모의평가

28. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2022. 7월 학력평가

29. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1 & (a_n<0)\\ -2a_n+1 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

일 때, $a_{10}+a_{20}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2022. 9월 수능 모의평가

30. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2a_5,\quad a_8+a_{12}=-6$$

일 때, a_2의 값은?[3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

2022. 9월 수능 모의평가

31. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

2022. 9월 수능 모의평가

32. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5}ca_k=65+\sum_{k=1}^{5}c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오.[3점]

2022. 10월 학력평가

33. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_3=4$, $a_3\times a_5=64$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

2022. 10월 학력평가

34. 첫째항이 20인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=|a_n|-2$를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값은? [3점]

① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

2022. 10월 학력평가

35. $\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 11월 대학수학능력시험

36. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$를 만족시킬 때, a_4의 값은?[3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 11월 대학수학능력시험

37. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$, $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오.[3점]

2021. 3월 학력평가

38. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_n$의 값은? [3점]

① 235 ② 240 ③ 245 ④ 250 ⑤ 255

2021. 3월 학력평가

39. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

2021. 4월 학력평가

40. 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

2021. 6월 수능 모의평가

41. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

2021. 6월 수능 모의평가

42. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=36,\quad a_7=\frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

2021. 7월 학력평가

43. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}5-\dfrac{10}{a_n} & (a_n\text{이 정수인 경우})\\ -2a_n+3 & (a_n\text{이 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_9+a_{12}의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2021. 7월 학력평가

44. 첫째항이 $a(a>0)$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $2a=S_2+S_3$, $r^2=64a^2$일 때, a_5의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 9월 수능 모의평가

45. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_2a_4=36$일 때, $\frac{a_7}{a_3}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2021. 9월 수능 모의평가

46. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{n}$을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

47. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 10월 학력평가

48. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 n^2-5n일 때, a_1+d의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2021. 10월 학력평가

49. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=\begin{cases}a_n-3 & (n=1,3)\\ a_n+3 & (n=2,4)\end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

$\sum_{k=1}^{32}a_k=112$일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오. [3점]

2021. 11월 대학수학능력시험

50. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_4+a_6=36$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

2021. 11월 대학수학능력시험

51. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<7)\\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

2021. 11월 대학수학능력시험

52. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$,

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

2020. 3월 학력평가

53. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 소수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2020. 3월 학력평가

54. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3\times a_5\times a_7=125$

(나) $\frac{a_4+a_8}{a_6}=\frac{13}{6}$

a_9의 값은? [3점]

① 10 ② $\frac{45}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{55}{4}$ ⑤ 15

2020. 3월 학력평가

55. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2+a_3=2(a_1+12)$

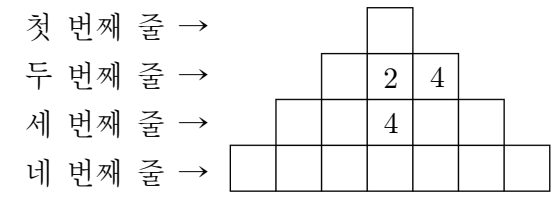
일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2020. 3월 학력평가

56. 그림은 16개의 칸 중 3개의 칸에 다음 규칙을 만족시키도록 수를 써 넣은 것이다.

(가) 가로로 인접한 두 칸에서 오른쪽 칸의 수는 왼쪽 칸의 수의 2배이다.
(나) 세로로 인접한 두 칸에서 아래쪽 칸의 수는 위쪽 칸의 수의 2배이다.



이 규칙을 만족시키도록 나머지 칸에 수를 써 넣을 때, 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은? [3점]

① 119 ② 127 ③ 135 ④ 143 ⑤ 151

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

57. 등차수열 $\{a_n\}$, 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=3$이고

$$b_3=-a_2,\ a_2+b_2=a_3+b_3$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① -9 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 9

2020. 3월 학력평가

58. $\sum_{k=1}^{5}k^2$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

59. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=4$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=67$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2020. 4월 학력평가

60. $\sum_{n=1}^{20}(-1)^n n^2$의 값은? [3점]

① 195 ② 200 ③ 205 ④ 210 ⑤ 215

2020. 4월 학력평가

61. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=6$, $a_3+a_6=a_{11}$일 때, a_4의 값을 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

62. 첫째항이 6인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $2a_4=a_{10}$일 때, a_9의 값을 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

63. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=10$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=3$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)$의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

2020. 6월 수능 모의평가

64. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

65. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=1,\ \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

2020. 7월 학력평가

66. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2n+1$일 때, $\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

2020. 7월 학력평가

67. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\le 1)\\ \log_{a_n}\sqrt{2} & (a_n>1)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 7월 학력평가

68. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2=6$, $a_5=48$이다. a_6의 값을 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

69. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2020. 9월 수능 모의평가

70. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3a_7=64,\ a_8>0$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

2020. 9월 수능 모의평가

71. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$$

의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값은? [3점]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

2020. 10월 학력평가

72. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3=15,\ a_3+a_4+a_5=39$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 11월 대학수학능력시험

73. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때, $\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 11월 대학수학능력시험

74. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=8,\ \sum_{k=1}^{5}b_k=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

2020. 11월 대학수학능력시험

75. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은? [3점]

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

2023. 3월 학력평가

76. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $|a_4|+|a_6|=8$

(나) $\sum_{k=1}^{9}a_k=27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

2023. 3월 학력평가

77. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 4월 학력평가

78. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{n-2} & (a_n<1)\\ \log_2 a_n & (a_n\geq 1)\end{cases}$$

이다.

(나) $a_5+a_6=1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

2023. 4월 학력평가

79. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.

(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

2023. 6월 수능 모의평가

80. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

2023. 6월 수능 모의평가

81. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}$ $(n\geq 1)$이라 하고,

두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

2023. 6월 수능 모의평가

82. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2n-k & (a_n\leq 0)\\ a_n-2n-k & (a_n>0)\end{cases}$$

이다.

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

2023. 7월 학력평가

83. 모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2m+1}a_k<0$

(나) $|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|<13$

$24<a_{21}<29$일 때, m의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2023. 7월 학력평가

84. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1<300$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n\text{이 자연수인 경우})\\ a_n+6 & (\log_3 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우})\end{cases}$$

이다.

$\sum_{k=4}^{7}a_k=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

2023. 9월 수능 모의평가

85. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?[4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

86. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.[4점]

2023. 10월 학력평가

87. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n + 2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \\ a_n + 2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_3 > a_5$

$50 < a_4 + a_5 < 60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

2023. 11월 대학수학능력시험

88. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$|a_6| = a_8$, $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은?[4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

2023. 11월 대학수학능력시험

89. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?[4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

2022. 3월 학력평가

90. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

2022. 3월 학력평가

91. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 4월 학력평가

92. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \leq n \leq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+4} = 15$이다.

(나) $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2022. 4월 학력평가

93. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.

(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

94. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2022. 6월 수능 모의평가

95. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2022. 7월 학력평가

96. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} = S_n$$

이 성립할 때, a_{10}의 값을 구하는 과정이다.

$n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$$

이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \ge 2)$ 이다.

$S_1 = a_1$에서 $3S_1 = 3a_1$이므로

$3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \ge 1)$ 이다.

$$3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$$
$$= (n+2) \times a_n - (\boxed{\text{(가)}}) \times a_{n-1} \ (n \ge 2)$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\text{(나)}} \ (n \ge 2)$$

따라서

$$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$$
$$= \boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$의 값은? [4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

2022. 7월 학력평가

97. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

98. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다.
(단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2} a_n & (|a_n| \ge 5) \end{cases}$$ 이다.

$|a_m| \ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은?[4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2022. 10월 학력평가

99. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \ne j$이면 $S_i \ne S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [4점]

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

2022. 11월 대학수학능력시험

100. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?[4점]

(가) $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

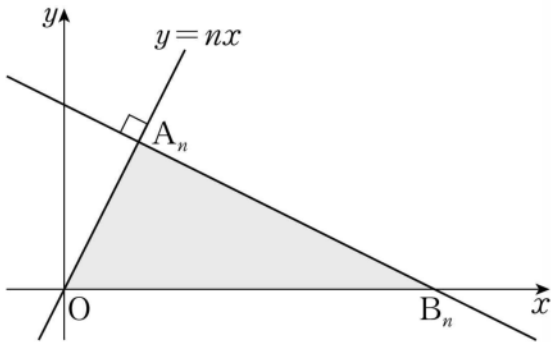
$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3} a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$ 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 3월 학력평가

101. 자연수 n에 대하여 점 $A_n(n,\ n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

점 $A_n(n,\ n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 방정식

$y=$ (가) $\times x+n^2+1$

이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면

$S_n=$ (나)

따라서

$\sum_{k=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=$ (다)

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

2021. 4월 학력평가

102. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n\geq 0)\\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$$

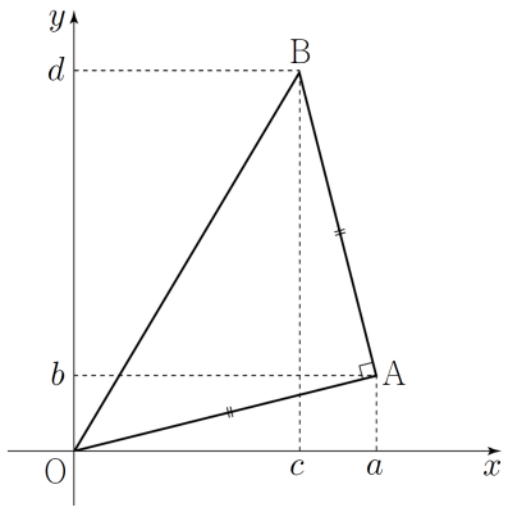
을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

2021. 4월 학력평가

103. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

- $a>b$
- 좌표평면 위의 두 점 $A(a,\ b)$, $B(c,\ d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20}T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 $A(a,\ b)$에 대하여

점 $B(c,\ d)$가 $\overline{OA}\perp\overline{AB}$, $\overline{OA}=\overline{AB}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로 $b<\frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\leq n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $n-2k$이다.

2 이상의 자연수 m에 대하여

(i) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 (가)까지이므로

$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\text{(가)}}(2m-2k)=$ (나)

(ii) $n=2m+1$인 경우

$T_{2m+1}=$ (다)

(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20}T_n=614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은? [4점]

① 71 ② 74 ③ 77 ④ 80 ⑤ 83

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

104. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

2021. 7월 학력평가

105. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_{n+1}=\log_2(n+2)+\sum_{k=1}^{n}S_k \quad \cdots \quad (*)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n}ka_k$를 구하는 과정이다.

주어진 식 (*)에 의하여

$$nS_n=\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k \ (n\geq 2) \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$(n+1)S_{n+1}-nS_n$$

$$=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k \ (n\geq 2)$$

이므로

$$(\boxed{\text{(가)}})\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1} \ (n\geq 2)$$

이다.

$a_1=1=\log_2 2$이고,

$2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로

모든 자연수 n에 대하여

$$na_n=\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(8)-g(8)+h(8)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

2021. 6월 수능 모의평가

106. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,1]$에서

$$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20}\dfrac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

2021. 7월 학력평가

107. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1\leq d$

(나) 어떤 자연수 $k(k\geq 3)$에 대하여
세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90\leq a_{16}\leq 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

2021. 7월 학력평가

108. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (-3\leq x\leq 3)\\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3)\end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

109. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

2021. 9월 수능 모의평가

110. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?[4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

2021. 10월 학력평가

111. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2n$$

을 만족시킬 때, $a_1 + a_{22}$의 값은? [4점]

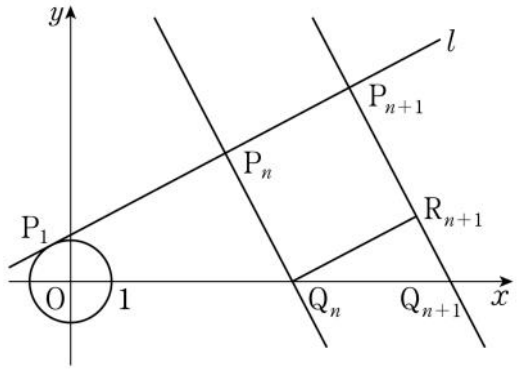
① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

2021. 10월 학력평가

112. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $l: x - 2y + \sqrt{5} = 0$ 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n이 다음 조건을 만족시킨다.

- 직선 P_nQ_n과 직선 l이 서로 수직이다.
- $\overline{P_nQ_n} = \overline{P_nP_{n+1}}$이고 점 P_{n+1}의 x좌표는 점 P_n의 x좌표보다 크다.

다음은 점 P_1이 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 l의 접점일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



자연수 n에 대하여 점 Q_n을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 $P_{n+1}Q_{n+1}$과 만나는 점을 R_{n+1}이라 하면 사각형 $P_nQ_nR_{n+1}P_{n+1}$은 정사각형이다.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\overline{R_{n+1}Q_{n+1}} = \boxed{\text{(가)}} \times \overline{P_nP_{n+1}}$$

이고

$$\overline{P_{n+1}Q_{n+1}} = \left(1 + \boxed{\text{(가)}}\right) \times \overline{P_nQ_n}$$

이다. 이때, $\overline{P_1Q_1} = 1$이므로 $\overline{P_nQ_n} = \boxed{\text{(나)}}$이다.

그러므로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\overline{P_1P_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_kP_{k+1}} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{P_nQ_n} \times \overline{P_1P_n} = \frac{1}{2} \times \boxed{\text{(나)}} \times \left(\boxed{\text{(다)}}\right)$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(6p) + g(8p)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2021. 11월 대학수학능력시험

113. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1| = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

114. 자연수 n에 대하여 두 점 $A(0, n+5)$, $B(n+4, 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 3월 학력평가

115. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

를 만족시킨다. $a_1 = 2$일 때, $a_2 + \frac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은? [4점]

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

2020. 3월 학력평가

116. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 42$일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k의 값은? [4점]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$
(나) $S_k = k^2$

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

2020. 4월 학력평가

117. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은? [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$
(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

2020. 4월 학력평가

118. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = b_n + 2$
(나) $a_{2n+1} = b_n - 1$
(다) $b_{2n} = 3a_n - 2$
(라) $b_{2n+1} = -a_n + 3$

$a_{48} = 9$이고 $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오. [4점]

2020. 4월 학력평가

119. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + 3a_n = (-1)^n \times n$$

을 만족시킨다. a_5의 값을 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

120. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (2^{2n} - 1) \times 2^{n(n-1)} + (n-1) \times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변) = 3, (우변) = 3이므로
$(*)$이 성립한다.
(ii) $n = m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n = m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} + (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{\text{(가)}} + m \times 2^{-m-1}$$

$$= \boxed{\text{(가)}} \times \boxed{\text{(나)}} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m}$$

$$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n = m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

121. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

122. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 6월 수능 모의평가

123. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 6월 수능 모의평가

124. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5\times a_7\times a_9=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020. 7월 학력평가

125. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7=T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

2020. 7월 학력평가

126. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7=a_6+a_8$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

2020. 7월 학력평가

127. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.
(다) 직선 P_nP_{n+1}의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x\geq 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n, a_{n+1}]$에서 선분 P_nP_{n+1}과 일치할 때, $\int_1^{11}f(x)dx$의 값은? [4점]

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

2020. 7월 학력평가

128. 첫째항이 양수이고 공차가 -1보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

$$b_n=\begin{cases} a_{n+1}-\frac{n}{2} & (a_n\geq 0) \\ a_n+\frac{n}{2} & (a_n<0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5<b_6$
(나) $S_5=S_9=0$

$S_n\leq -70$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

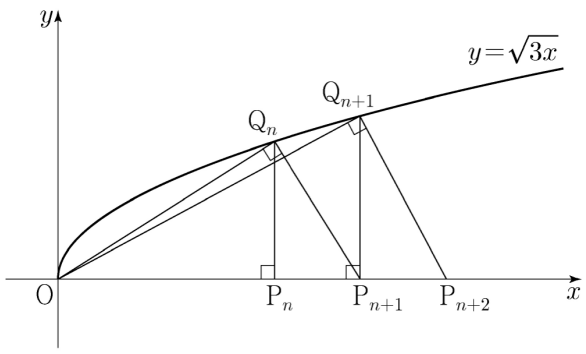
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 9월 수능 모의평가

129. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}}=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{\text{(나)}})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

2020. 9월 수능 모의평가

130. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

2020. 9월 수능 모의평가

131. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2020. 10월 학력평가

132. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_nC_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)=1, (우변)=1이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_mC_k}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}C_k}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}C_k}{k}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_mC_k+{}_mC_{k-1})}{k}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{\text{(나)}}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{\text{(다)}}}\times\frac{(m+1)!}{(m-k+1)!\,k!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\frac{g(3)+h(3)}{f(4)}$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

2020. 10월 학력평가

133. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a<b<c\le20$

(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

134. 3 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n=\{(p, q)\mid p<q\text{이고 } p,\ q\text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}$$

이다. 집합 A_n의 모든 원소 (p, q)에 대하여 q의 값의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=3$일 때, $A_3=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$이므로

$a_3=\dfrac{2+3+3}{3}=\dfrac{8}{3}$이고 $\dfrac{2\times3+2}{3}=\dfrac{8}{3}$이다.

그러므로 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$가 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq3)$일 때, $a_k=\dfrac{2k+2}{3}$가 성립한다고 가정하자. $n=k+1$일 때,

$$A_{k+1}=A_k\cup\{(1, k+1), (2, k+1), \cdots, (k, k+1)\}$$

이고 집합 A_k의 원소의 개수는 [(가)]이므로

$$a_{k+1}=\frac{\boxed{\text{(가)}}\times\dfrac{2k+2}{3}+\boxed{\text{(나)}}}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{2k+4}{3}=\frac{2(k+1)+2}{3}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(10)+g(9)$의 값은? [4점]

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

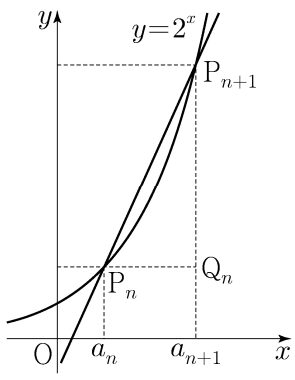
2020. 10월 학력평가

135. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5=5$이고 $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=20$이다. a_6의 값은? [4점]

① 6 ② $\dfrac{20}{3}$ ③ $\dfrac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\dfrac{26}{3}$

2020. 11월 대학수학능력시험

136. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.



모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고 곡선 $y=2^x$위의 두 점 $\mathrm{P}_n\left(a_n, 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자. 다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

두 점 P_n,P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times a_n$이므로

$$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.

$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.

점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 [㉮]이고,

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=$ [㉯]

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=$ [㉰]이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

2020. 11월 대학수학능력시험

137. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$

(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 04 함수의 극한과 연속

2022. 11월 대학수학능력시험

1. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 3월 학력평가

2. $\lim_{x\to 2}(x^2+5)$의 값은? [2점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

2023. 3월 학력평가

3. 함수

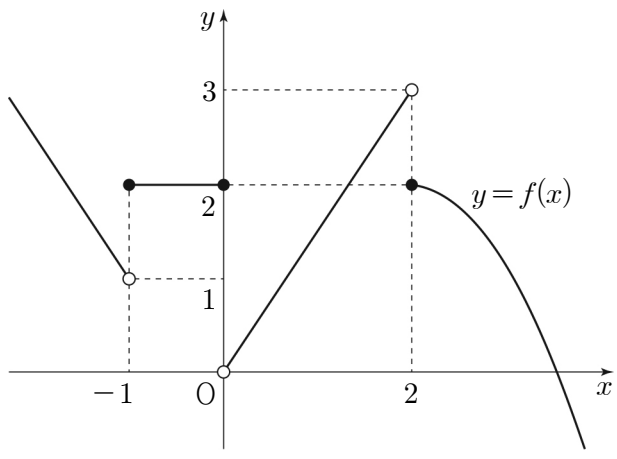
$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2023. 4월 학력평가

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 4월 학력평가

5. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 4월 학력평가

6. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 6월 수능 모의평가

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

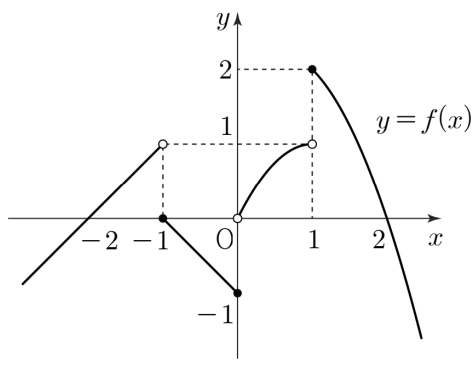
$$\lim_{x\to 1} f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 7월 학력평가

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

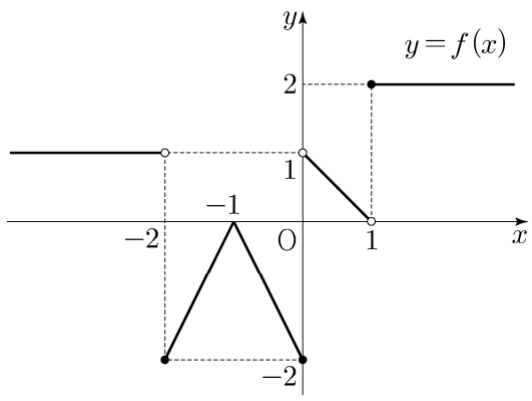


$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2023. 9월 수능 모의평가

9. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은?[3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

10. 두 자연수 m, n에 대하여 함수 $f(x)=x(x-m)(x-n)$이

$$f(1)f(3)<0,\ f(3)f(5)<0$$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

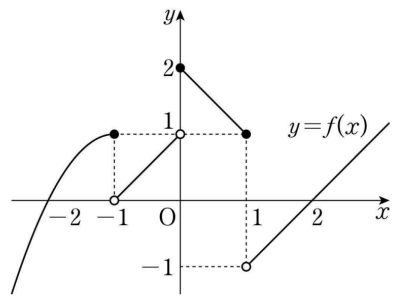
2023. 11월 대학수학능력시험

11. 함수 $f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\geq 2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 3월 학력평가

12. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

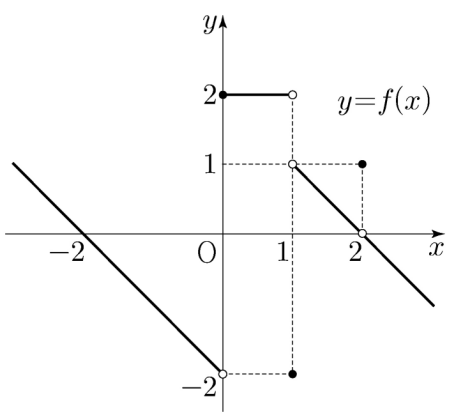
2022. 4월 학력평가

13. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 6월 수능 모의평가

14. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020. 6월 수능 모의평가

15. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

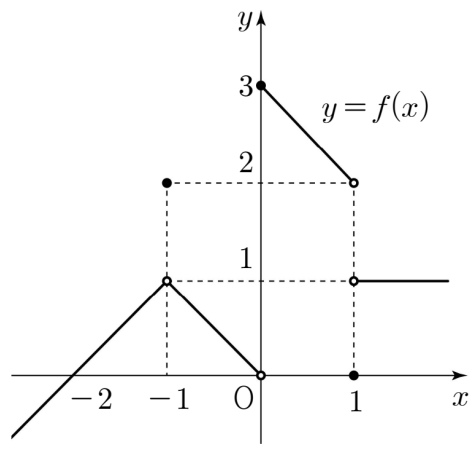
$$f(x)=\begin{cases}x+a & (x<-1)\\ x & (-1\leq x<3)\\ bx-2 & (x\geq 3)\end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\dfrac{10}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{3}$

2022. 7월 학력평가

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 7월 학력평가

17. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<2)\\ x^2-ax+3 & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 7월 학력평가

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

19. 함수

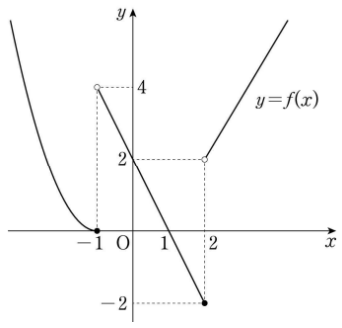
$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x\le a)\\ ax-6 & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?[3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2022. 10월 학력평가

20. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

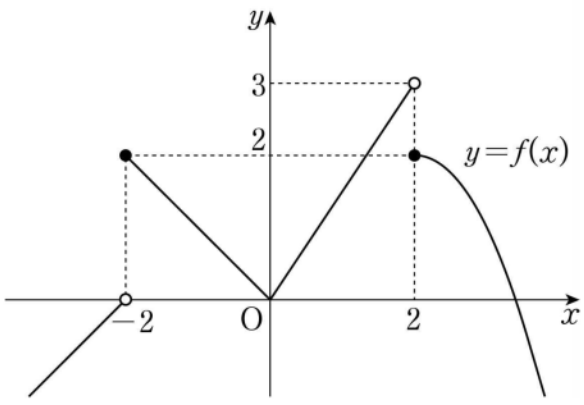


$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은?[3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2021. 3월 학력평가

21. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

2021. 3월 학력평가

22. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3)\\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\ge 3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2021. 4월 학력평가

23. 함수

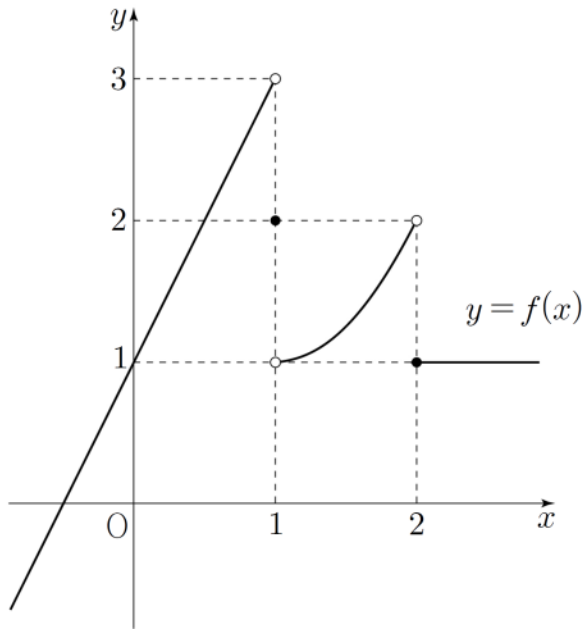
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2)\\ -x^2+b & (x\ge 2)\end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 4월 학력평가

24. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

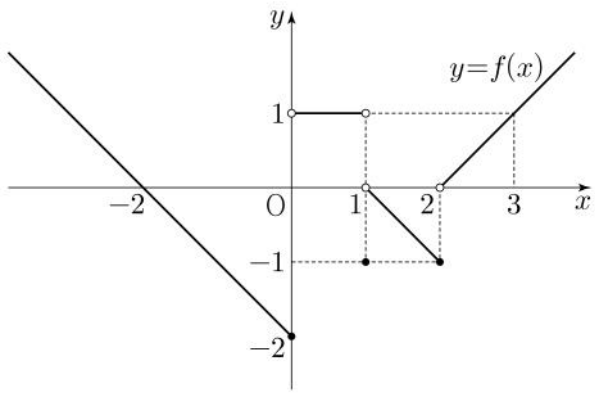


$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 6월 수능 모의평가

25. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

26. 함수

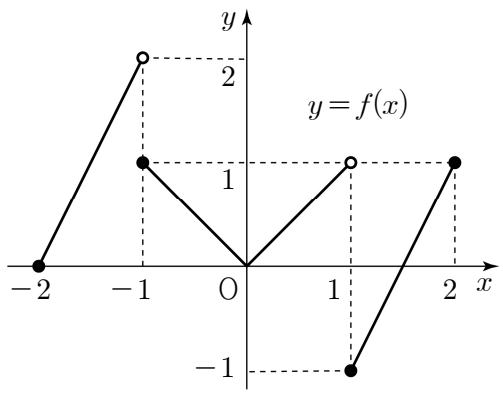
$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 7월 학력평가

27. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2021. 7월 학력평가

28. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+a}{x+1}=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

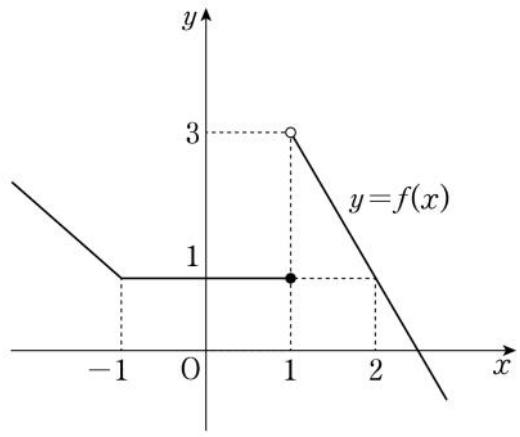
2021. 9월 수능 모의평가

29. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\leq -1) \\ x^2-5x-a & (x>-1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 10월 학력평가

30. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

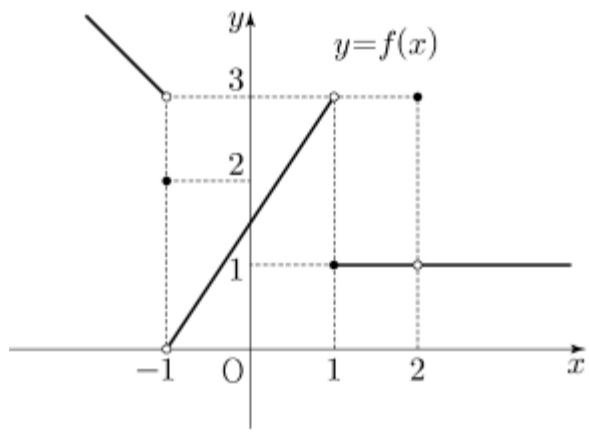


함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2021. 11월 대학수학능력시험

31. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 3월 학력평가

32. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

33. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

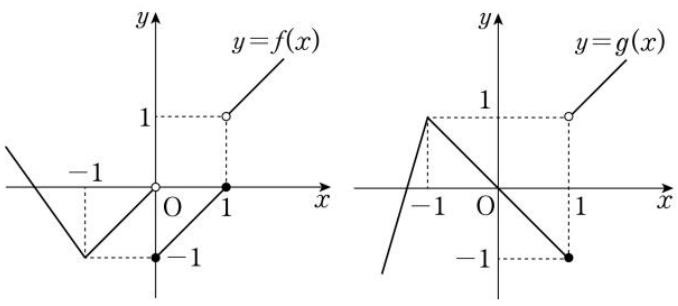
$$(x-1)f(x)=x^2-3x+2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020. 3월 학력평가

34. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. $f(1)g(1)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

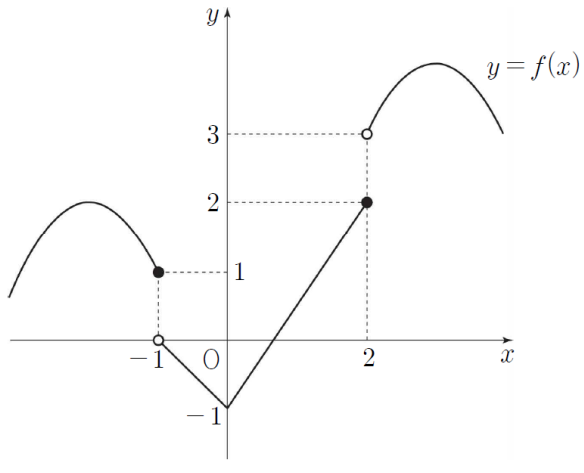
2020. 4월 학력평가

35. $\lim_{x\to 0}(x^2+x+3)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

36. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(-1)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

37. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x\neq 1) \\ 5 & (x=1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

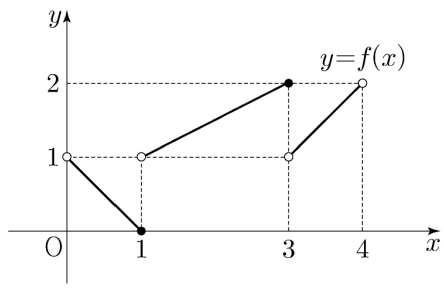
2020. 6월 수능 모의평가

38. $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-6x}{x-2}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 6월 수능 모의평가

39. 열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 3-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020. 7월 학력평가

40. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (x<1) \\ x^2-ax+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

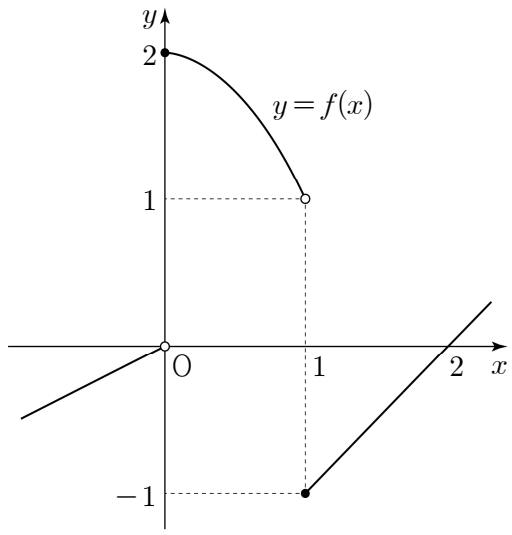
이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 7월 학력평가

41. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

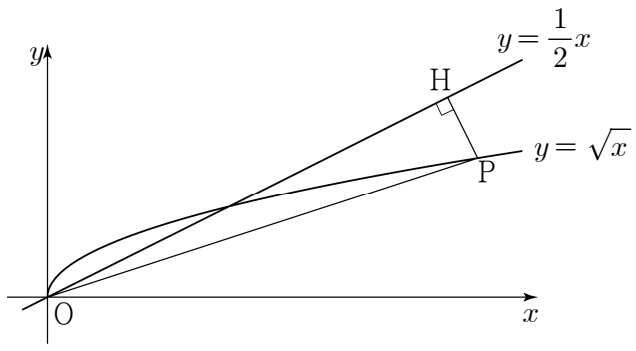


$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2020. 7월 학력평가

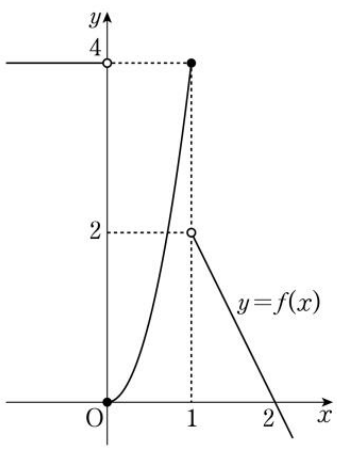
42. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})\,(t>4)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

2020. 10월 학력평가

43. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

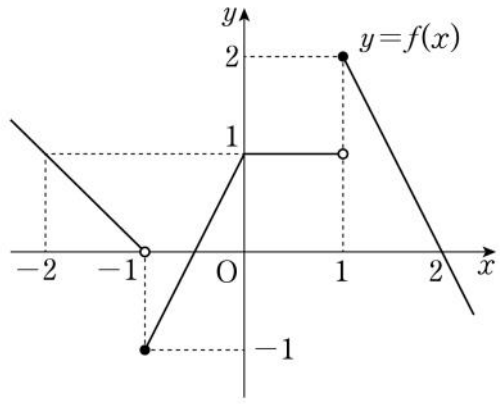


$\lim_{x\to 1+} f(x) - \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x-1}$의 값은? [3점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

2020. 10월 학력평가

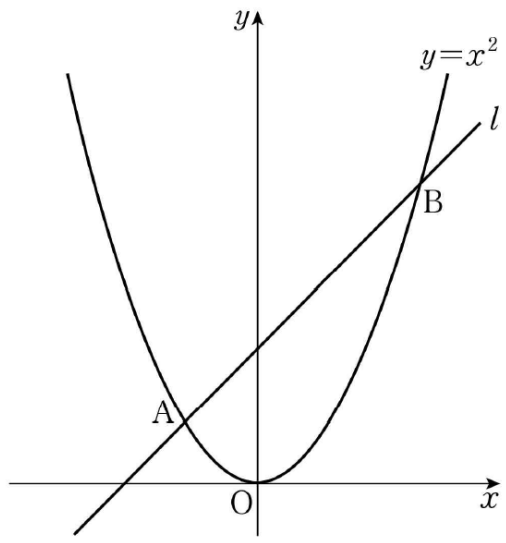
44. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속일 때, $g(5)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 3월 학력평가

45. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]

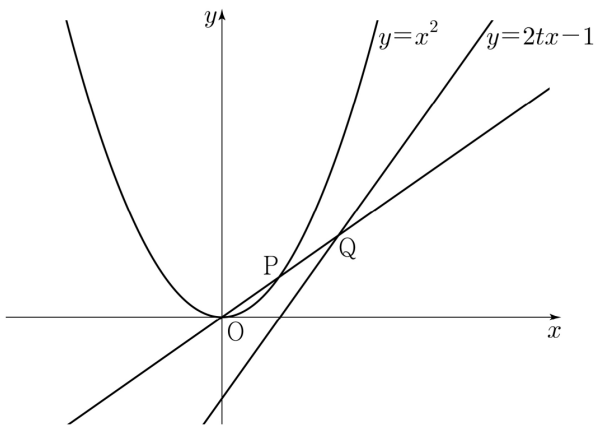


① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 6월 수능 모의평가

46. 그림과 같이 실수 t $(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 1-}\dfrac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

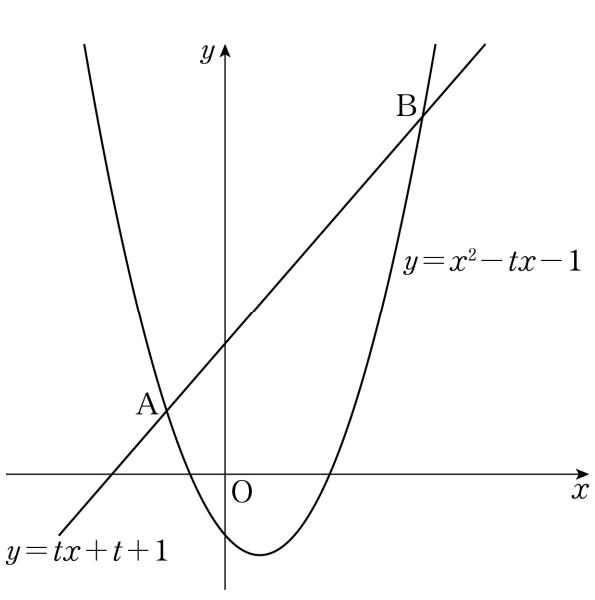


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

2023. 10월 학력평가

47. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\overline{AB}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

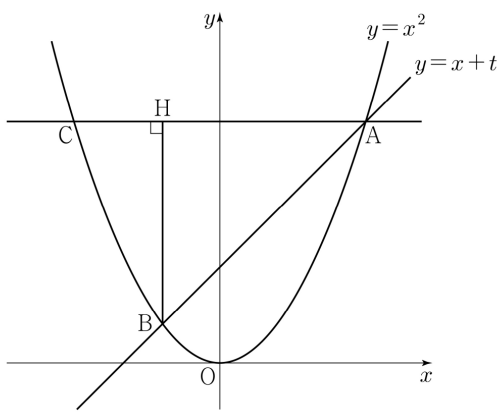


2022. 9월 수능 모의평가

48. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to 0+}\dfrac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)[4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



2021. 3월 학력평가

49. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 4월 학력평가

50. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 7월 학력평가

51. 다항함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$을 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3} & (x\neq 3)\\ 1 & (x=3)\end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

꿈을 현실로! 희망 부산교육

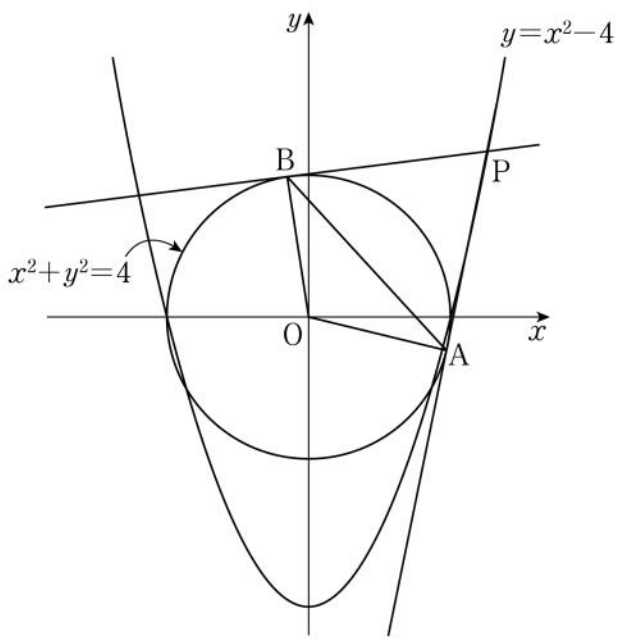
2021. 10월 학력평가

52. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



2021. 11월 대학수학능력시험

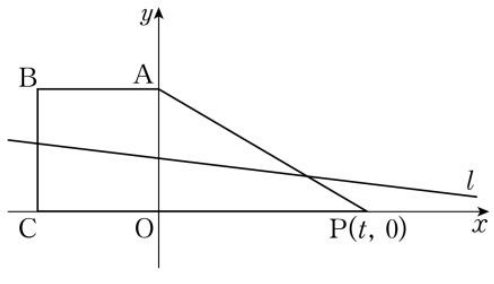
53. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때,

$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2020. 3월 학력평가

54. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(-2, 2)$, $\mathrm{C}(-2, 0)$과 점 $\mathrm{P}(t, 0)\,(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}f(t)$의 값은? [4점]

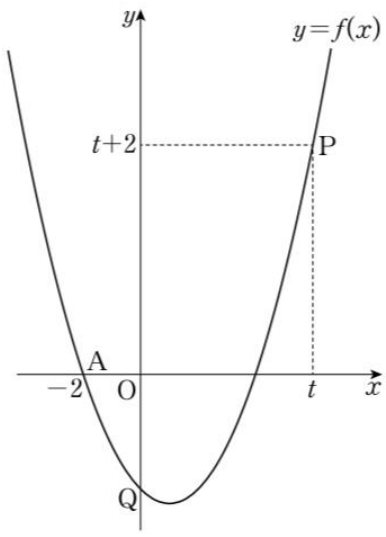


① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

2020. 3월 학력평가

55. 최고차항의 계수가 1이고 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{P}(t, t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}})$의 값을 구하시오. (단, $t\neq -2$) [4점]



2020. 4월 학력평가

56. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3,\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① -24 ② -21 ③ -18 ④ -15 ⑤ -12

2020. 4월 학력평가

57. 좌표평면에 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{B}(0, \sqrt{2})$가 있다. 점 O를 중심으로 하는 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{t\to 1+}f(t)\neq f(1)$

ㄷ. $0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 11월 대학수학능력시험

58. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-3x+a & (x\le 1)\\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-1} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 05 다항함수의 미분법

2023. 3월 학력평가

1. 함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 6월 수능 모의평가

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 7월 학력평가

3. 함수 $f(x)=x^3-7x+5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 9월 수능 모의평가

4. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 10월 학력평가

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$의 값은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

2023. 11월 대학수학능력시험

6. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 3월 학력평가

7. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$에 대하여 $f'(-1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 4월 학력평가

8. 함수 $f(x)=x^3+7x-4$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022. 9월 수능 모의평가

9. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2021. 6월 수능 모의평가

10. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x,\quad f(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

11. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 11월 대학수학능력시험

12. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

13. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2023. 3월 학력평가

14. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\ v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

2023. 3월 학력평가

15. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

2023. 4월 학력평가

16. 함수 $f(x)=2x^3-6x+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 4월 학력평가

17. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2023. 4월 학력평가

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2023. 4월 학력평가

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

2023. 6월 수능 모의평가

20. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2023. 6월 수능 모의평가

21. 두 곡선

$$y=2x^2-1,\ y=x^3-x^2+k$$

가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 6월 수능 모의평가

22. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수

$$f(x)=ax^3+bx+a$$

는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

2023. 7월 학력평가

23. 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x+a & (x\leq 1)\\ 2x^3+bx+1 & (x>1)\end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

24. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$가 $x=1$에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

2023. 7월 학력평가

25. 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 P$(-2, -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

2023. 9월 수능 모의평가

26. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은?(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

2023. 9월 수능 모의평가

27. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.[3점]

2023. 10월 학력평가

28. 두 함수

$$f(x)=-x^4-x^3+2x^2,\ g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+a$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

2023. 10월 학력평가

29. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+2)f(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 11월 대학수학능력시험

30. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은?(단, α와 β는 상수이다.)[3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

2023. 11월 대학수학능력시험

31. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.[3점]

2022. 3월 학력평가

32. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2022. 3월 학력평가

33. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3-12x^2+k\ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

2022. 4월 학력평가

34. $f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2022. 4월 학력평가

35. 곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 4월 학력평가

36. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 4월 학력평가

37. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4-4x^3+16x+a\geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

38. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

39. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 상수이다.) [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

40. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

2022. 7월 학력평가

41. 함수 $f(x)=x^3+2x+7$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2022. 9월 수능 모의평가

42. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022. 9월 수능 모의평가

43. 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.[3점]

2022. 9월 수능 모의평가

44. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.)[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 10월 학력평가

45. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=6$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 8

2022. 10월 학력평가

46. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+10$이 $x=3$에서 극소일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

2022. 11월 대학수학능력시험

47. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2f(x)$라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 11월 대학수학능력시험

48. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은?(단,a, b는 상수이다.)[3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2022. 11월 대학수학능력시험

49. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

2021. 3월 학력평가

50. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

2021. 3월 학력평가

51. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

2021. 4월 학력평가

52. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+4$이고 $f(-1)+f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2021. 4월 학력평가

53. 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

2021. 4월 학력평가

54. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2021. 4월 학력평가

55. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 6월 수능 모의평가

56. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 6월 수능 모의평가

57. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

2021. 7월 학력평가

58. 함수 $f(x)=x^2-ax$에 대하여 $f'(1)=0$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 7월 학력평가

59. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+6x-4$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 7월 학력평가

60. 함수 $f(x)=x^3+ax$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a에 대하여 $3a^2$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 7월 학력평가

61. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2,\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 9월 수능 모의평가

62. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

2021. 9월 수능 모의평가

63. 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2021. 9월 수능 모의평가

64. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

2021. 9월 수능 모의평가

65. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

2021. 10월 학력평가

66. 두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 10월 학력평가

67. 함수 $f(x)=2x^2+ax+3$에 대하여 $x=2$에서의 미분계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2021. 10월 학력평가

68. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=12-4t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

2021. 11월 대학수학능력시험

69. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

2021. 11월 대학수학능력시험

70. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

2020. 3월 학력평가

71. 함수 $f(x)=(2x+3)(x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

72. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=9$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2020. 3월 학력평가

73. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

2020. 4월 학력평가

74. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$$

을 만족시킬 때, $f(3)+f'(3)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 4월 학력평가

75. 함수 $f(x)=x^4+3x^2+7x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

76. 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

2020. 6월 수능 모의평가

77. 곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선이 점 $(0, a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [3점]

2020. 7월 학력평가

78. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+a$의 극솟값이 -6일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020. 7월 학력평가

79. 곡선 $y=4x^3-5x+9$ 위의 점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

2020. 7월 학력평가

80. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$x=2t^3-kt^2$ (k는 상수)

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=k$에서의 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

81. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax+b & (x<1)\\ bx+4 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 9월 수능 모의평가

82. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at \ \ (a > 0)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 10월 학력평가

83. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 3$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$의 값은? [3점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

2020. 10월 학력평가

84. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + kt^2 + kt \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2020. 11월 대학수학능력시험

85. 함수 $f(x) = x^4 + 3x - 2$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

2020. 11월 대학수학능력시험

86. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ 위의 점 A$(0, 2)$에서의 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2023. 3월 학력평가

87. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = |f(x) - t|$라 할 때, $\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to 4+} h(t) = 5$

(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

2023. 3월 학력평가

88. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x^2 + p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다.

$f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? (단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2023. 4월 학력평가

89. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t) = M_1(t) + M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(2) = 32$

ㄴ. $g(t) = 2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim_{h \to 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \to 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 6월 수능 모의평가

90. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$

을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

2023. 7월 학력평가

91. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ -f(x) & (-3 \leq x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때
집합 $\{x \mid f(x)=0, x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면
$g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2023. 9월 수능 모의평가

92. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

2023. 9월 수능 모의평가

93. 두 실수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x \geq 0) \end{cases}$가 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$
④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

2023. 9월 수능 모의평가

94. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자.

$\lim_{x \to 3} g(x) = g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

2023. 10월 학력평가

95. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a\,(a \geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2023. 10월 학력평가

96. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x \leq 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
(나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 11월 대학수학능력시험

97. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

2023. 11월 대학수학능력시험

98. $a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=-x^3+ax^2+2x$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O(0, 0)에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{OA}\times\overline{AB}$의 값을 구하시오.[4점]

2023. 11월 대학수학능력시험

99. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.[4점]

2022. 3월 학력평가

100. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2022. 3월 학력평가

101. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

> (가) $x\ne 1$, $x\ne a$일 때, $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$이다.
> (나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

2022. 3월 학력평가

102. 두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022. 4월 학력평가

103. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t, 0)$, $(0, 2t)$, $(-t, 0)$, $(0, -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 4월 학력평가

104. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

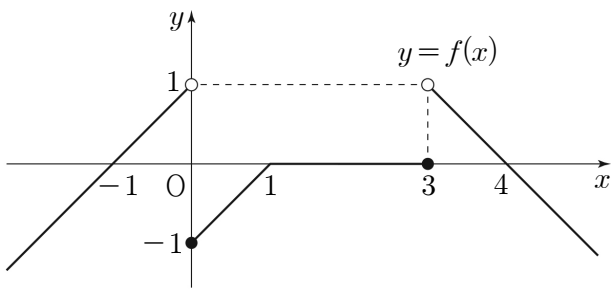
<보 기>

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



2020. 6월 수능 모의평가

105. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\ge g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 6월 수능 모의평가

106. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} (x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

2022. 7월 학력평가

107. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\dfrac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\ge -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

2022. 7월 학력평가

108. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,0)(k\ne 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

109. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.[4점]

2022. 10월 학력평가

110. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<4$에서 $f(x)=ax^2+bx-24$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

$1<x<10$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은? [4점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

111. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq -4x^2+x$이다.

2022. 10월 학력평가

112. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때, $g(t)=m_1-m_2$라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t\,|\,0\leq t\leq 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 11월 대학수학능력시험

113. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\leq x\leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 2+}g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022. 11월 대학수학능력시험

114. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

2022. 11월 대학수학능력시험

115. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.[4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

2021. 3월 학력평가

116. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2021. 3월 학력평가

117. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$

(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.

(다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2021. 4월 학력평가

118. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

119. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9a+a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 6월 수능 모의평가

120. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 6월 수능 모의평가

121. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 7월 학력평가

122. 삼차함수 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \frac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 9월 수능 모의평가

123. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)+|f(x)+x|=6x+k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

2021. 9월 수능 모의평가

124. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.[4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

2021. 10월 학력평가

125. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

2021. 10월 학력평가

126. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a^2\leq 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 10월 학력평가

127. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 11월 대학수학능력시험

128. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

2021. 11월 대학수학능력시험

129. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 3월 학력평가

130. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x,$$
$$g(x)=\begin{cases}-\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3} & (x<0)\\ 2mx+\frac{4}{m^3} & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\frac{1}{2}\right)=-5$이다.
ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.
ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 3월 학력평가

131. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은? [4점]

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

2020. 3월 학력평가

132. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

2020. 3월 학력평가

133. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2020. 3월 학력평가

134. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=-x^4-2x^3-x^2,\ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 x에 대하여 부등식
$$f(x)\le 12x+k\le g(x)$$
를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

2020. 4월 학력평가

135. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}b-f(x) & (x<3)\\ f(x) & (x\ge 3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

136. 양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
(나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\frac{5}{3}$이다. (단, $a>\frac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x\,|\,f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

137. 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2020. 6월 수능 모의평가

138. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

139. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,
삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le 0)\\ g(x) & (x>0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

2020. 9월 수능 모의평가

140. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)|\le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2020. 9월 수능 모의평가

141. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

2020. 9월 수능 모의평가

142. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x\,|\,x\ge 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 10월 학력평가

143. $f(1)=-2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$
(나) $g(0)=g'(0)$

$f'(1)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2020. 10월 학력평가

144. 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자. $a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 11월 대학수학능력시험

145. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020. 11월 대학수학능력시험

146. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

2020. 11월 대학수학능력시험

147. 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

2020. 11월 대학수학능력시험

148. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 06 다항함수의 적분법

2022. 10월 학력평가

1. $\int_0^3 (2x^3+3x^2)dx$의 값은?[2점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

2021. 7월 학력평가

2. $\int_0^1 (2x+3)dx$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

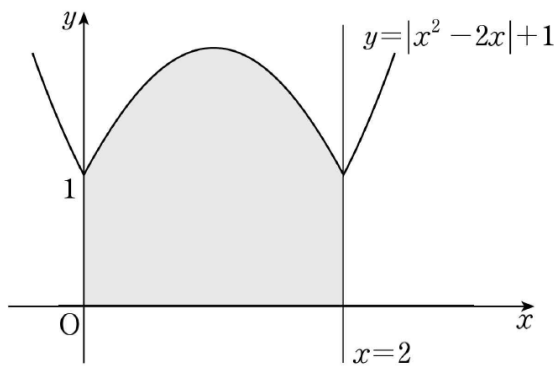
2020. 10월 학력평가

3. $\int_0^3 (x+1)^2dx$의 값은? [2점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

2023. 3월 학력평가

4. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

2023. 3월 학력평가

5. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3-ax+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2023. 6월 수능 모의평가

6. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 7월 학력평가

7. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a$ $(a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

2023. 7월 학력평가

8. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2-8x+1$이고 $f(1)=10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 9월 수능 모의평가

9. 다항함수 $f(x)$가 $f'(x)=6x^2-2f(1)x$, $f(0)=4$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?[3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2023. 9월 수능 모의평가

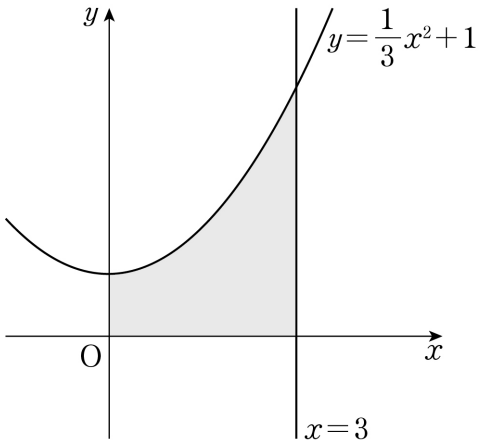
10. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.[3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

11. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2+1$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$



2023. 10월 학력평가

12. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=12t-12,\ v_2(t)=3t^2+2t-12$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

2023. 11월 대학수학능력시험

13. 다항함수 $f(x)$가 $f'(x)=3x(x-2)$, $f(1)=6$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 11월 대학수학능력시험

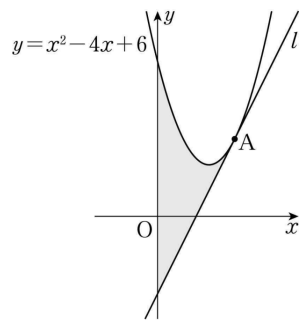
14. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2}f(x)dx$의 값은?[3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

2022. 3월 학력평가

15. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

2022. 3월 학력평가

16. $\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 7월 학력평가

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2022. 7월 학력평가

18. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

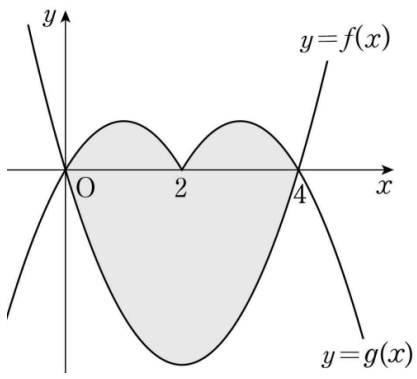
2022. 9월 수능 모의평가

19. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.[3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

20. 두 함수 $f(x)=x^2-4x$, $g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\geq 2)\end{cases}$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$ ④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16

2022. 10월 학력평가

21. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=4t^3-48t$이다. 시각 $t=k\,(k>0)$에서 점 P의 가속도가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.(단, k는 상수이다.) [3점]

2022. 11월 대학수학능력시험

22. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.[3점]

2021. 3월 학력평가

23. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=22$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

2021. 3월 학력평가

24. $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)dx$의 값은? [3점]

① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

2021. 6월 수능 모의평가

25. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 6월 수능 모의평가

26. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t+k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

2021. 11월 대학수학능력시험

27. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

2021. 11월 대학수학능력시험

28. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

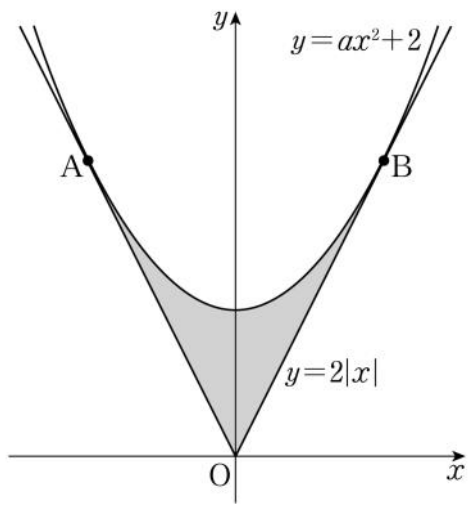
2020. 3월 학력평가

29. $\int_{1}^{3}(4x^3-6x+4)dx+\int_{1}^{3}(6x-1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

30. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

2020. 3월 학력평가

31. $\int_5^2 2t\,dt-\int_5^0 2t\,dt$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2020. 4월 학력평가

32. $\int_0^1 (3x^2+2)dx$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

33. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=4x^3+4x+1$이다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 6월 수능 모의평가

34. 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2020. 6월 수능 모의평가

35. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x^3+x,\ f(0)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

2023. 3월 학력평가

36. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$

(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\geq 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2023. 3월 학력평가

37. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.

ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2023. 4월 학력평가

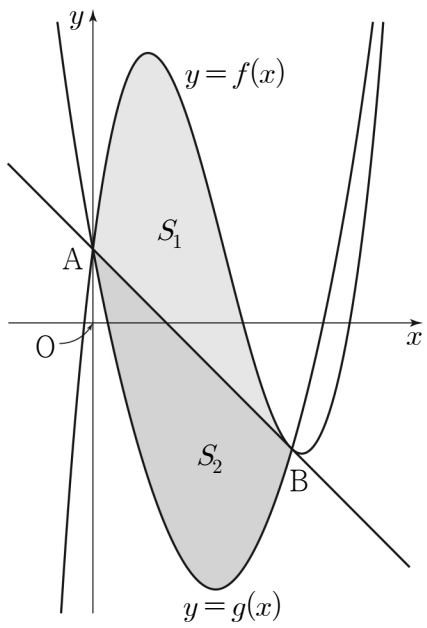
38. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 4월 학력평가

39. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 A$(0, 1)$, 점 B$(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

2023. 4월 학력평가

40. 두 상수 a, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\int_0^x(-t+a)dt$이고
$|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.

(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

2023. 6월 수능 모의평가

41. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

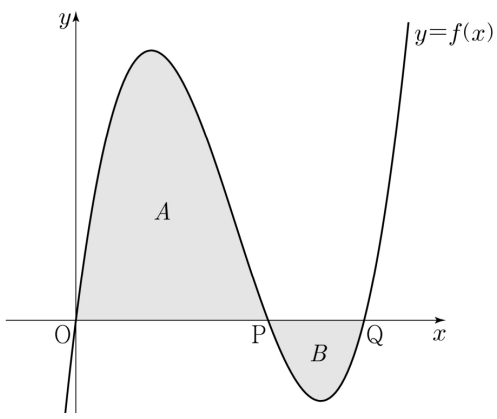
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{OP}<\overline{OQ})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)$=3$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



2023. 6월 수능 모의평가

42. 실수 a $(a\geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

2023. 6월 수능 모의평가

43. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이고
$|g(x)|\geq |g(3)|$이다.

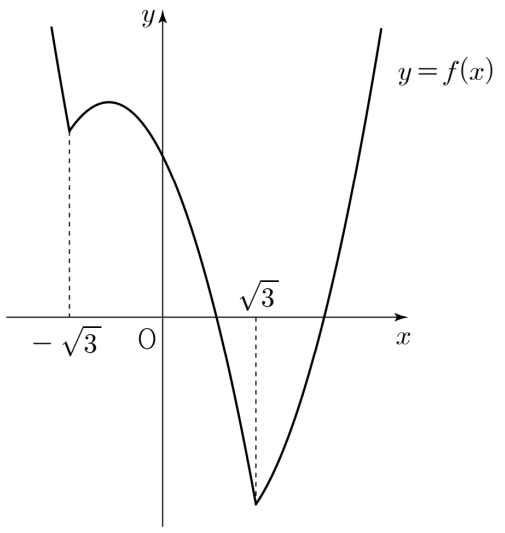
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

44. 실수 t $\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



2023. 7월 학력평가

45. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$이다.

(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=12$

$f(4)$의 값은? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

2023. 7월 학력평가

46. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}|f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\{f(u)-ku\}du\geq 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

2023. 9월 수능 모의평가

47. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때, 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도는 각각 $v_1(t)=3t^2+4t-7$, $v_2(t)=2t+4$이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는?[4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

2023. 9월 수능 모의평가

48. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} f(t)dt=xf(x)-2x^2-1$

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_{1}^{3} g(x)dx$의 값을 구하시오.

2023. 10월 학력평가

49. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_{4}^{n} f(x)\,dx\geq 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(2)<0$

ㄴ. $\int_{4}^{3} f(x)\,dx>\int_{4}^{2} f(x)\,dx$

ㄷ. $6\leq\int_{4}^{6} f(x)\,dx\leq 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2023. 10월 학력평가

50. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_{0}^{x}(x-t)\{f(x)+f(t)\}\,dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 11월 대학수학능력시험

51. 시각 $t=0$일 때, 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=t^2-6t+5$, $v_2(t)=2t-7$이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는?(단, $0<a<b$)[4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

2023. 11월 대학수학능력시험

52. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\ (0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?[4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

2022. 3월 학력평가

53. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

2022. 3월 학력평가

54. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 4월 학력평가

55. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3(t-2)(t-a)\ (a>2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은? [4점]

① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

2022. 4월 학력평가

56. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=3$$

을 만족시킬 때, $\int_{1}^{2}(4x+1)f(x)dx$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

2022. 4월 학력평가

57. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

58. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

59. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x<0)\\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 6월 수능 모의평가

60. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 7월 학력평가

61. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

2022. 7월 학력평가

62. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x+2) & (x<0)\\ \displaystyle\int_0^x tf(t)dt & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2022. 7월 학력평가

63. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\displaystyle\int_0^3|f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

64. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022. 9월 수능 모의평가

65. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30\times S$의 값을 구하시오.[4점]

2022. 10월 학력평가

66. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $xf'(x)-3f(x)=2x^2-8x$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

67. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\int_t^x f(s)ds=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

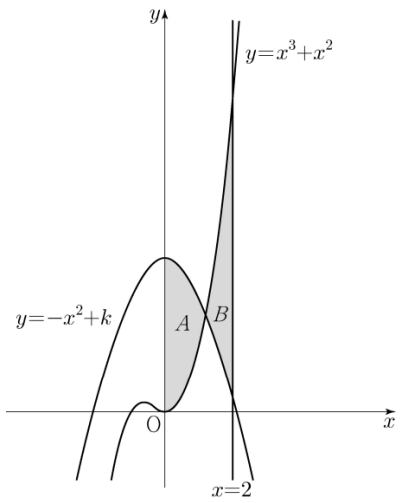
<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022. 11월 대학수학능력시험

68. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. A=B일 때, 상수 k의 값은?(단, $4<k<5$)[4점]



① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

2022. 11월 대학수학능력시험

69. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다..
(단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$가 $x=2$에서 최솟값은 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$의 값은?[4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2022. 11월 대학수학능력시험

70. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

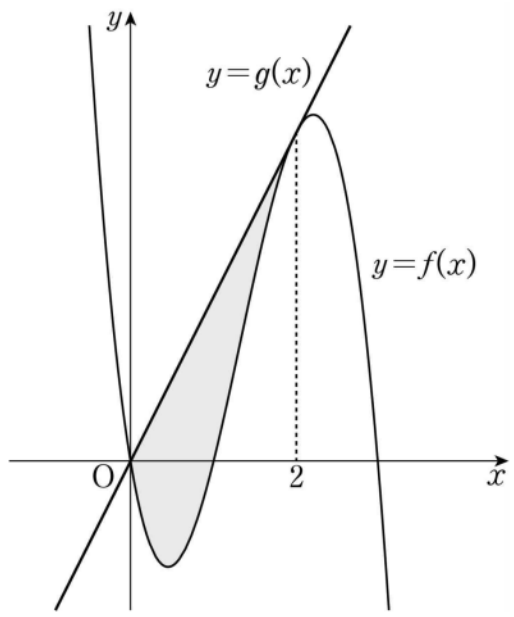
(가) $0\le t\le 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\ge 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.[4점]

2021. 3월 학력평가

71. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



2021. 3월 학력평가

72. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

73. 두 양수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

2021. 4월 학력평가

74. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_2^x (t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
(나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

2021. 6월 수능 모의평가

75. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

2021. 6월 수능 모의평가

76. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

2021. 7월 학력평가

77. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021. 7월 학력평가

78. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, β $(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

2021. 9월 수능 모의평가

79. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=-4t^3+12t^2$이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는?(단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

2021. 9월 수능 모의평가

80. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$를 만족시킨다.

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

81. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022. 10월 학력평가

82. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt+5 & (x<c) \\ \left| \displaystyle\int_0^x f(t)dt-\frac{13}{3} \right| & (x\ge c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은? [4점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

2022. 10월 학력평가

83. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 11월 대학수학능력시험

84. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여 $x(t)=t(t-1)(at+b)$ $(a\ne 0)$이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$
ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.
ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021. 11월 대학수학능력시험

85. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 3월 학력평가

86. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3-4x\int_0^1 |f(t)|dt$$

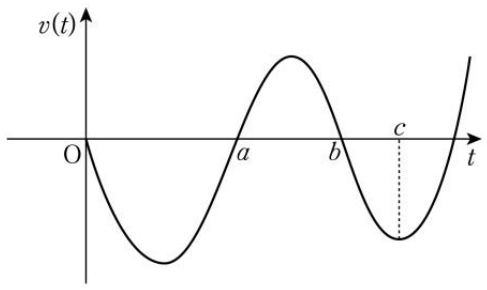
를 만족시킨다. $f(1)>0$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

87. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -6이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$일 때, 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2020. 3월 학력평가

88. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다. $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 3월 학력평가

89. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$의 값은? [4점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

2020. 3월 학력평가

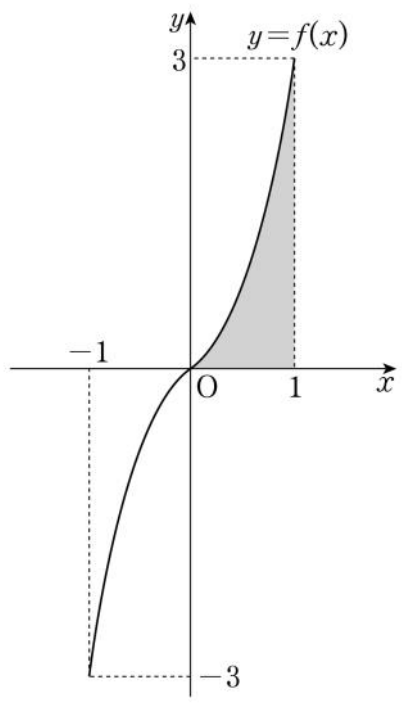
90. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-12t+9$이다. 점 P가 $t=0$일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A라 하자. 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오. [4점]

2020. 3월 학력평가

91. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
(나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



2020. 4월 학력평가

92. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

93. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 8$$

일 때, $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

94. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 5$$

이다. 시각 $t = 3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t = 0$에서 점 P의 위치는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2020. 6월 수능 모의평가

95. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + x\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 07 경우의 수

2023. 3월 학력평가

1. ${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\Pi_2$의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

2023. 4월 학력평가

2. ${}_3\Pi_2+{}_2\mathrm{H}_3$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

2023. 6월 수능 모의평가

3. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

2023. 7월 학력평가

4. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^8의 계수는? [2점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

2023. 11월 대학수학능력시험

5. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?[2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

2022. 3월 학력평가

6. ${}_3\Pi_4$의 값은? [2점]

① 63 ② 69 ③ 75 ④ 81 ⑤ 87

2022. 4월 학력평가

7. ${}_n\mathrm{H}_2={}_9\mathrm{C}_2$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2022. 6월 수능 모의평가

8. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

2022. 7월 학력평가

9. 다항식 $(4x+1)^6$의 전개식에서 x의 계수는? [2점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

2022. 9월 수능 모의평가

10. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는?[2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

2022. 11월 대학수학능력시험

11. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는?[2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

2021. 3월 학력평가

12. ${}_3\mathrm{H}_6$의 값은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

2021. 4월 학력평가

13. ${}_n\Pi_2=25$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 6월 수능 모의평가

14. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 11월 대학수학능력시험

15. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

2020. 10월 학력평가

16. ${}_4\Pi_2+{}_4H_2$의 값은? [2점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

2023. 3월 학력평가

17. 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

2023. 3월 학력평가

18. 문자 A, A, A, B, B, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝 모두에 B가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]



① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

2023. 3월 학력평가

19. 서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

2023. 3월 학력평가

20. 방정식 $a+b+c+3d=10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

2023. 4월 학력평가

21. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=5,\ A\cap B=\varnothing$$

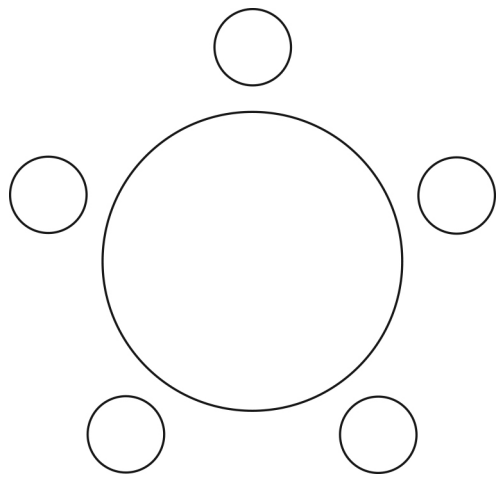
을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 168 ② 174 ③ 180 ④ 186 ⑤ 192

2023. 4월 학력평가

22. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168



2023. 4월 학력평가

23. 방정식 $3x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

2023. 4월 학력평가

24. 양수 a에 대하여 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1일 때, $\frac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 70 ② 140 ③ 210 ④ 280 ⑤ 350

2023. 6월 수능 모의평가

25. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

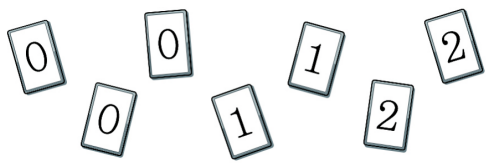
① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

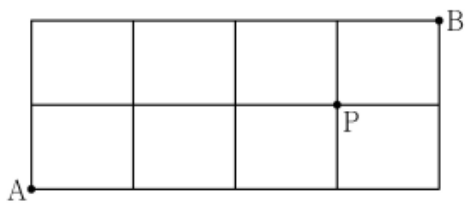
26. 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18



2023. 9월 수능 모의평가

27. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 10월 학력평가

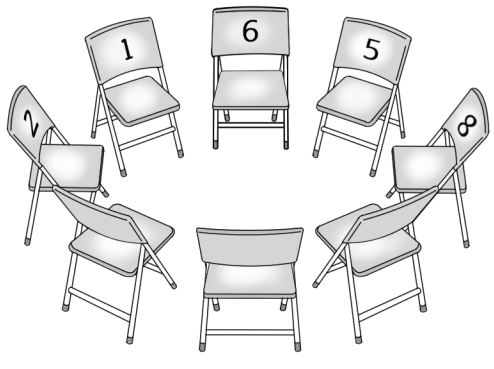
28. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7 이하인 자연수의 개수는? [3점]

① 45 ② 47 ③ 49 ④ 51 ⑤ 53

2023. 10월 학력평가

29. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 의자가 있다. 이 8개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 두 수가 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



2022. 3월 학력평가

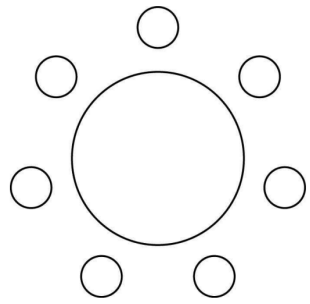
30. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

2022. 3월 학력평가

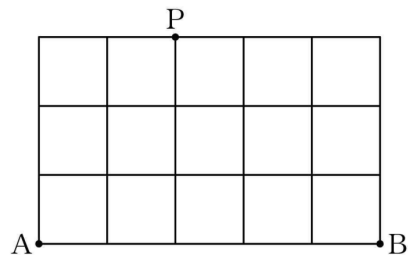
31. A학교 학생 5명, B학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480



2022. 3월 학력평가

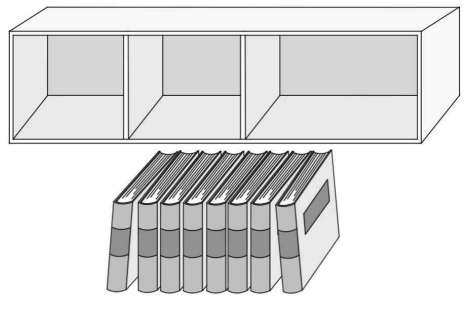
32. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난도로를 다시 지날 수 있다.) [3점]



① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

2022. 3월 학력평가

33. 그림과 같이 같은 종류의 책 8권과 이 책을 각 칸에 최대 5권, 5권, 8권을 꽂을 수 있는 3개의 칸으로 이루어진 책장이 있다. 이 책 8권을 책장에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는? (단, 비어 있는 칸이 있을 수 있다.) [3점]



① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 4월 학력평가

34. 3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같을 때, n의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2022. 4월 학력평가

35. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는? [3점]

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x \times f(x) \leq 10$이다.

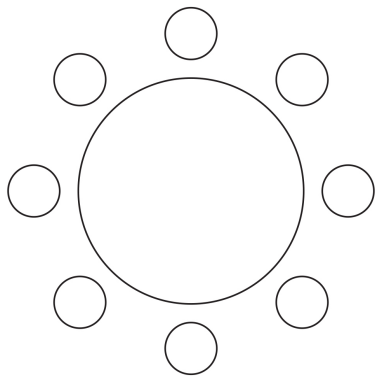
① 102 ② 105 ③ 108 ④ 111 ⑤ 114

2022. 4월 학력평가

36. 학생 A를 포함한 4명의 1학년 학생과 학생 B를 포함한 4명의 2학년 학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

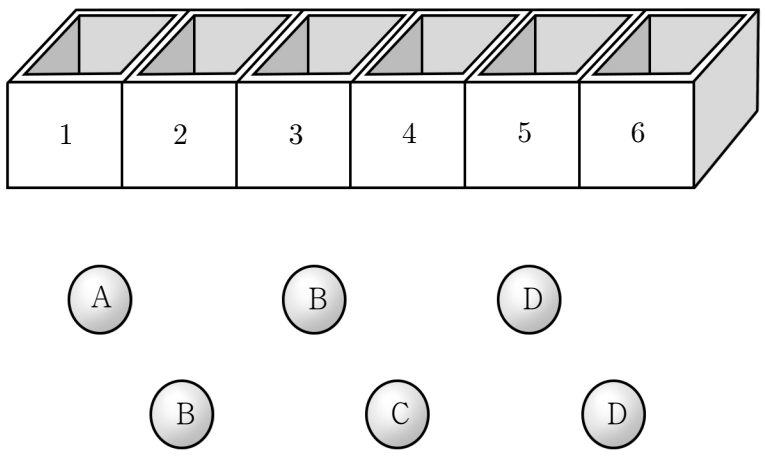
(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다. (나) A와 B는 이웃한다.

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72



2022. 4월 학력평가

37. 그림과 같이 A, B, B, C, D, D의 문자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 개의 공만 들어가도록 6개의 공을 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

(가) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공은 문자 A 또는 문자 B가 적힌 공이다. (나) 문자 B가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수 중 적어도 하나는 문자 C가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수보다 작다.

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

2022. 6월 수능 모의평가

38. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022. 6월 수능 모의평가

39. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다. (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

2022. 7월 학력평가

40. 세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 135 ② 140 ③ 145 ④ 150 ⑤ 155

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

41. 다항식 $(x^2+1)(x-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

2022. 10월 학력평가

42. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

(가) $a\times b\times c\times d=8$	(나) $a+b+c+d<10$

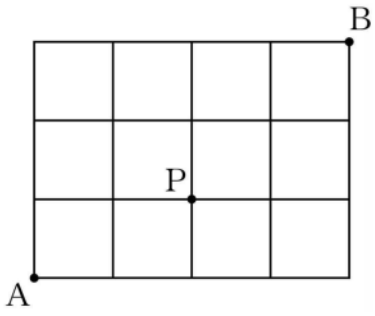
① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2022. 11월 대학수학능력시험

43. 숫자 1, 2, 3, 4, 5중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는?[3점]

2021. 3월 학력평가

44. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

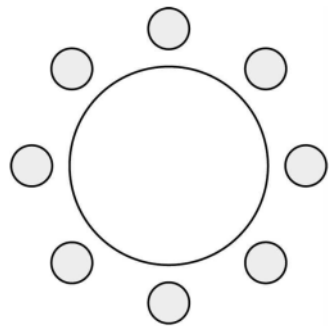


① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2021. 3월 학력평가

45. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108



2021. 3월 학력평가

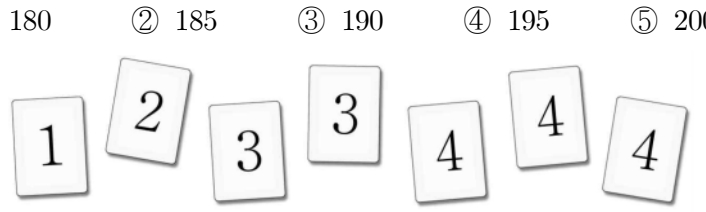
46. 같은 종류의 연필 6자루와 같은 종류의 지우개 5개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

2021. 3월 학력평가

47. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



2021. 4월 학력평가

48. 다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 640일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

49. 빨간색 볼펜 5자루와 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루로 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 560 ② 570 ③ 580 ④ 590 ⑤ 600

2021. 4월 학력평가

50. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 N의 개수는? [3점]

(가) N은 홀수이다. (나) $10000 < N < 30000$

① 720 ② 730 ③ 740 ④ 750 ⑤ 760

2021. 4월 학력평가

51. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}C_{2k}$일 때, $f(n)=1023$을 만족시키는 n의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2021. 6월 수능 모의평가

52. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

2021. 7월 학력평가

53. 다항식 $(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 88 ⑤ 92

2021. 7월 학력평가

54. 3개의 문자 A, B, C를 포함한 서로 다른 6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 두 문자 B와 C 사이에 문자 A를 포함하여 1개 이상의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

2021. 9월 수능 모의평가

55. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 10월 학력평가

56. 같은 종류의 공책 10권을 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 줄 때, A와 B가 각각 2권 이상의 공책을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 88 ⑤ 92

2021. 11월 대학수학능력시험

57. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$ (나) $\lvert a^2-b^2 \rvert=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

2020. 3월 학력평가

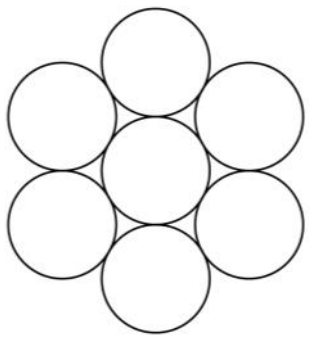
58. 흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열할 때, 흰 공은 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 295 ② 300 ③ 305 ④ 310 ⑤ 315

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

59. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 7개의 원이 있다.



7개의 원에 서로 다른 7개의 색을 모두 사용하여 색칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 원에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

2020. 4월 학력평가

60. 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 나열할 때, a끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

2020. 4월 학력평가

61. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2(x-2)^5$의 전개식에서 x의 계수는? [3점]

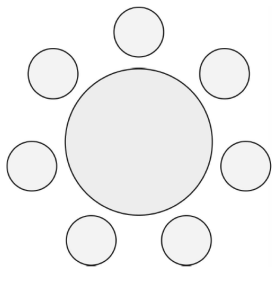
① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

2020. 4월 학력평가

62. ${}_6\Pi_2+{}_2H_6$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

63. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



2020. 4월 학력평가

64. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는? [3점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

2020. 4월 학력평가

65. 방정식 $x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

2020. 6월 수능 모의평가

66. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

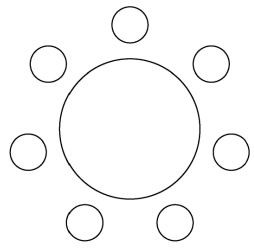
2020. 6월 수능 모의평가

67. 다항식 $(1+2x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

2020. 6월 수능 모의평가

68. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 96 ② 100 ③ 104 ④ 108 ⑤ 112

2020. 7월 학력평가

69. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하시오. [3점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

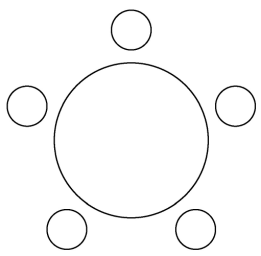
2020. 7월 학력평가

70. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① 36 ② 44 ③ 52 ④ 60 ⑤ 68

2020. 9월 수능 모의평가

71. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

2020. 9월 수능 모의평가

72. $\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

2020. 10월 학력평가

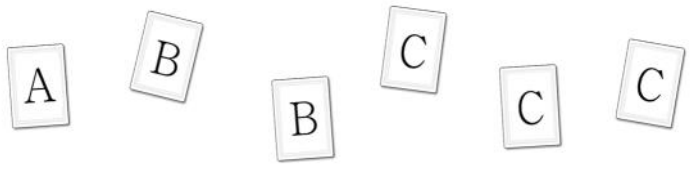
73. $\left(2x+\frac{a}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^3의 계수가 42일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2020. 10월 학력평가

74. A, B, B, C, C, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드 중에서 5장의 카드를 택하여 이 5장의 카드를 왼쪽부터 모두 일렬로 나열할 때, C가 적힌 카드가 왼쪽에서 두 번째의 위치에 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32



2020. 10월 학력평가

75. ${}_4C_0+{}_4C_1\times3+{}_4C_2\times3^2+{}_4C_3\times3^3+{}_4C_4\times3^4$의 값은? [3점]

① 240 ② 244 ③ 248 ④ 252 ⑤ 256

2020. 11월 대학수학능력시험

76. $\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

2020. 11월 대학수학능력시험

77. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수는? [3점]

$f(2)\le f(3)\le f(4)$

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

2023. 3월 학력평가

78. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다. (나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540

2023. 3월 학력평가

79. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다. (나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 3월 학력평가

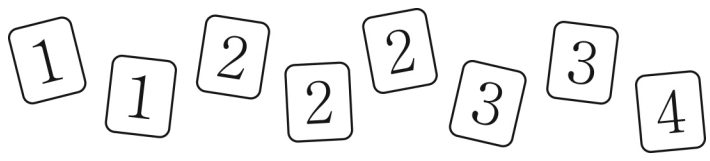
80. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(2) \neq 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

2023. 4월 학력평가

81. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280



2023. 4월 학력평가

82. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$
(나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

2023. 4월 학력평가

83. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, *baaacca*, *ccbbaaa*는 조건을 만족시키는 문자열이고 *aabbcca*, *aaabccc*, *ccbaaaa*는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

2023. 6월 수능 모의평가

84. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

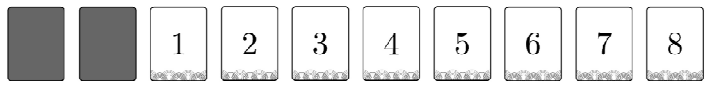
(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2) < f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

2023. 6월 수능 모의평가

85. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



2023. 7월 학력평가

86. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(7)-f(1)=3$
(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.
(다) $\frac{1}{3}|f(2)-f(1)|$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

2023. 9월 수능 모의평가

87. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le d$
(나) $a \times d$ 는 홀수이고, $b+c$ 는 짝수이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

88. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le 8$
(나) $(a-b)(b-c)=0$

2023. 11월 대학수학능력시험

89. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.[4점]

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

2022. 3월 학력평가

90. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

2022. 3월 학력평가

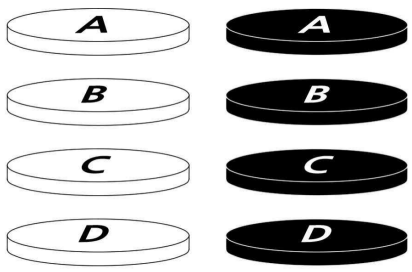
91. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$
(나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

2022. 3월 학력평가

92. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
(나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



2022. 4월 학력평가

93. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) $|a-b+c-d+e| \le 2$

① 359 ② 363 ③ 367 ④ 371 ⑤ 375

2022. 4월 학력평가

94. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

2022. 4월 학력평가

95. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

96. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1)\le f(3)\le f(5)$

2022. 7월 학력평가

97. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값은 자연수이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

① 84 ② 87 ③ 90 ④ 93 ⑤ 96

2022. 9월 수능 모의평가

98. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X\to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.[4점]

(가) $n(A)\le 3$
(나) $n(A)=n(B)$
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\ne x$이다.

2022. 10월 학력평가

99. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) $f(1)\le 3$
(다) $f(3)\le f(1)+4$

2022. 11월 대학수학능력시험

100. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수를 구하시오.[4점]

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\le f(x+1)$이다.
(나) $1\le x\le 5$일 때, $f(x)\le x$이고, $6\le x\le 10$일 때, $f(x)\ge x$
(다) $f(6)=f(5)+6$

2021. 3월 학력평가

101. 두 집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2)<f(3)<f(4)$
(나) $f(1)>f(3)>f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

2021. 3월 학력평가

102. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a\le b+1\le c\le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

2021. 3월 학력평가

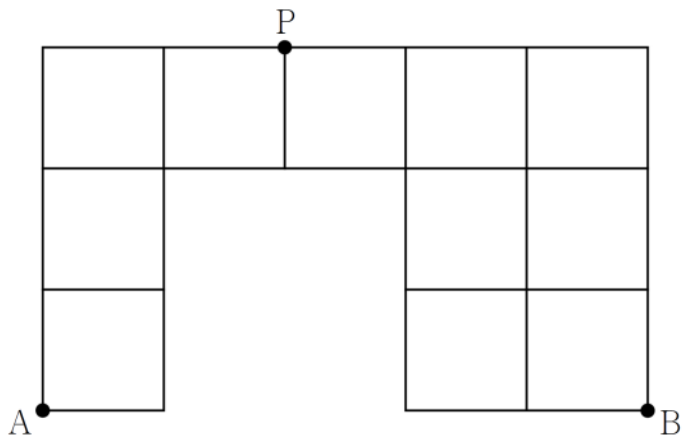
103. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

104. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]

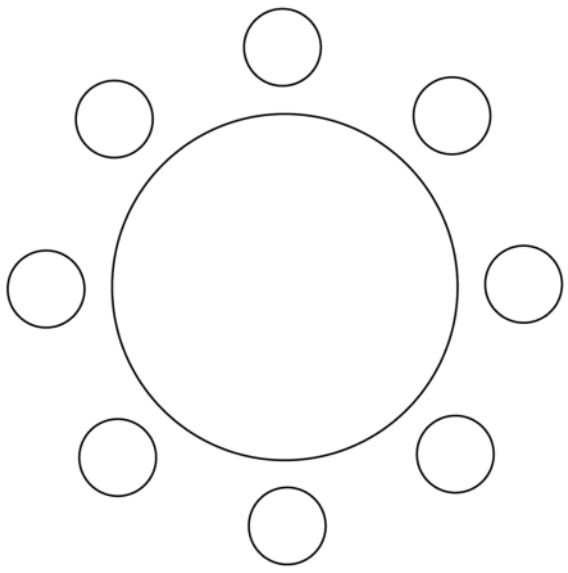


① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

2021. 4월 학력평가

105. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



2021. 4월 학력평가

106. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x_1+x_2+x_3+x_4=34$
(나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

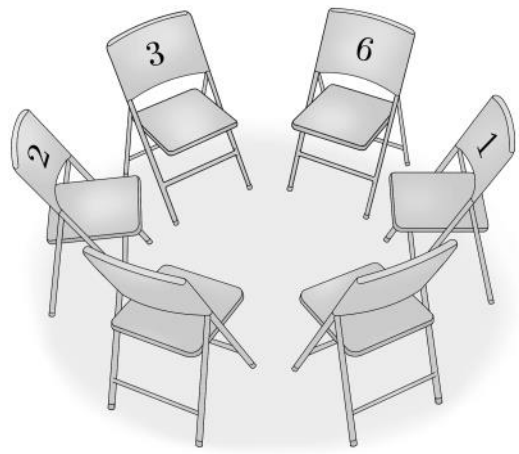
2021. 6월 수능 모의평가

107. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

2021. 6월 수능 모의평가

108. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



2021. 7월 학력평가

109. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다.
(나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다.
(다) 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

2021. 9월 수능 모의평가

110. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

111. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

2021. 10월 학력평가

112. 숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

2021. 11월 대학수학능력시험

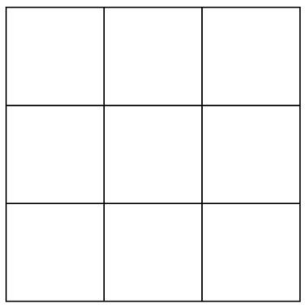
113. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, \}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

2020. 3월 학력평가

114. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

(가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

2020. 3월 학력평가

115. 세 숫자 1, 2, 3 만을 사용하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 세 숫자 1, 2, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하고 숫자 2를 반드시 짝수 번째 자리에만 오도록 놓는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음은 이것을 구하는 과정의 일부이다.

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는
세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.
(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우
2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는
1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로
그 경우의 수는 [(가)] 이다.
2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1$이다.
그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 [(나)] 이다.
(ii) 숫자 2를 두 번 사용한 경우
⋮ (중략)
(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에
1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 나열한 것이므로
그 경우의 수는 [(다)] 이다.
따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는 290이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 262 ② 267 ③ 272 ④ 277 ⑤ 282

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

116. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

○ $n(A)\geq 3$ ○ 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수이다. ○ $n(A)>n(B)$

다음은 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

(ⅰ) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ 이다. $A=\{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ 이다. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우 함수 f의 개수는 [(가)]이고 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우 함수 f의 개수는 [(나)] 이므로 $n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는 $4\times(3\times$[(가)]$+3\times$[(나)]$)$이다. (ⅱ) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우 $n(B)<4$를 만족시키는 함수 f의 개수는 [(다)]이다. (ⅲ) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $4\times(3\times$[(가)]$+3\times$[(나)]$)+$[(다)]이다.

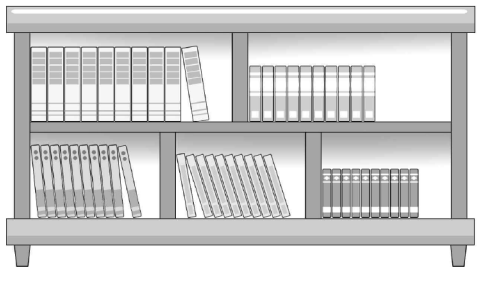
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 164 ② 168 ③ 172 ④ 176 ⑤ 180

2020. 4월 학력평가

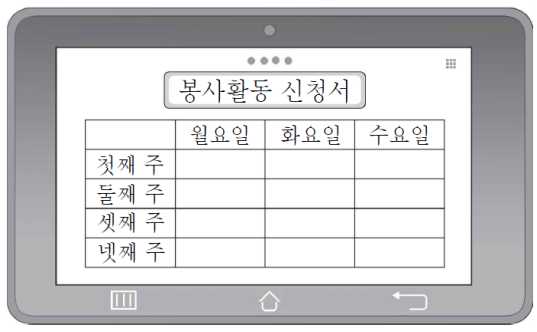
117. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다. (나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다. (다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



2020. 4월 학력평가

118. 매주 월요일부터 수요일까지 총 4주에 걸쳐 서로 다른 세 종류의 봉사활동 A, B, C를 반드시 하루에 한 종류씩 다음 규칙에 따라 신청하려고 한다.



○ 봉사활동 A, B, C를 각각 3회, 3회, 6회 신청한다. ○ 첫째 주에는 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한다. ○ 같은 요일에는 두 종류 이상의 봉사활동을 신청한다.

다음은 봉사활동을 신청하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한 후 '(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우'에서 '(ⅱ) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우'를 제외하면 된다. 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청하는 경우의 수는 3!이다. (ⅰ)의 경우 : 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 [(가)]이다. (ⅱ)의 경우 : 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 [(나)]이다. (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는 3!$\times$([(가)] $-$ [(나)])이다.

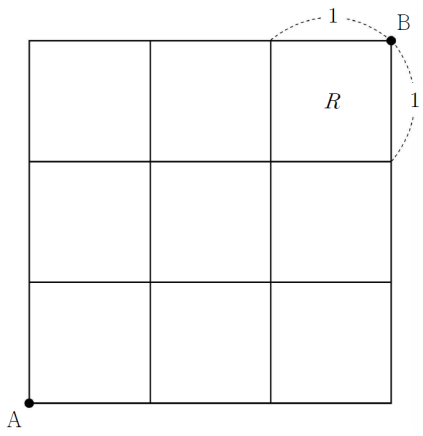
위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 825 ② 832 ③ 839 ④ 846 ⑤ 853

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 4월 학력평가

119. 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

2020. 6월 수능 모의평

120. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점])

2020. 6월 수능 모의평가

121. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 0이다.

2020. 6월 수능 모의평가

122. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p이다. $120p$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1)\times f(2)\geq 9$
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

2020. 7월 학력평가

123. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$이다.

2020. 7월 학력평가

124. 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 3개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

2020. 9월 수능 모의평가

125. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

126. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

2020. 10월 학력평가

127. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=14$
(나) $(a-2)(b-2)(c-2)\neq 0$

2020. 11월 대학수학능력시험

128. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.(단, 같은 색 모자끼리 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4이상이다.
(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명 뿐이다.

2020. 11월 대학수학능력시험

129. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다.

이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.

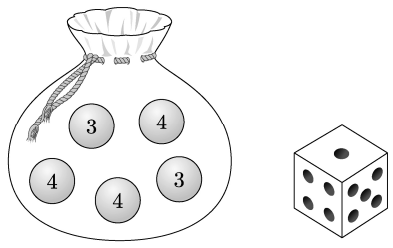
① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

2020. 11월 대학수학능력시험

130. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 08 확률

2021. 7월 학력평가

1. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$P(A)=\frac{1}{12},\ P(A\cup B)=\frac{11}{12}$$

일 때, $P(B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2020. 9월 수능 모의평가

2. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{4}{5},\ P(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $P(B|A)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2023. 6월 수능 모의평가

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A\cap B^C)=\frac{1}{9},\ P(B^C)=\frac{7}{18}$$

일 때, $P(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

2023. 6월 수능 모의평가

4. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

2023. 6월 수능 모의평가

5. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\le 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2023. 7월 학력평가

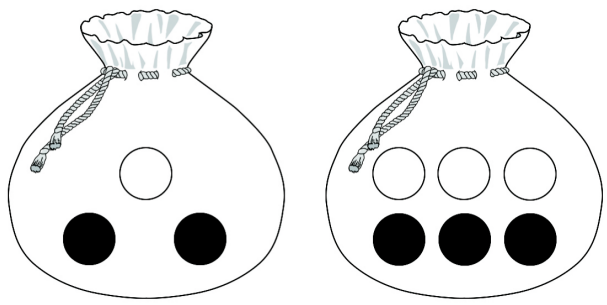
6. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 27의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

2023. 7월 학력평가

7. 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{92}{105}$ ③ $\frac{94}{105}$ ④ $\frac{32}{35}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



2023. 9월 수능 모의평가

8. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B^c 은 서로 배반사건이고 $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$, $P(A)+P(B)=\frac{7}{10}$ 일 때, $P(A^c\cap B)$ 의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2023. 9월 수능 모의평가

9. 두 집합 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

(가) $f(2)=2$
(나) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

10. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이고

$$P(A\cup B)=\frac{5}{6},\ P(A^C)=\frac{3}{4}$$

일 때, $P(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2023. 11월 대학수학능력시험

11. 두 사건 A, B는 서로 독립이고 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$,

$P(A^c)=2P(A)$일 때, P(B)의 값은?(단, A^c은 A의 여사건이다.)[3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

2023. 11월 대학수학능력시험

12. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열 할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10이하가 되도록 카드가 놓일 확률은?[3점]

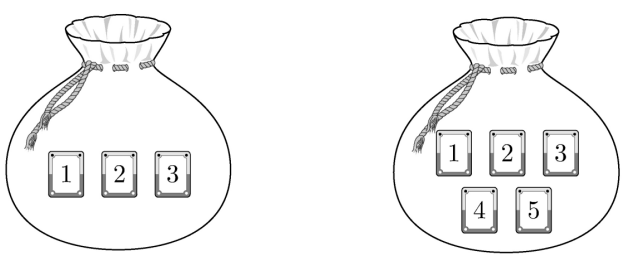


① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

2022. 6월 수능 모의평가

13. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



A B

2022. 6월 수능 모의평가

14. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

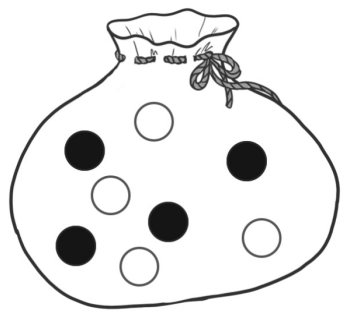
이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

2022. 7월 학력평가

15. 흰 공 4개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{51}{70}$ ③ $\frac{53}{70}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{57}{70}$



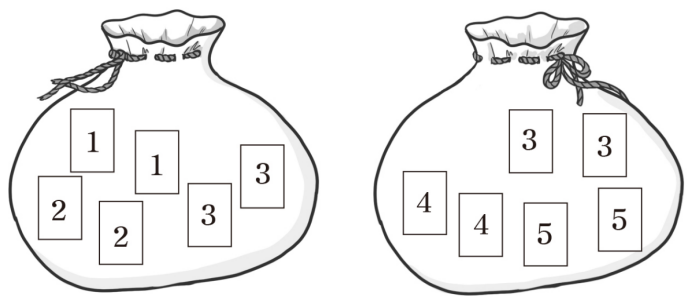
2022. 7월 학력평가

16. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고, 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이면 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{31}{120}$ ④ $\frac{17}{60}$ ⑤ $\frac{37}{120}$



A B

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

17. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A\cup B)=1,\quad P(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad P(A|B)=P(B|A)$$

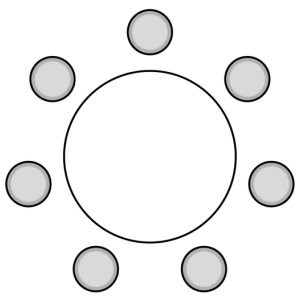
일 때, $P(A)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2022. 9월 수능 모의평가

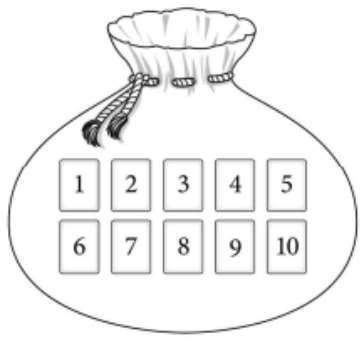
18. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



2022. 10월 학력평가

19. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 4장을 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. $a_1\times a_2$의 값이 홀수이고, $a_3+a_4\geq 16$일 확률은? [3점]



① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

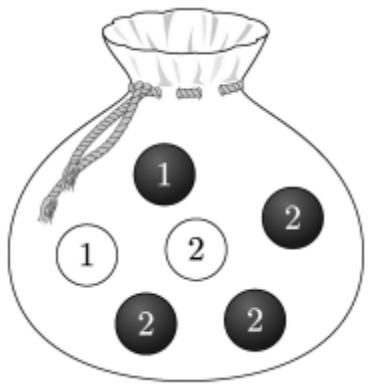
2022. 11월 대학수학능력시험

20. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 잇는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은?[3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

2022. 11월 대학수학능력시험

21. 주머니에 1이 적힌 흰 공1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, P(A∪B)의 값은?[3점]



① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2021. 6월 수능 모의평가

22. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2021. 6월 수능 모의평가

23. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

2021. 6월 수능 모의평가

24. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 7월 학력평가

25. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$가 성립할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

2021. 9월 수능 모의평가

26. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a\times b>31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

2021. 9월 수능 모의평가

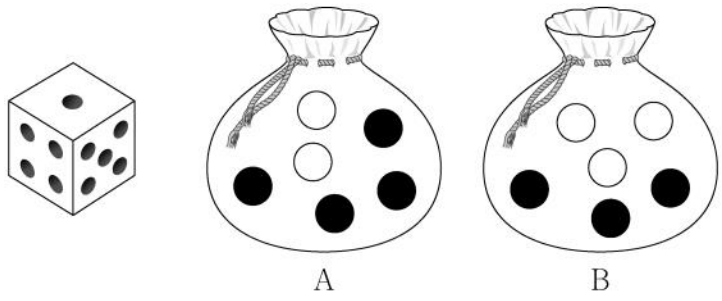
27. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다.

두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



2021. 10월 학력평가

28. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2021. 10월 학력평가

29. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 두 수 a, b의 최대공약수가 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2021. 11월 대학수학능력시험

30. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7이상일 확률은? [3점]



① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

2020. 6월 수능 모의평가

31. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

2020. 6월 수능 모의평가

32. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

2020. 7월 학력평가

33. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{16}{25}$ ② $\frac{17}{25}$ ③ $\frac{18}{25}$ ④ $\frac{19}{25}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 7월 학력평가

34. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2020. 7월 학력평가

35. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{12},\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2020. 7월 학력평가

36. 어느 고등학교 학생 200명을 대상으로 휴대폰 요금제에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 200명의 학생은 휴대폰 요금제 A와 B중 하나를 선택하였고, 각각의 휴대폰 요금제를 선택한 학생의 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	휴대폰 요금제 A	휴대폰 요금제 B
남학생	$10a$	b
여학생	$48-2a$	$b-8$

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 휴대폰 요금제 A를 선택한 학생일 확률은 $\frac{5}{8}$이다. $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

2020. 9월 수능 모의평가

37. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 4, 6, 8, 10 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $1<\frac{b}{a}<4$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2020. 10월 학력평가

38. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

2020. 10월 학력평가

39. 표와 같이 두 주머니 A, B에 흰 공과 검은 공이 섞여서 각각 50개씩 들어 있다.

(단위 : 개)

	주머니 A	주머니 B
흰 공	21	14
검은 공	29	36
합계	50	50

두 주머니 A, B 중 임의로 택한 1개의 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공이 흰 공일 때, 이 공이 주머니 A에서 꺼낸 공일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

2020. 10월 학력평가

40. 한 개의 동전을 6번 던져서 앞면이 2번 이상 나올 확률은? [3점]

① $\frac{51}{64}$ ② $\frac{53}{64}$ ③ $\frac{55}{64}$ ④ $\frac{57}{64}$ ⑤ $\frac{59}{64}$

2020. 11월 대학수학능력시험

41. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

2020. 11월 대학수학능력시험

42. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B}),\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{9}$$

일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A})$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

2020. 11월 대학수학능력시험

43. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a\times b\times c=4$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{54}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{27}$ ④ $\frac{5}{108}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

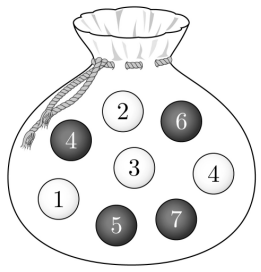
꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 6월 수능 모의평가

44. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고, 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

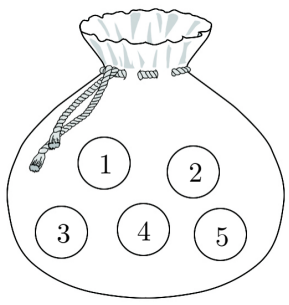
이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2023. 7월 학력평가

45. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 n $(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 k $(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1+a_2=a_4+a_5$일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{4}{19}$ ② $\frac{5}{19}$ ③ $\frac{6}{19}$ ④ $\frac{7}{19}$ ⑤ $\frac{8}{19}$



2023. 9월 수능 모의평가

46. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2 이면 카드를 한 번 뒤집고, 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

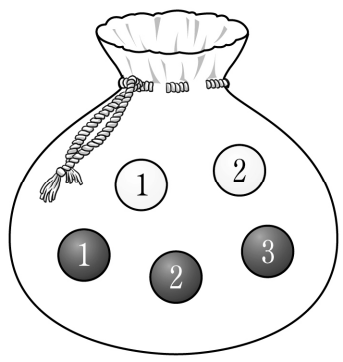
처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128 \times p$ 의 값을 구하시오. [4점]

2023. 10월 학력평가

47. 주머니에 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공 중 임의로 1개의 공을 주머니에 다시 넣고,
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않는다.

이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

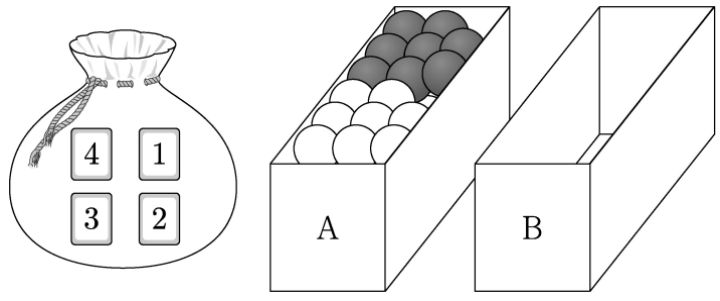


2023. 11월 대학수학능력시험

48. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어있다. 이 주머니와 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
> 확인한 수가 1이면 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고
> 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
> 확인한 수가 4이면 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은?[4점]



① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 6월 수능 모의평가

49. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

2022. 6월 수능 모의평가

50. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022. 7월 학력평가

51. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n(1 \leq n \leq 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3 > a_4+a_5+a_6$일 때, $a_1=a_4=1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

52. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은?[4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

2022. 10월 학력평가

53. 주머니 A에 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어있고, 주머니 B에도 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있다. 한 개의 동전을 사용하여 [실행1]과 [실행2]를 순서대로 하려고 한다.

> [실행1]
> 한 개의 동전을 던져 앞면이 나오면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, 뒷면이 나오면 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣는다.
> [실행2]
> 주머니 B에서 임의로 5개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣는다.

[실행2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 때, [실행1]에서 주머니 B에 넣은 공 중 흰 공이 2개이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022. 11월 대학수학능력시험

54. 앞면에는 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

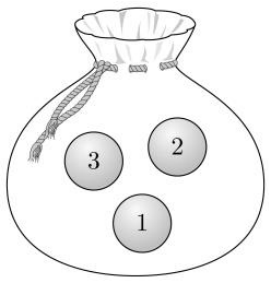
> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면
> k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

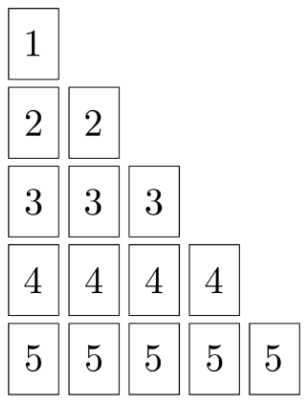
2021. 6월 수능 모의평가

55. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2021. 7월 학력평가

56. 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 카드가 각각 1장, 2장, 3장, 4장, 5장이 있다. 이 15장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하일 때, 그 두 수의 합이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2021. 10월 학력평가

57. 집합 $X=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f가 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$일 때, $f(1)=f(5)$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

2021. 11월 대학수학능력시험

58. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니가 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1\le n\le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5\ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1\le k\le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020. 6월 수능 모의평가

59. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> $f(1)\ge 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

2020. 6월 수능 모의평가

60. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

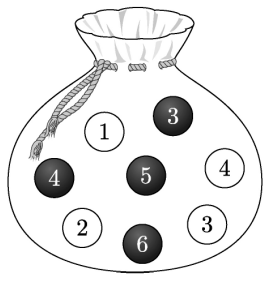
> (가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
> (나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

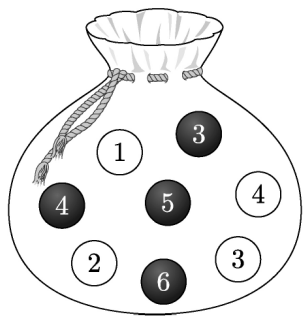
2020. 6월 수능 모의평가

61. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2020. 6월 수능 모의평가

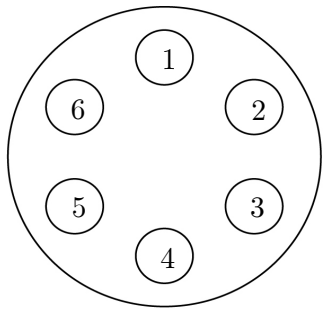
62. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은? [4점]



① $\frac{13}{29}$ ② $\frac{15}{29}$ ③ $\frac{17}{29}$ ④ $\frac{19}{29}$ ⑤ $\frac{21}{29}$

2020. 7월 학력평가

63. 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]



① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

2020. 9월 수능 모의평가

64. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고, 각 동아리는 1회만 발표한다.) [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

2020. 9월 수능 모의평가

65. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C라 할 때, $A \subset B \subset C$일 확률은? [4점]

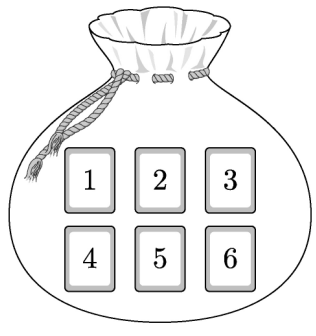
① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

2020. 9월 수능 모의평가

66. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x \mid a_1 \le x \le a_2\},\ B=\{x \mid b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \neq \varnothing$일 확률은? [4점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

67. 집합 $\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소의 개수가 4인 부분집합 중 임의로 하나의 집합을 택하여 X라 할 때, 집합 X가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

집합 X의 서로 다른 세 원소의 합은 항상 3의 배수가 아니다.

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2020. 10월 학력평가

68. A, B 두 사람이 각각 4개씩 공을 가지고 다음 시행을 한다.

A, B 두 사람이 주사위를 한 번씩 던져 나온 눈의 수가 짝수인 사람은 상대방으로부터 공을 한 개 받는다.

각 시행 후 A가 가진 공의 개수를 세었을 때, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 09 통계

2023. 9월 수능 모의평가

1. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{5}\right)$ 을 따를 때, $E(X)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 10월 학력평가

2. 확률변수 X가 이항분포 $B(45, p)$를 따르고 $E(X)=15$일 때, p의 값은? [2점]

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

2021. 9월 수능 모의평가

3. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $E(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

2021. 10월 학력평가

4. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(60, \frac{5}{12}\right)$를 따를 때, $E(X)$의 값은? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

2021. 11월 대학수학능력시험

5. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $V(2X)=40$일 때, n의 값은? [2점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

2022. 10월 학력평가

6. 표준편차가 12인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\sigma(\overline{X})$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 7월 학력평가

7. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	$a+b$	b	1

$E(X^2)=a+5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2023. 9월 수능 모의평가

8. 어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492
④ 0.7675 ⑤ 0.7881

2023. 10월 학력평가

9. 어느 지역에서 수확하는 양파의 무게는 평균이 m, 표준편차가 16인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 수확한 양파 64개를 임의추출하여 얻은 양파의 무게의 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $240.12 \le m \le a$이다. $\overline{x}+a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 486 ② 489 ③ 492 ④ 495 ⑤ 498

2023. 11월 대학수학능력시험

10. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산 확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $E(Y)$의 값은?[3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 11월 대학수학능력시험

11. 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의 추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은?(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)[3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

2022. 7월 학력평가

12. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $E(3X-1) = 17$일 때, $V(X)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

2022. 9월 수능 모의평가

13. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.)[3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

2020. 9월 수능 모의평가

14. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X) = E(X)$일 때, $E(X^2) + E(X)$의 값은? (단, $a > 1$)[3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

2022. 11월 대학수학능력시험

15. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은?(단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)[3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

2021. 7월 학력평가

16. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{3}{2}a$	1

$E(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2021. 9월 수능 모의평가

17. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
(나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $P(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $P(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.)[3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8413 ⑤ 0.9772

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 10월 학력평가

18. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8, 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(12, 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 a라 할 때, $\mathrm{P}(8 \le Y \le a)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1359 ② 0.1587 ③ 0.2417
④ 0.2857 ⑤ 0.3085

2021. 11월 대학수학능력시험

19. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의 추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의 추출하여 얻은 1회 충전 주행거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$이고 $a=c$일 때, $b-a$의 값은? (단, 주행거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80 ④ 11.76 ⑤ 13.72

2020. 7월 학력평가

20. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(2X-a)=\mathrm{V}(2X-a)$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

21. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 8$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$3\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=4\mathrm{P}(6 \le X \le 8)$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 6)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

2020. 9월 수능 모의평가

22. 어느 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자 중에서 임의 추출한 36명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 38시간 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.9332일 때, m의 값은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 38.25 ② 38.75 ③ 39.25 ④ 39.75 ⑤ 40.25

2020. 10월 학력평가

23. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 4인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(8)>f(14),\ f(2)<f(16)$$

을 만족시킨다. m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(X \le 6)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1525 ⑤ 0.1587

2020. 10월 학력평가

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(X)=200$일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 10월 학력평가

25. 어느 회사가 생산하는 약품 한 병의 무게는 평균이 mg, 표준편차가 1g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사가 생산한 약품 중 n병을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다. $100(b-a)=49$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

26. 어느 제과 공장에서 생산하는 과자 1상자의 무게는 평균이 104g, 표준편차가 4g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 과자 중 임의추출한 4상자의 무게의 표본평균이 ag 이상이고 106g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 0.5328이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 99 ② 100 ③ 101 ④ 102 ⑤ 103

2020. 10월 학력평가

27. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}(2X+1)=15$일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

2020. 11월 대학수학능력시험

28. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le \mathrm{X} \le 8)+\mathrm{P}(\mathrm{Y} \ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(\mathrm{Y} \le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

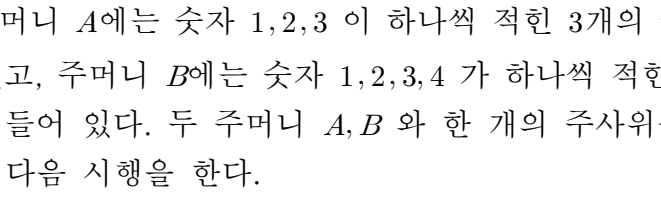
2020. 11월 대학수학능력시험

29. 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

2023. 7월 학력평가

30. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \ (a\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a)=p-q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

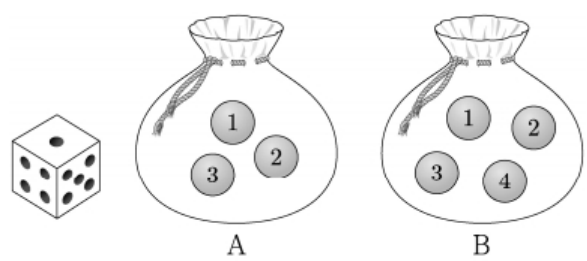
2023. 9월 수능 모의평가

31. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3 이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4 가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B 와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
3의 배수이면 주머니 A에서 임의로
2개의 공을 동시에 꺼내고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
주머니 B 에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후, 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 5번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $P(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

32. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$$f(a)=f(3a)=g(2a),$$
$$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915$$

일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

2023. 11월 대학수학능력시험

33. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다. $\mathrm{P}(X\le 5t)\ge\frac{1}{2}$이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000\times k$의 값을 구하시오.[4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

2022. 7월 학력평가

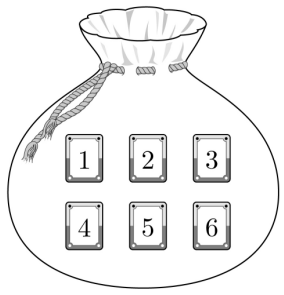
34. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0\le X\le a$, $0\le Y\le a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $0\le x\le a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=b,\ g(x)=\mathrm{P}(0\le X\le x)$$

이다. $\mathrm{P}(0\le Y\le c)=\frac{1}{2}$일 때, $(a+b)\times c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

35. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



2022. 10월 학력평가

36. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+6)$이다. 두 확률변수 X, Y와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

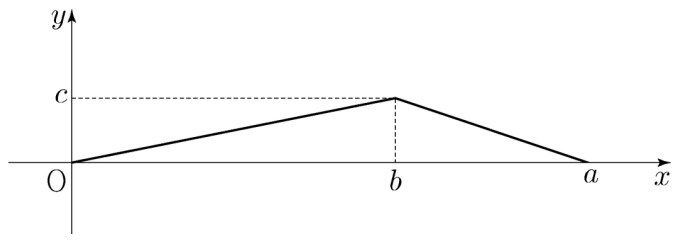
(가) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 11)=\mathrm{P}(\mathrm{Y}\ge 23)$
(나) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le k)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}\le k)=1$

오른쪽 표준 정규 분포 표를 이용하여 구한 $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le k)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}\ge k)$의 값이 0.1336일 때, $\mathrm{E}(\mathrm{X})+\sigma(\mathrm{Y})$의 값은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le \mathrm{Z}\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

2022. 11월 대학수학능력시험

37. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X\le b)-\mathrm{P}(X\ge b)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은?(단, a, b, c는 상수이다.)[4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 7월 학력평가

38. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 상수 a에 대하여 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y=3X-a$
(나) $\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}(Y\ge a)$

$\mathrm{P}(Y\ge 9)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.2417 ⑤ 0.3085

2021. 9월 수능 모의평가

39. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 10월 학력평가

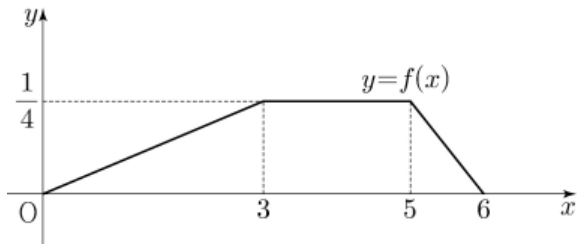
40. 주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X=4)=16\times\mathrm{P}(X=16)=\frac{1}{81}$
(나) $\mathrm{E}(X)=9$

$\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 11월 대학수학능력시험

41. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 6$, $0\le Y\le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le 6$인 모든 x에 대하여 $f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020. 7월 학력평가

42. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 8)=1$$

을 만족시키는 m과 σ에 대하여 $\mathrm{P}(Y\le m+4)=0.3085$일 때, $\mathrm{P}(X\le\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359
④ 0.1587 ⑤ 0.2857

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 7월 학력평가

43. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c$의 값을 확률변수 X라 할 때, 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

$3 \le a+b+c \le 18$이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $3, 4, 5, \cdots, 18$이다.
a, b, c가 각각 6 이하의 자연수이므로
$7-a$, $7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.
$3 \le k \le 18$인 자연수 k에 대하여
$a+b+c=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와
$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=3\times$ (가) $-k)$는 서로 같다.
그러므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times \mathrm{P}(X=k)\}$$
$$=3\times \mathrm{P}(X=3)+4\times \mathrm{P}(X=4)+5\times \mathrm{P}(X=5)$$
$$+\cdots+17\times \mathrm{P}(X=17)+18\times \mathrm{P}(X=18)$$
$$=\boxed{\text{(나)}}\times \sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)$$

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$이므로

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=$ (다) 이다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=$ (나) $\times$ (다)

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $\frac{p+q}{r}$의 값은? [4점]

① 49 ② $\frac{105}{2}$ ③ 56 ④ $\frac{119}{2}$ ⑤ 63

2020. 7월 학력평가

44. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1, \sigma_1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2, \sigma_2^2)$을 따르고, 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\sigma_1=\sigma_2$이고 $f(24)=g(28)$일 때, 확률변수 X, Y는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(m_1 \le X \le 24)+\mathrm{P}(28 \le Y \le m_2)=0.9544$
(나) $\mathrm{P}(Y \ge 36)=1-\mathrm{P}(X \le 24)$

$\mathrm{P}(18 \le X \le 21)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
④ 0.6826 ⑤ 0.7745

2020. 7월 학력평가

45. 주머니 속에 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다.
이 과정을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b라 하자. $a-b$의 값을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 $Y=2X+1$의 분산 $\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]



2020. 9월 수능 모의평가

46. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \ge 3.4)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X \le 3.9)+\mathrm{P}(Z \le -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3.55)$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

2020. 9월 수능 모의평가

47. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

48. 이산확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고 이산확률변수 Y가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k^2)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=1$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37

2020. 11월 대학수학능력시험

49. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. E(X)의 값은?[4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 10 수열의 극한

2023. 3월 학력평가

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2023. 4월 학력평가

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2023. 6월 수능 모의평가

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2023. 7월 학력평가

4. $\lim_{n\to\infty}2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 10월 학력평가

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2023. 11월 대학수학능력시험

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

2022. 3월 학력평가

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2022. 6월 수능 모의평가

8. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2022. 7월 학력평가

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

2022. 10월 학력평가

10. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

2022. 11월 대학수학능력시험

11. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

2021. 3월 학력평가

12. $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

2021. 6월 수능 모의평가

14. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

15. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2021. 11월 대학수학능력시험

16. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 6월 수능 모의평가

17. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+12n}-3n)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 7월 학력평가

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{3n-1}{n^2+1}<a_n<\frac{3n+2}{n^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2020. 9월 수능 모의평가

19. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 11월 대학수학능력시험

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 3월 학력평가

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2023. 3월 학력평가

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2023. 3월 학력평가

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

2023. 3월 학력평가

24. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시길 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 4월 학력평가

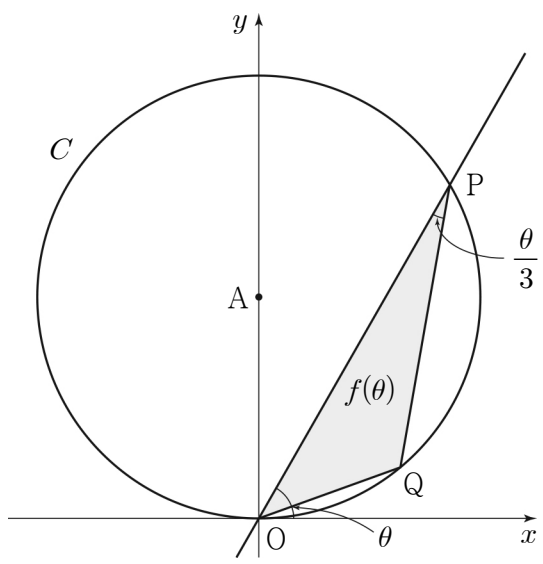
25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2023. 4월 학력평가

26. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle OPQ=\frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0<\theta<\pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2023. 9월 수능 모의평가

27. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은?[3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2023. 10월 학력평가

28. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=4$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2022. 3월 학력평가

29. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2022. 3월 학력평가

30. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

2022. 3월 학력평가

31. 첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=3$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 3월 학력평가

32. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n^2 < 4na_n + n - 4n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2022. 4월 학력평가

33. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

2022. 4월 학력평가

34. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx-2n$이 직선 $y=x+1$과 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 P_nQ_n을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{30}$

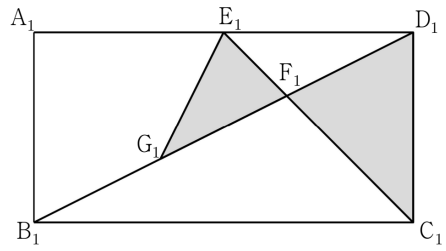
2022. 7월 학력평가

35. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

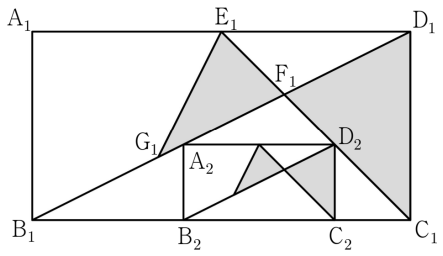
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

2022. 9월 수능 모의평가

36. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

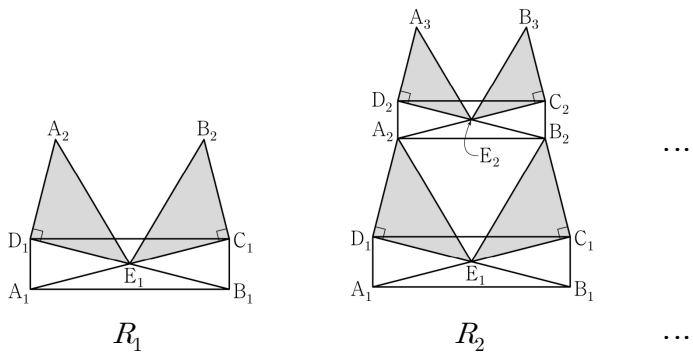
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

37. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ⩚ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ⩚ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[3점]



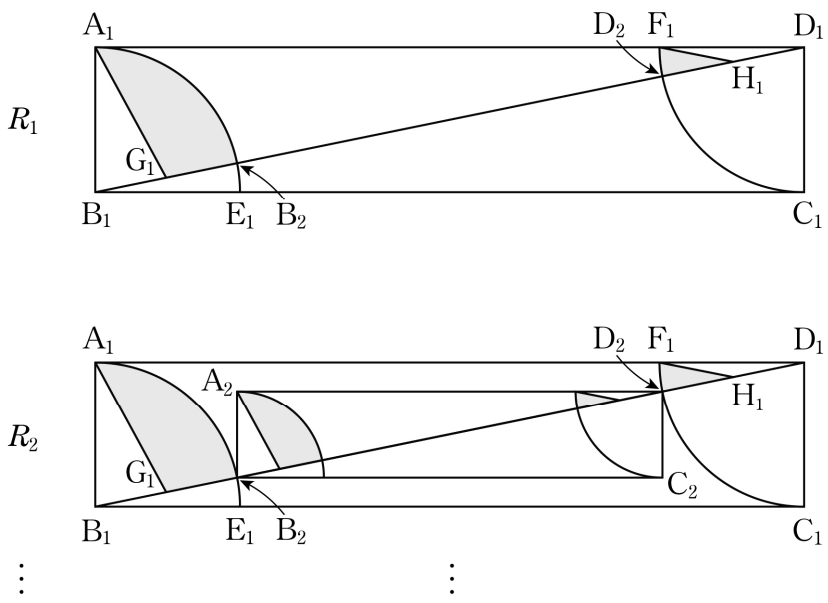
① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

2022. 10월 학력평가

38. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{6}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 E_1이라 하고, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 A_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 선분 B_1D_1이 호 A_1E_1, 호 C_1F_1과 만나는 점을 각각 B_2, D_2라 하고, 두 선분 B_1B_2, D_1D_2의 중점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 부분인 ◺ 모양의 도형과 두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 부분인 ▻ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_2D_2가 대각선이고 모든 변이 선분 A_1B_1 또는 선분 B_1C_1에 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ◺ 모양의 도형과 ▻ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{25\pi-12\sqrt{6}-5}{64}$ ② $\frac{25\pi-12\sqrt{6}-4}{64}$

③ $\frac{25\pi-10\sqrt{6}-6}{64}$ ④ $\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

⑤ $\frac{25\pi-10\sqrt{6}-4}{64}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

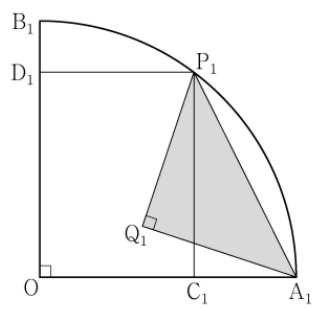
2022. 11월 대학수학능력시험

39. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3 : 4$인 직사각형 되도록 잡는다.

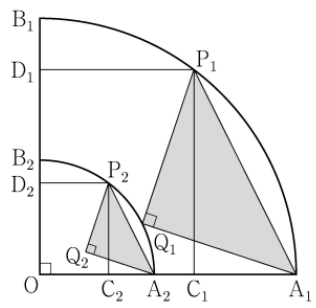
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변 삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

2021. 3월 학력평가

40. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2021. 3월 학력평가

41. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_1 a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = 12$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2021. 3월 학력평가

42. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2-3 < a_n < 2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

2021. 3월 학력평가

43. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} (a_1 + n^2 a_n)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

2021. 4월 학력평가

44. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2\right) = 5$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

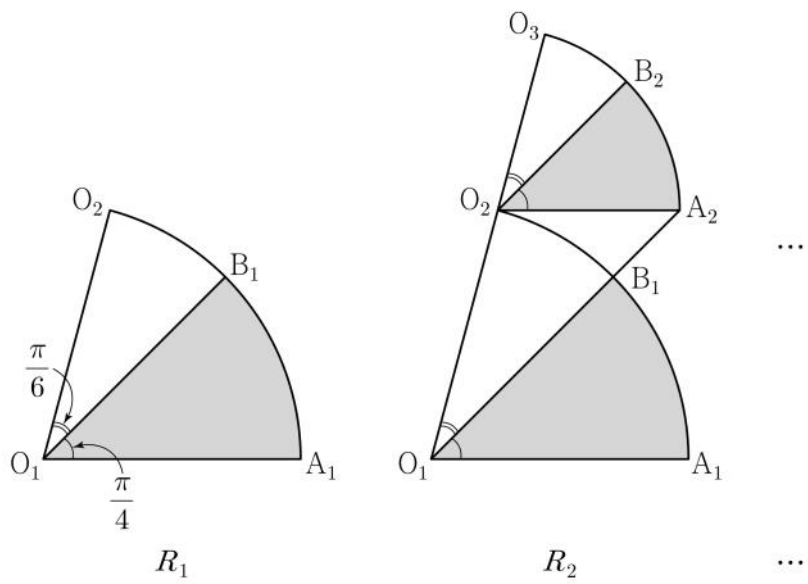
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

45. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

2021. 7월 학력평가

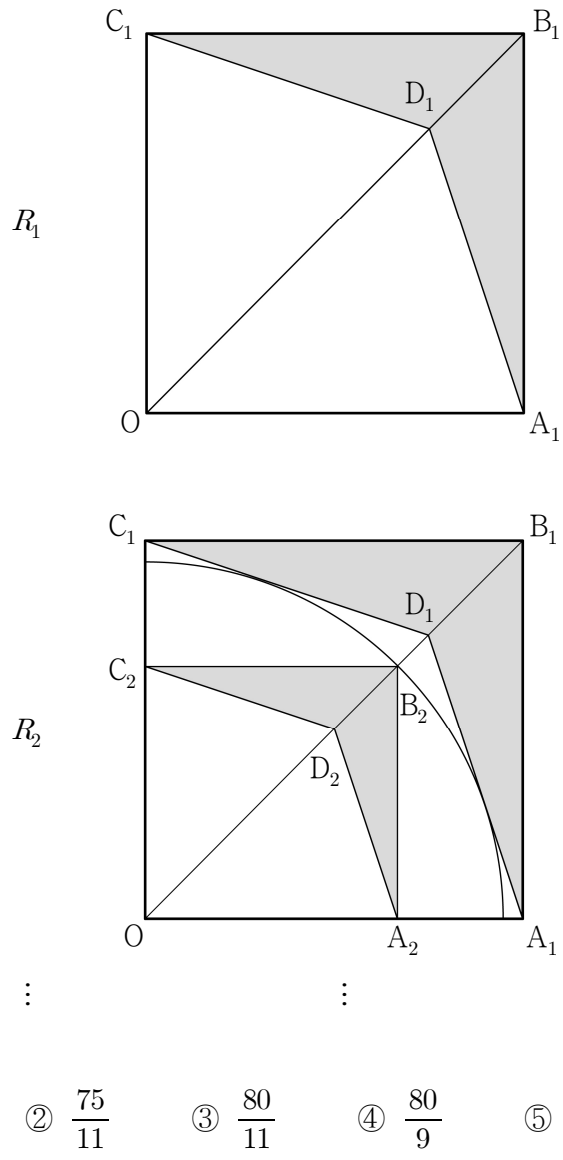
46. 자연수 r에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=1$이 성립하도록 하는 모든 r의 값의 합은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2021. 7월 학력평가

47. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $OA_1B_1C_1$의 대각선 OB_1을 3 : 1로 내분하는 점을 D_1이라 하고, 네 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1로 둘러싸인 ㄱ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 두 직선 A_1D_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원과 선분 OB_1이 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 OB_2를 대각선으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고 정사각형 $OA_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 ㄱ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{70}{11}$ ② $\frac{75}{11}$ ③ $\frac{80}{11}$ ④ $\frac{80}{9}$ ⑤ $\frac{85}{9}$

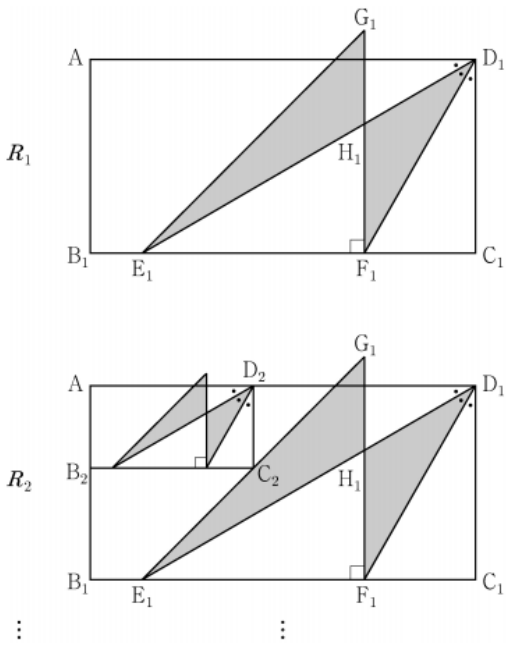
꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

48. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.

선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

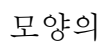
2021. 10월 학력평가

49. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은? [3점]

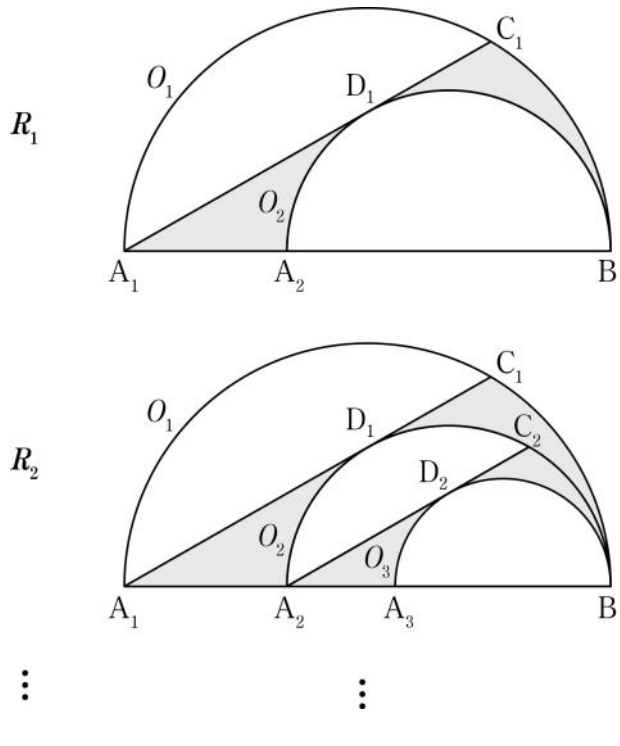
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 10월 학력평가

50. 그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_2B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3과 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$
④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

2021. 11월 대학수학능력시험

51. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 3월 학력평가

52. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 3,\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} n a_n (b_n + 2n)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 4월 학력평가

53. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + 2b_n - 7)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 4월 학력평가

54. 수열 $\left\{\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2020. 6월 수능 모의평가

55. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 10$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 2a_n^2 + 3n^2}{a_n^2 + n^2}$의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2020. 9월 수능 모의평가

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2020. 9월 수능 모의평가

57. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 3월 학력평가

58. $a > 0$, $a \neq 1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y = n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y = n$이 곡선 $y = \log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n} = \frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

2023. 3월 학력평가

59. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2 - 4nx - n < 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n a_n} - pn\right) = q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

2023. 3월 학력평가

60. 함수

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2 \le |x| < 2k$일 때, $g(x) = (2k-1) \times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$이다.
>
> (단, k는 자연수이다.)

$0 < t < 10$인 실수 t에 대하여 직선 $y = t$가 함수 $y = g(t)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

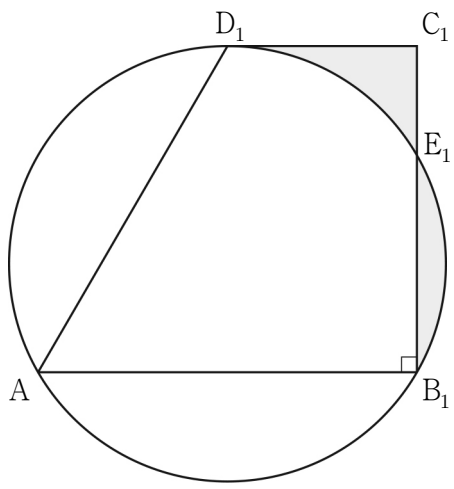
2023. 4월 학력평가

61. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1}=1$이고 $\angle C_1B_1A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인 ◝ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

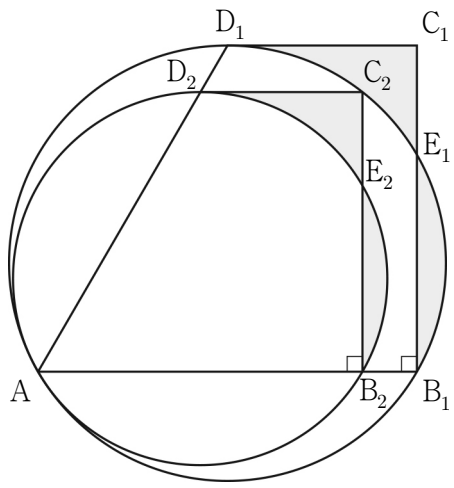
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}=\sqrt{3}:1$이고 $\angle C_2B_2A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에 ◝ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$
④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

2023. 6월 수능 모의평가

62. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

2023. 7월 학력평가

63. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\frac{\pi}{2}$$

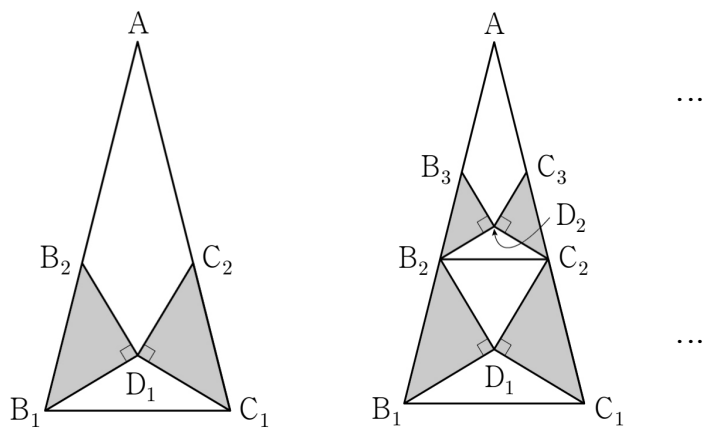
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2

① 2 ② $\frac{33}{16}$ ③ $\frac{17}{8}$ ④ $\frac{35}{16}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

64. 두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점]

2023. 11월 대학수학능력시험

65. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$, $3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=S$일 때, $120S$의 값을 구하시오.[4점]

2022. 3월 학력평가

66. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) A_1은 원점이다.
(나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
(다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2022. 3월 학력평가

67. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 (x\ge 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 P_nH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 R_nQ_n과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

2022. 4월 학력평가

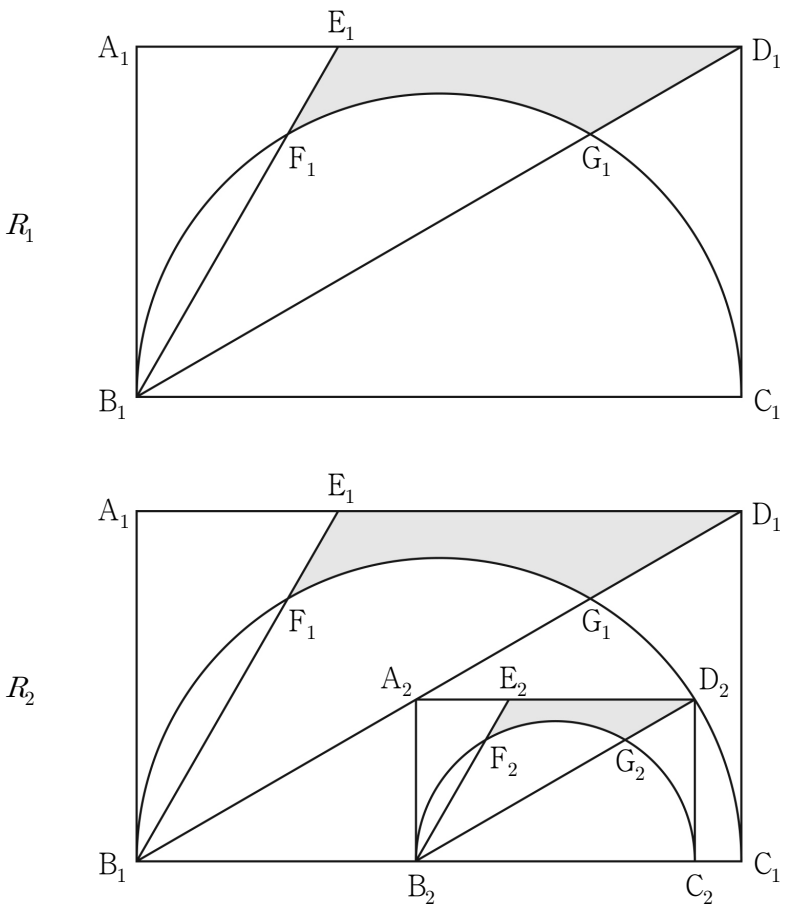
68. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 1:2로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 점 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자.

세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 ⌒ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⌒ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



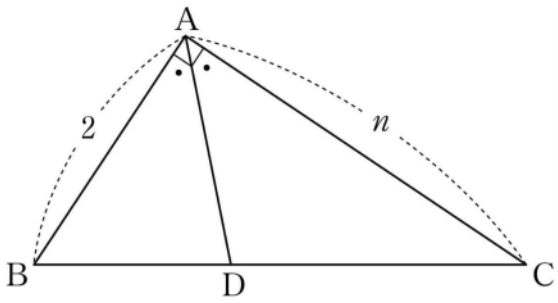
① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$
③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 3월 학력평가

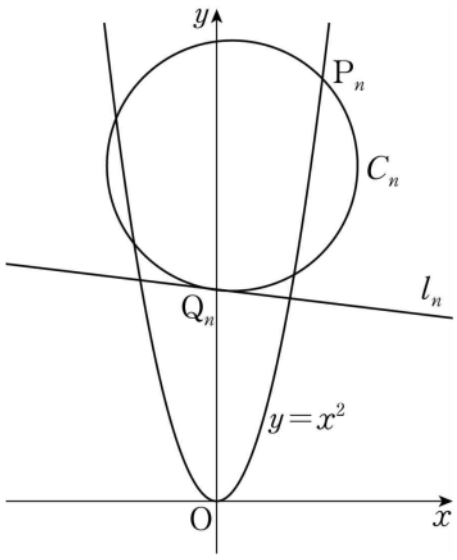
69. 자연수 n에 대하여 $\angle A=90°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{CA}=n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n-a_n)$의 값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



2021. 3월 학력평가

70. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $Q_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]



2021. 3월 학력평가

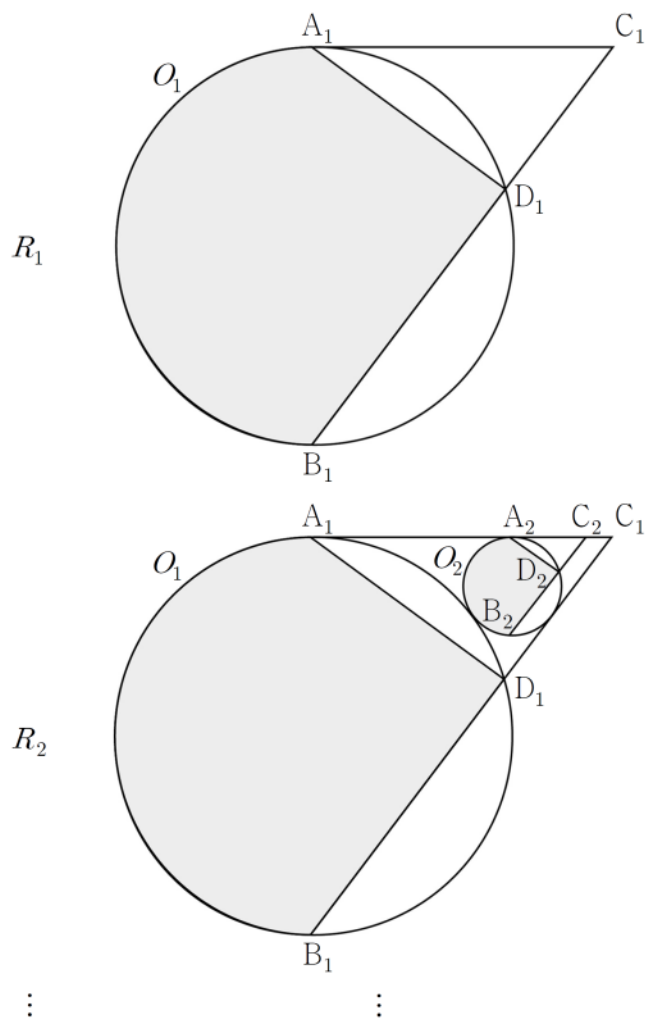
71. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 4월 학력평가

72. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1=\frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C_1}=4:3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$

③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$ ④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$

⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

73. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\quad (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오. [4점]

2020. 4월 학력평가

74. 첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{12}$

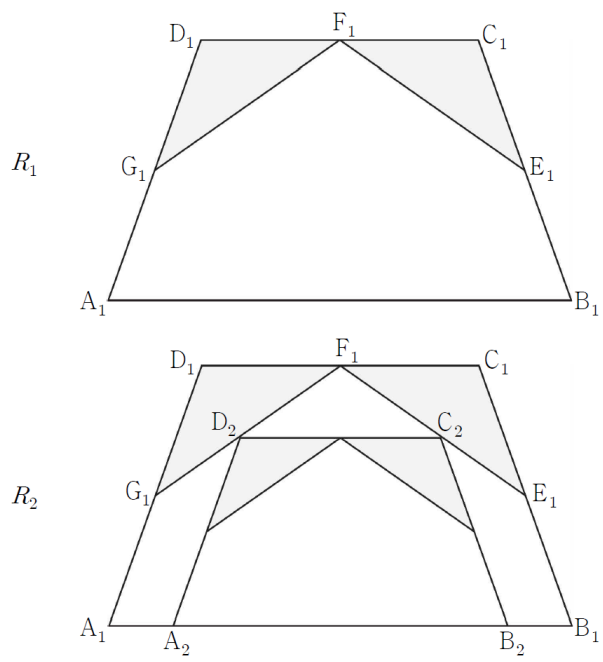
① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

2020. 4월 학력평가

75. 그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=5:3$인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{234}{19}\sqrt{2}$ ② $\frac{236}{19}\sqrt{2}$ ③ $\frac{238}{19}\sqrt{2}$
④ $\frac{240}{19}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{242}{19}\sqrt{2}$

2020. 4월 학력평가

76. 자연수 n에 대하여 점 $(1,\ 0)$을 지나고 점 $(n,\ n)$에서 직선 $y=x$와 접하는 원의 중심의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

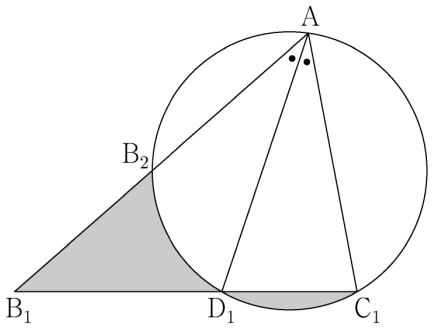
77. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.

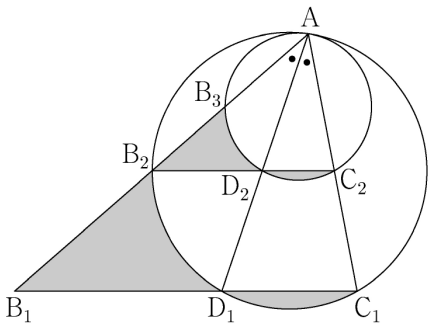
세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

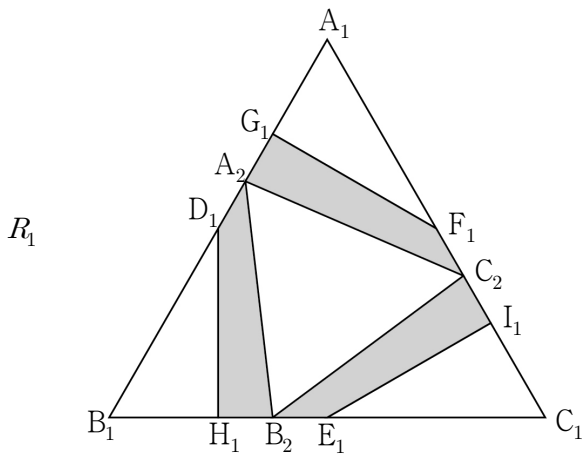
2020. 7월 학력평가

78. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1의 중점을 각각 G_1, H_1, I_1이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

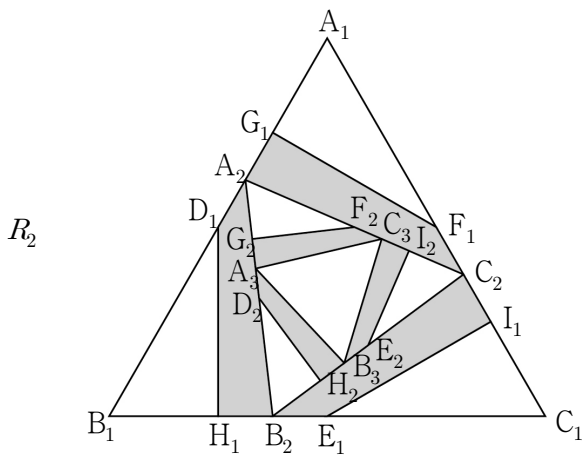
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

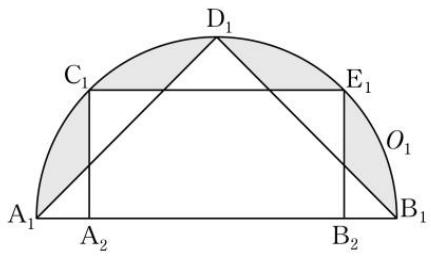
2020. 10월 학력평가

79. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 A_1B_1을 4등분하는 점을 점 A_1에서 가까운 순서대로 각각 C_1, D_1, E_1이라 하고, 두 점 C_1, E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $C_1A_2B_2E_1$의 외부와 삼각형 $D_1A_1B_1$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는 ⌒ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

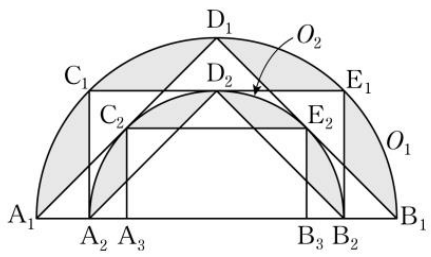
그림 R_1에서 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 A_2B_2를 4등분하는 점을 점 A_2에서 가까운 순서대로 각각 C_2, D_2, E_2라 하고, 두 점 C_2, E_2에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 A_3, B_3이라 하자. 사각형 $C_2A_3B_3E_2$의 외부와 삼각형 $D_2A_2B_2$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는 ⌒ 모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $4\pi+4\sqrt{2}-16$ ② $4\pi+16\sqrt{2}-32$
③ $4\pi+8\sqrt{2}-20$ ④ $2\pi+16\sqrt{2}-24$
⑤ $2\pi+8\sqrt{2}-12$

2020. 10월 학력평가

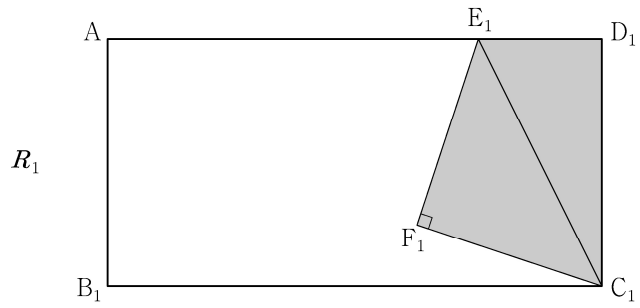
80. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $A_n(n, 0)$, $B_n(n, 3)$이 있다. 점 $P(1, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 OB_n과 만나는 점을 C_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{PC_n}}{\overline{OB_n}-\overline{OA_n}} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

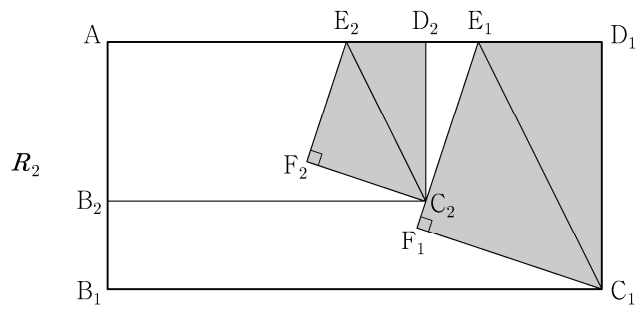
2020. 11월 대학수학능력시험

81. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 3:1로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$
④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 11 미분법

2023. 9월 수능 모의평가

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

2022. 4월 학력평가

2. 함수 $f(x)=(x+a)e^x$에 대하여 $f'(2)=8e^2$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 9월 수능 모의평가

3. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$의 값은?[2점]

① ln2 ② 1 ③ 2ln2 ④ 2 ⑤ 3ln2

2021. 7월 학력평가

4. $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sec\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

2023. 4월 학력평가

5. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2023. 4월 학력평가

6. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

2023. 6월 수능 모의평가

7. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\ y=3\ln(t^2+1)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2023. 6월 수능 모의평가

8. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2023. 6월 수능 모의평가

9. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

2023. 6월 수능 모의평가

10. 실수 t $(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2023. 7월 학력평가

11. 함수 $f(x)=\ln(x^2-x+2)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g(x))$라 하자. $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$일 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 7월 학력평가

12. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^{x}+x-y$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

2023. 9월 수능 모의평가

13. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=t+\cos 2t$, $y=\sin^2 t$에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2023. 10월 학력평가

14. 함수 $f(x)=e^{2x}+e^{x}-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2023. 11월 대학수학능력시험

15. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선 $x=\ln(t^3+1)$, $y=\sin \pi t$에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?[3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

2023. 11월 대학수학능력시험

16. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^{x}}+e^{t}$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은?[3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$
④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

2022. 4월 학력평가

17. $\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$일 때, $\sin^2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

2022. 4월 학력평가

18. $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

2022. 6월 수능 모의평가

19. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$
④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

2022. 6월 수능 모의평가

20. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

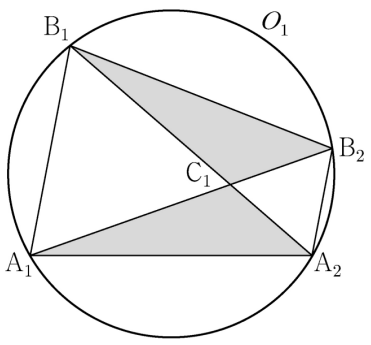
2022. 6월 수능 모의평가

21. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.

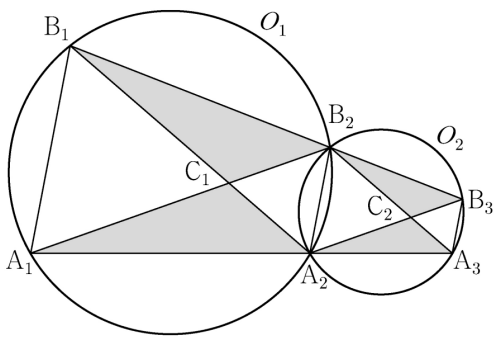
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 $\gtrless$ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 $\gtrless$ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

2022. 6월 수능 모의평가

22. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2022. 7월 학력평가

23. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 7월 학력평가

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2022. 10월 학력평가

25. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=2$$

일 때, $f'(0)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2022. 10월 학력평가

26. 매개변수 $t(0<t<\pi)$로 나타내어진 곡선

$$x=\sin t-\cos t,\ y=3\cos t+\sin t$$

위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 3일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 0 ② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

④ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

2022. 11월 대학수학능력시험

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

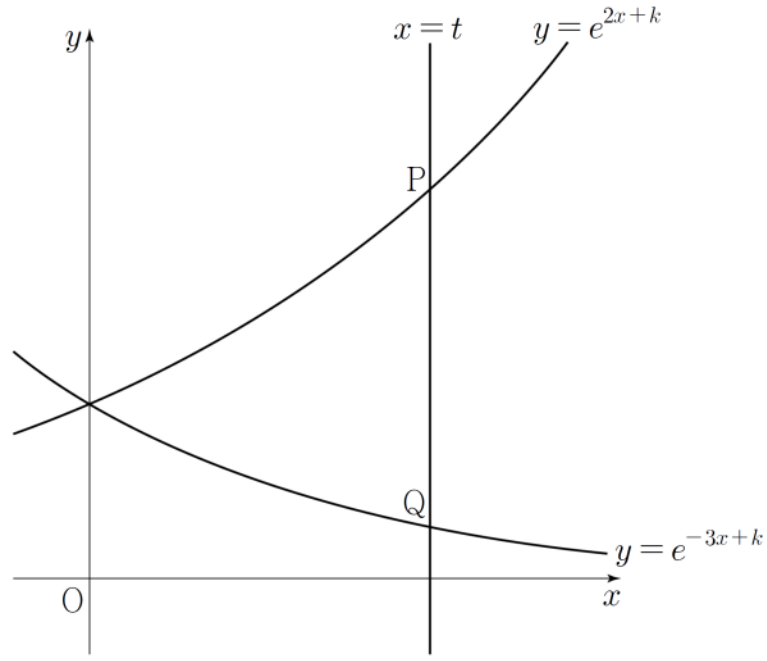
28. 함수 $f(x)=\log_3 6x$에 대하여 $f'(9)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9\ln 3}$ ② $\frac{1}{6\ln 3}$ ③ $\frac{2}{9\ln 3}$
④ $\frac{5}{18\ln 3}$ ⑤ $\frac{1}{3\ln 3}$

2021. 4월 학력평가

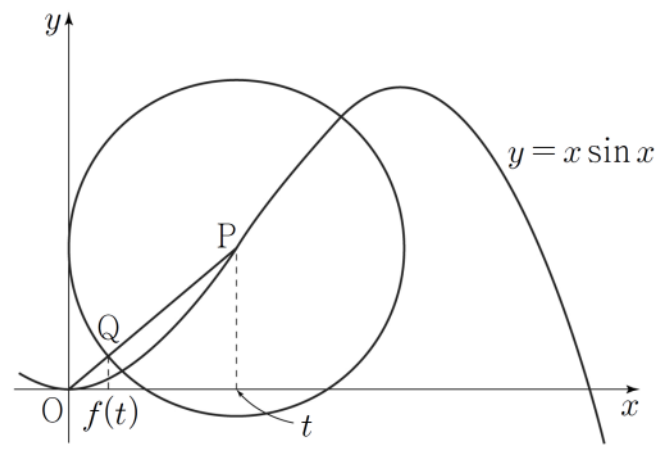
29. 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=e^{2x+k}$, $y=e^{-3x+k}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{PQ}=t$를 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 0+} e^{f(t)}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



2021. 4월 학력평가

30. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $P(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

2021. 6월 수능 모의평가

31. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2021. 6월 수능 모의평가

32. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$
④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

2021. 6월 수능 모의평가

33. 두 함수

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

2021. 7월 학력평가

34. 곡선 $y=xe^{-2x}$의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y=xe^{-2x}$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1 ④ e^2 ⑤ $3e^2$

2021. 9월 수능 모의평가

35. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

36. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=e^t-4e^{-t}$, $y=t+1$에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?[3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

2021. 10월 학력평가

37. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>2)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t\ln t,\ y=\frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

2021. 11월 대학수학능력시험

38. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x^3+x)=e^x$을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

2020. 6월 수능 모의평가

39. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x)=a-4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a\times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

2020. 6월 수능 모의평가

40. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$

라 하자. $f'(0)-f(0)=2$일 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2020. 6월 수능 모의평가

41. 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 7월 학력평가

42. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2020. 7월 학력평가

43. 함수 $f(x)=\tan 2x+\frac{\pi}{2}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2020. 7월 학력평가

44. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t-\frac{2}{\pi}\cos\pi t,\ y=6\ln t-\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오. [3점]

2020. 9월 수능 모의평가

45. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=\ln t+t,\ y=-t^3+3t$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2020. 9월 수능 모의평가

46. 함수 $f(x)=x\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 10월 학력평가

47. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2+1,\ y=4\sqrt{t}$$

에서 $t=4$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

2020. 10월 학력평가

48. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{e^x+2}$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은? [3점]

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

2020. 11월 대학수학능력시험

49. 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

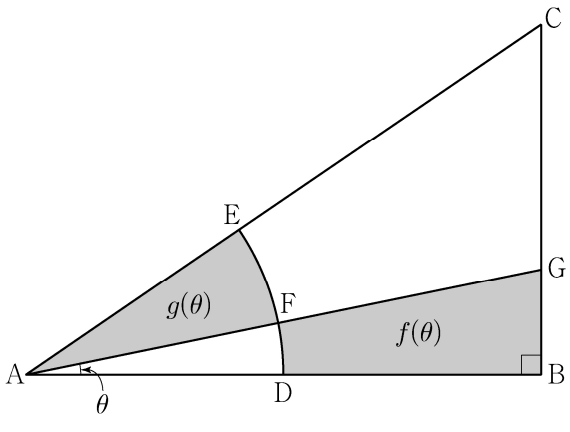
① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

2020. 11월 대학수학능력시험

50. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-6}{x-1}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 11월 대학수학능력시험

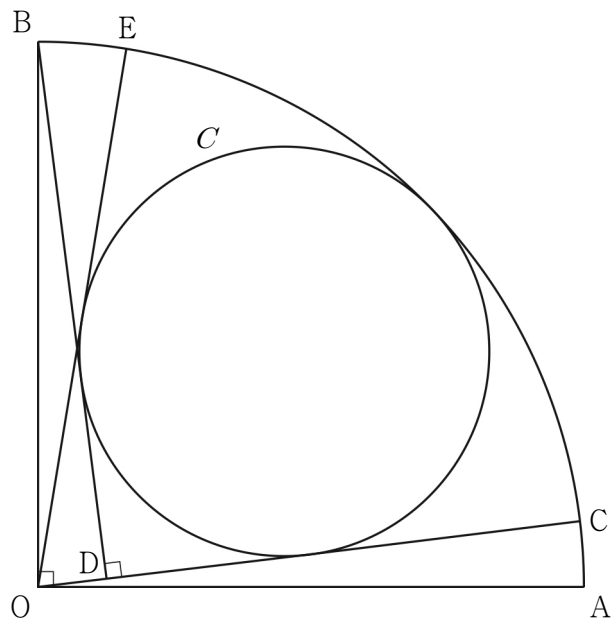
51. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오.[3점]



2023. 4월 학력평가

52. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle COE)=\dfrac{7}{25}$이다.

$\sin(\angle AOE)=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]



2023. 4월 학력평가

53. $x\geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\leq x\leq 1)\\ 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\leq 2)\end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\dfrac{1}{2}f(x)$이다.

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 6월 수능 모의평가

54. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

2023. 6월 수능 모의평가

55. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 A$(a, a+k)$, B$(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

2023. 7월 학력평가

56. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [4점]

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2023. 7월 학력평가

57. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

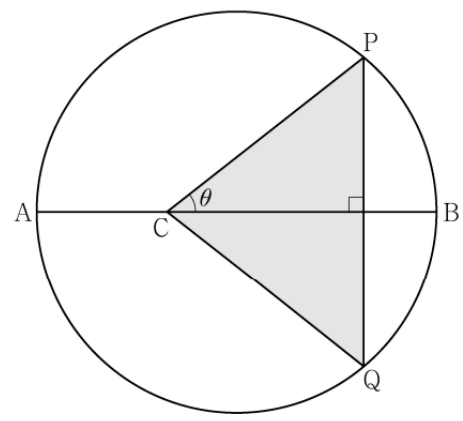
라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
(나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

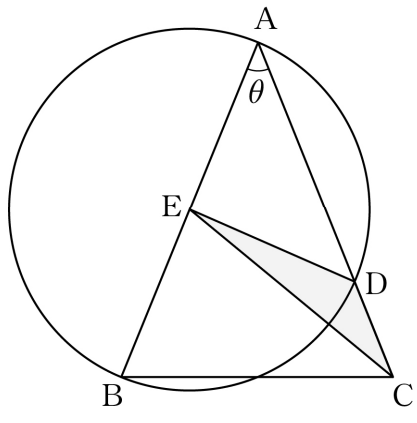
2023. 9월 수능 모의평가

58. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



2023. 10월 학력평가

59. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 선분 AB의 중점을 E라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 10월 학력평가

60. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. (나) 함수 $\|f(x)\|$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

2022. 3월 학력평가

61. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, …, a_m(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

2022. 6월 수능 모의평가

62. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

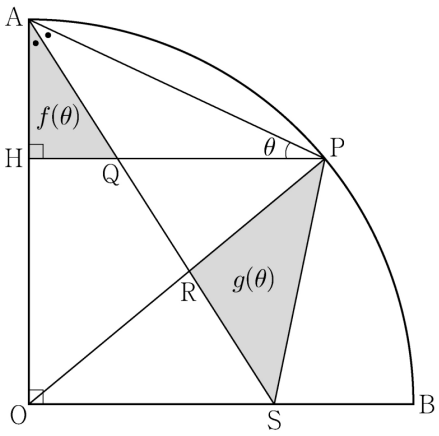
이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $\|g(x)\|$는 $x=2$에서 극소이다. (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

2022. 6월 수능 모의평가

63. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. ∠APH=θ일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



2022. 6월 수능 모의평가

64. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

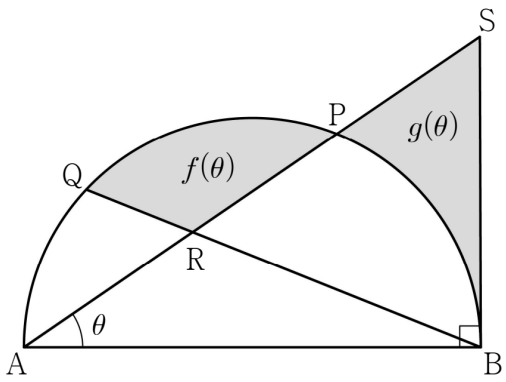
$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 7월 학력평가

65. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



2022. 7월 학력평가

66. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=e^x f(x)$$

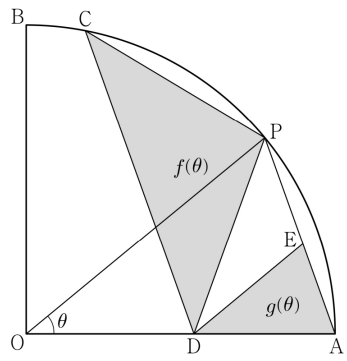
이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x|g(x)=k, x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k\to 3e+}h(k)-\lim_{k\to 3e-}h(k)=2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$) [4점]

2022. 9월 수능 모의평가

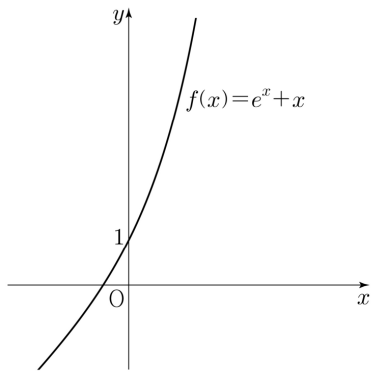
67. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)[4점]



① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

2022. 9월 수능 모의평가

68. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.[4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

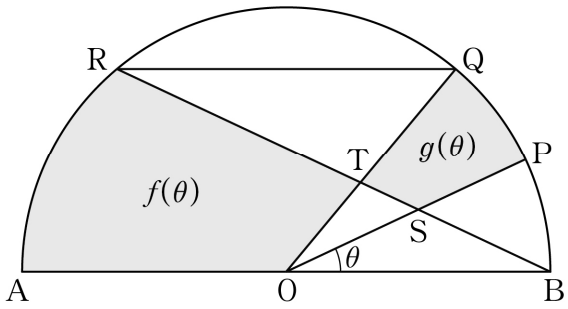
2022. 10월 학력평가

69. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를

$$\angle BOP=\theta,\ \angle BOQ=2\theta$$

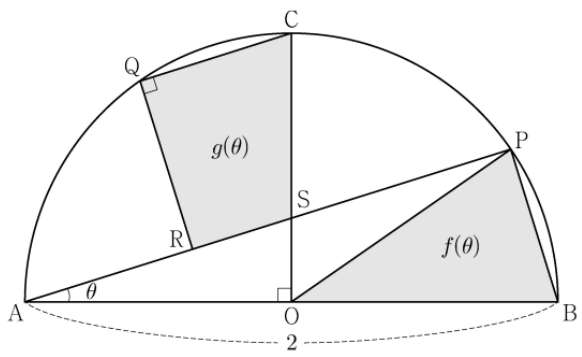
가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자.

세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



2022. 11월 대학수학능력시험

70. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은?(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)[4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 11월 대학수학능력시험

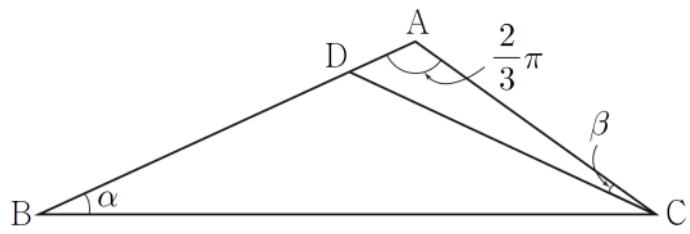
71. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

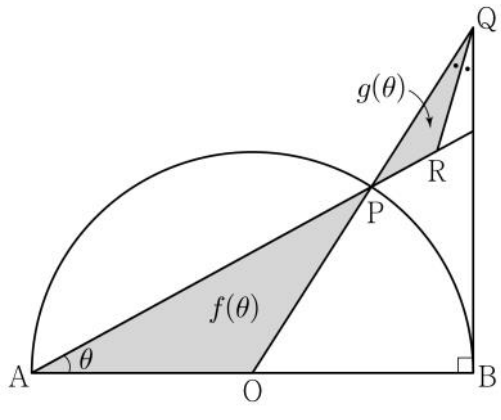
2021. 4월 학력평가

72. 그림과 같이 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{AB}>\overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BD}=\overline{CD}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle CBD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오. [4점]



2021. 6월 수능 모의평가

73. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

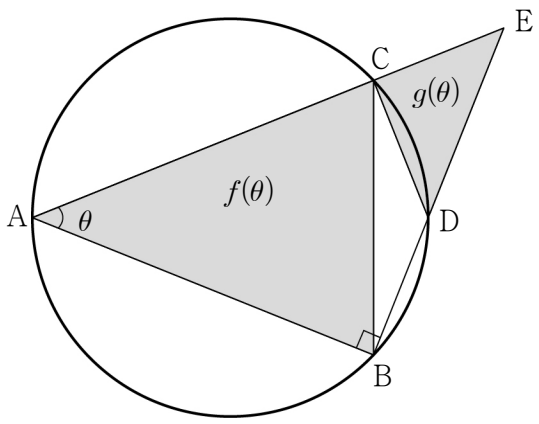
74. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 6월 수능 모의평가

75. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 7월 학력평가

76. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC=\theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2021. 7월 학력평가

77. 함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}(f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1)\\ \frac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

2021. 9월 수능 모의평가

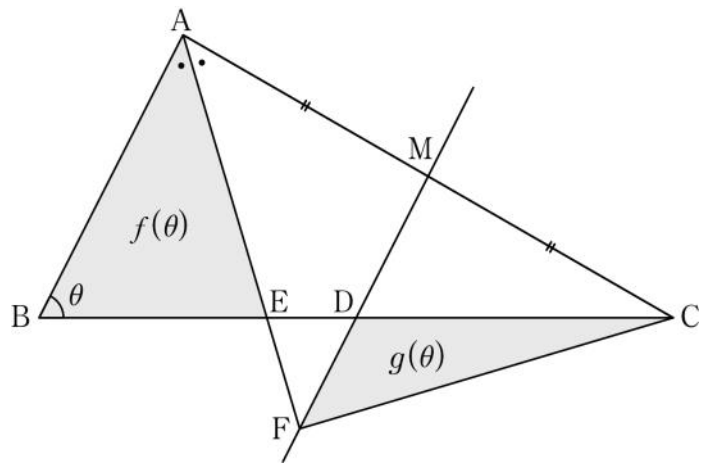
78. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오.(단, a, b는 실수이다.) [4점]

2021. 10월 학력평가

79. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 10월 학력평가

80. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

2021. 11월 대학수학능력시험

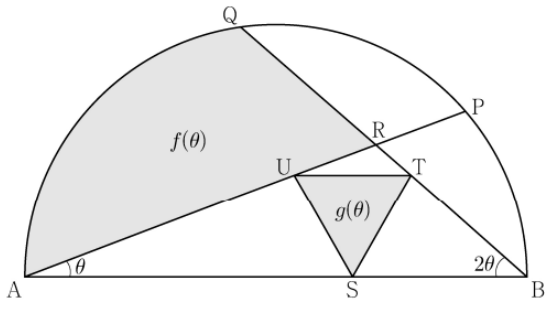
81. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 11월 대학수학능력시험

82. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선 분 AP, BQ의 교점을 R라 하자. 선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

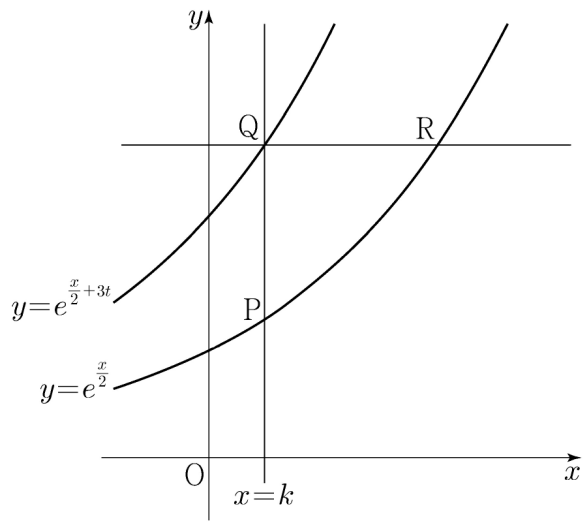


2020. 6월 수능 모의평가

83. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 0+}f(t)$의 값은? [4점]



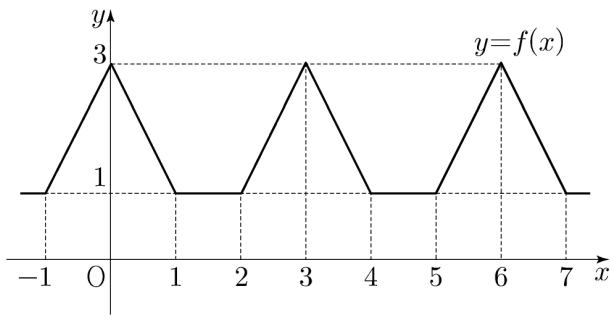
① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

2020. 6월 수능 모의평가

84. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\le x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

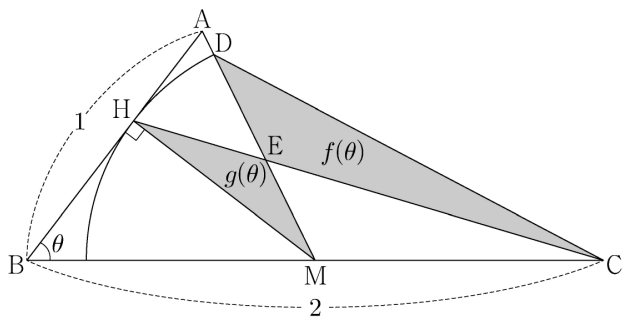
이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 6월 수능 모의평가

85. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



2020. 7월 학력평가

86. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2, 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $\frac{h''(2)}{f''(2)}=4$이다. $f'(2)=4$일 때, $h'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2020. 7월 학력평가

87. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+3}$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\,(0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=0$

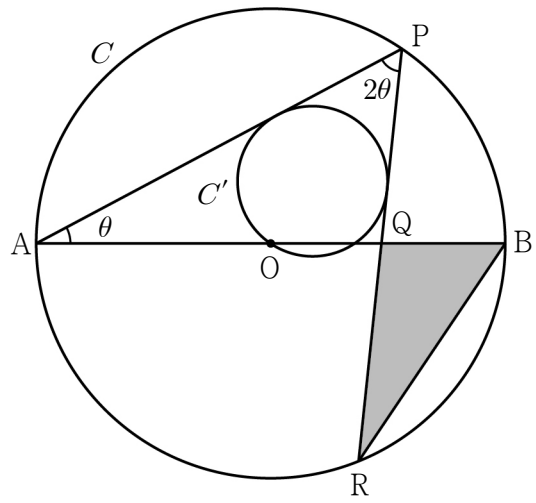
ㄴ. 두 양수 a, $b\,(a<b<4)$에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다.

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\frac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 7월 학력평가

88. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle APQ=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



2020. 9월 수능 모의평가

89. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

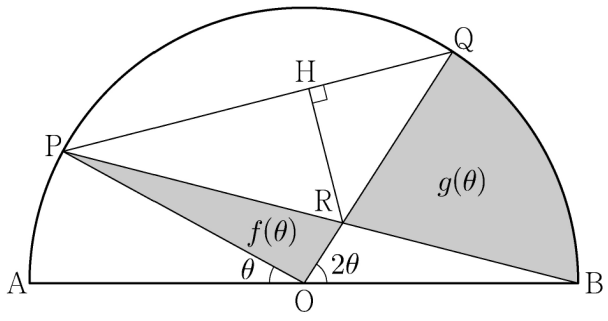
의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 9월 수능 모의평가

90. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2020. 9월 수능 모의평가

91. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1}\le ax+b\le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M\times m^3|=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020. 10월 학력평가

92. 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{x^n+1} & (x\neq -1)\\ -2 & (x=-1)\end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

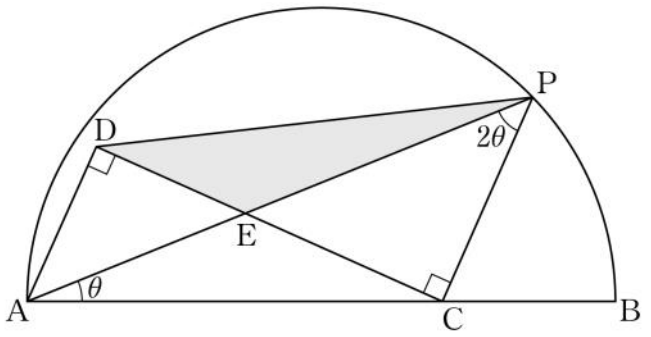
< 보 기 >

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,-1)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 구간 $(-1,\infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 10월 학력평가

93. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle PAC=\theta$일 때, $\angle APC=2\theta$이다. $\angle ADC=\angle PCD=\frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

2020. 11월 대학수학능력시험

94. $x>0$서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\ f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

> (가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
> (나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020. 11월 대학수학능력시험

95. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 11월 대학수학능력시험

96. 두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\|h(x)\|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

2020. 11월 대학수학능력시험

97. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이 때 극댓값이 모두 동일하다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 12 적분법

2021. 10월 학력평가

1. $\int_2^4 \frac{6}{x^2}dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2023. 7월 학력평가

2. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

2023. 9월 수능 모의평가

3. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$의 값은?[3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

2023. 9월 수능 모의평가

4. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는?[3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

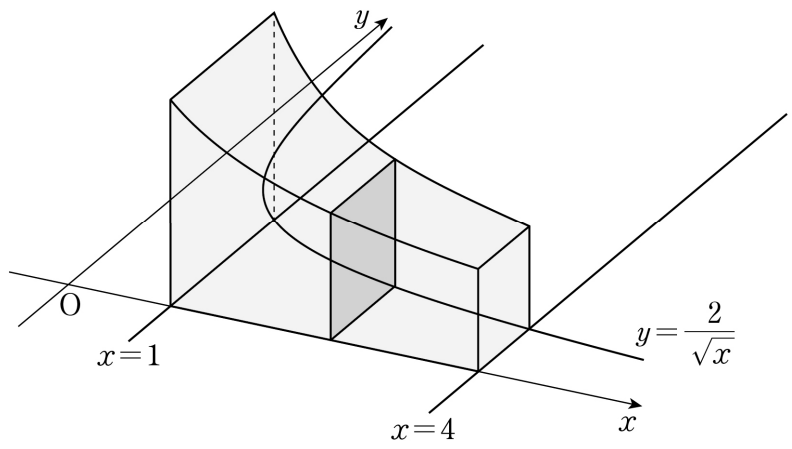
2023. 10월 학력평가

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2023. 10월 학력평가

6. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



① 6ln2 ② 7ln2 ③ 8ln2 ④ 9ln2 ⑤ 10ln2

2023. 11월 대학수학능력시험

7. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 모든 양수 a에 대하여

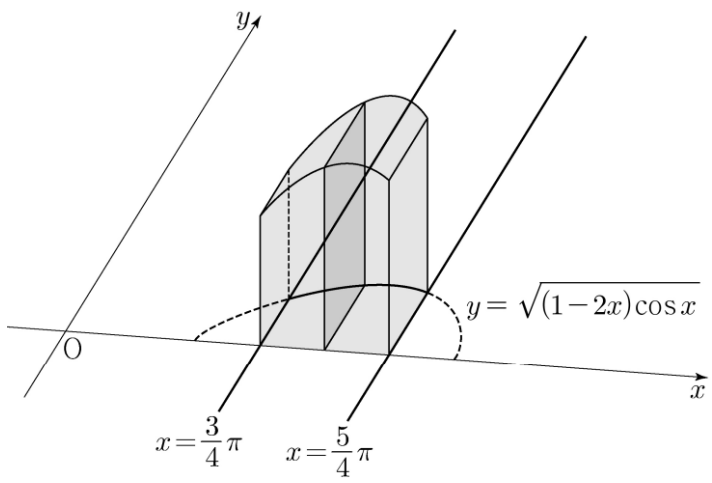
$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$이고, $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은?[3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 11월 대학수학능력시험

8. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?[3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

2022. 7월 학력평가

9. $\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

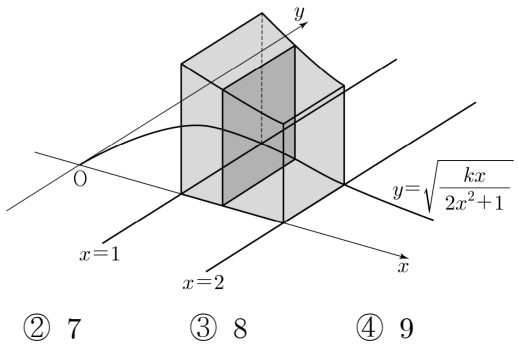
2022. 9월 수능 모의평가

10. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$의 값은?[3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

2022. 9월 수능 모의평가

11. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 2ln3일 때, k의 값은?[3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022. 10월 학력평가

12. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}-2\ln 2$ ② $1-\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}-\ln 3$
④ $\ln 2$ ⑤ $2-\ln 3$

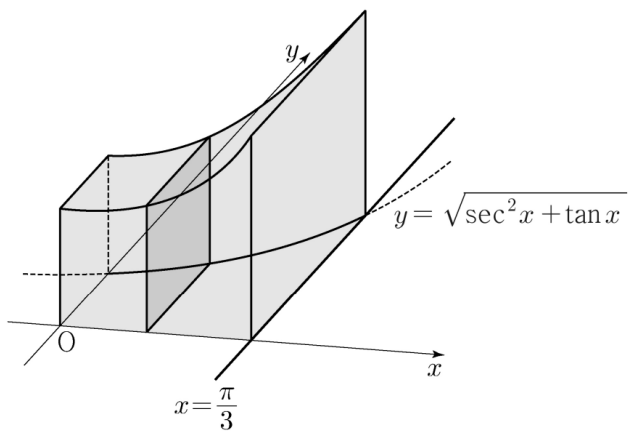
2022. 11월 대학수학능력시험

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$의 값은?[3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

2022. 11월 대학수학능력시험

14. 그림과 같이 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$와 x, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?[3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

2021. 7월 학력평가

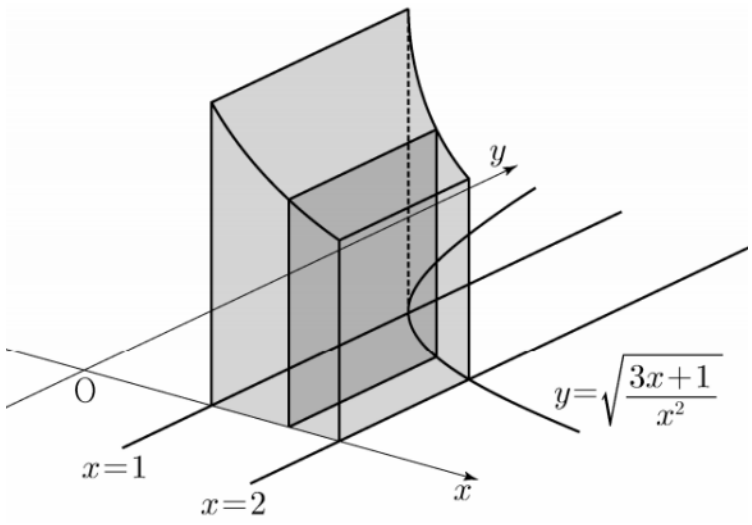
15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\sin^2 2x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

16. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

2021. 10월 학력평가

17. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

(나) 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다.

$\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx=3$일 때, $\displaystyle\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)dx$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2021. 11월 대학수학능력시험

18. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\dfrac{\ln 5}{2}$ ③ $\dfrac{\ln 5}{3}$ ④ $\dfrac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\dfrac{\ln 5}{5}$

2021. 11월 대학수학능력시험

19. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{5}{16}$ ③ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{8}$

2020. 7월 학력평가

20. $x>1$인 모든 실수 x의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\sqrt{x-1}\,f'(x)=3x-4$$

를 만족시킬 때, $f(5)-f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2020. 9월 수능 모의평가

21. $\displaystyle\int_{1}^{2}(x-1)e^{-x}dx$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{e}-\dfrac{2}{e^2}$ ② $\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}$ ③ $\dfrac{1}{e}$

④ $\dfrac{2}{e}-\dfrac{2}{e^2}$ ⑤ $\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{e^2}$

2020. 9월 수능 모의평가

22. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4=a$일 때, $5a$의 값을 구하시오. [3점]

2020. 10월 학력평가

23. 연속함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 t에 대하여

$$\int_{0}^{\ln t} f(x)\,dx=(t\ln t+a)^2-a$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① $2e^2+2e$ ② $2e^2+4e$ ③ $4e^2+4e$

④ $4e^2+8e$ ⑤ $8e^2+8e$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2020. 11월 대학수학능력시험

24. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2020. 11월 대학수학능력시험

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

2023. 7월 학력평가

26. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
(나) $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

2023. 9월 수능 모의평가

27. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$이라 하자.

함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt\right|$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, a의 최솟값은?[4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2023. 10월 학력평가

28. 함수

$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x+b\cos x}$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

(가) $ab=0$
(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{a^2+b^2}-2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

2023. 11월 대학수학능력시험

29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때, $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중, 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여 $2g(t)+h(t)=k$(k는 상수)를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은?[4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

2023. 11월 대학수학능력시험

30. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|\sin x|\cos x$이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.

함수 $h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오.[4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 7월 학력평가

31. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$일 때,
$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

2022. 9월 수능 모의평가

32. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-3)$이다.
(나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.

$\int_{4}^{5} g(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

2022. 10월 학력평가

33. 닫힌구간 $[0,4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{4\pi}|f(x)|dx$의 최솟값은? [4점]

(가) $0\leq x\leq \pi$일 때, $f(x)=1-\cos x$이다.
(나) $1\leq n\leq 3$인 각각의 자연수 n에 대하여
$f(n\pi+t)=f(n\pi)+f(t)$ $(0<t\leq \pi)$
또는
$f(n\pi+t)=f(n\pi)-f(t)$ $(0<t\leq \pi)$
이다.
(다) $0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

2022. 10월 학력평가

34. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+1\}$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이고
$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$
이다.
(나) $g(4)=\ln 5$

$\int_{3}^{5}\{f'(x)+2a\}g(x)dx=m+n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

2022. 11월 대학수학능력시험

35. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1$
(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14} g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)[4점]

2021. 7월 학력평가

36. 두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$g(x)=\ln f(x)-\frac{1}{10}\{f(x)-1\}$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=|g(t)|$와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

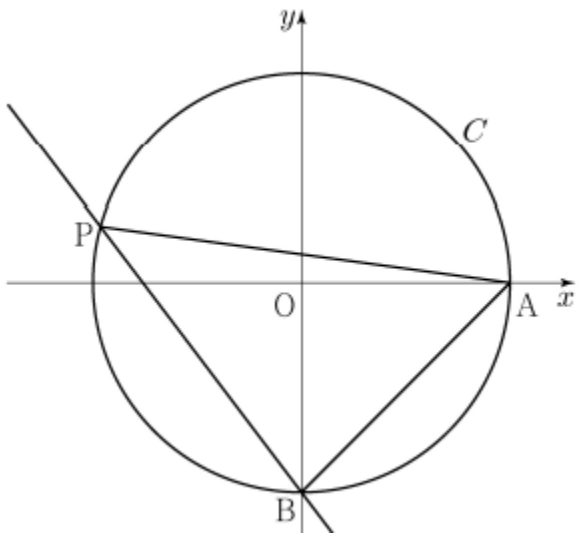
(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이다.

$\int_{0}^{a} e^x f(x)dx=me^a-19$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

37. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 A(2, 0), B(0, −2)가 있다. 원 C 위에 있고 x 좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자. 점 Q(0, $2\cos\theta$)에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

2021. 9월 수능 모의평가

38. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$
(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 10월 학력평가

39. 함수 $f(x)=\sin(ax)\,(a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx\ge\frac{1}{2}$
(나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여
$$\int_0^{3\pi}|f(x)+t|dx=\int_0^{3\pi}|f(x)-t|dx$$
이다.

2021. 11월 대학수학능력시험

40. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$이 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020. 7월 학력평가

41. 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가
$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$
일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은? [4점]

① −4 ② −2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2020. 7월 학력평가

42. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를
$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\,(0<x<12)$$
라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, …, α_m(m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
(나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2020. 9월 수능 모의평가

43. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020. 9월 수능 모의평가

44. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

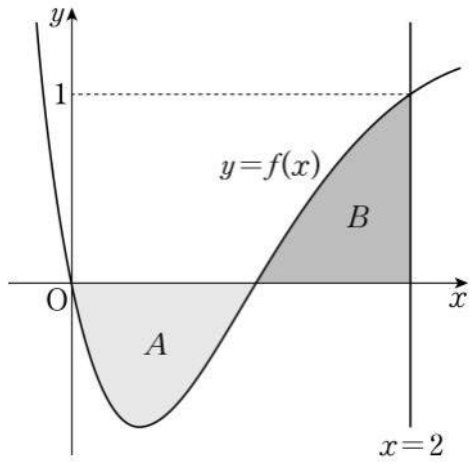
$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt\ \ (x\ge 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

2020. 10월 학력평가

45. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때, $\int_0^2 (2x+3)f'(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]



2020. 10월 학력평가

46. 최고차항의 계수가 $k(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\ne 0$이다. 함수 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}$ $(a<0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\le 0$을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.

(나) $\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

2020. 10월 학력평가

47. 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

2020. 11월 대학수학능력시험

48. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_{-1}^1 h(x)dx=2,\ \int_{-1}^1 xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$

이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 13 이차곡선

2023. 3월 학력평가

1. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ 8

2023. 6월 수능 모의평가

2. 포물선 $y^2=-12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

2022. 3월 학력평가

3. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2021. 3월 학력평가

4. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, 선분 FF′의 길이는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 3월 학력평가

5. 포물선 $x^2=8y$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

2023. 3월 학력평가

6. 한 초점이 F(3, 0)이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것을 l이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

2023. 3월 학력평가

7. 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 포물선과 만나는 두 점을 A(a, b), B(c, d)라 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

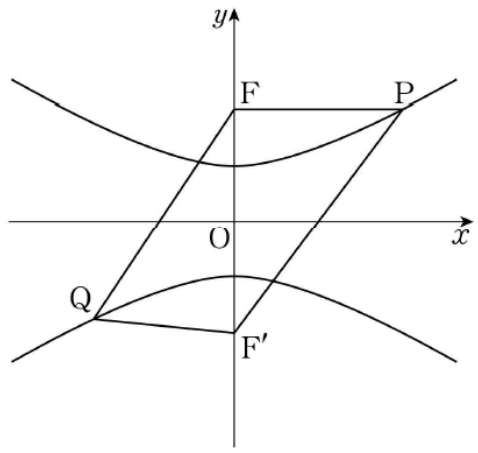
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 3월 학력평가

8. 그림과 같이 두 초점이 F(, c), F′(0, $-c$) ($c>0$)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$이 있다. 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 쌍곡선 위의 제3사분면에 있는 점 Q가

$$\overline{PF'}-\overline{QF'}=5,\ \overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{QF}$$

를 만족시킬 때, $\overline{PF}+\overline{QF}$의 값은? [3점]



① 10 ② $\frac{35}{3}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ 15 ⑤ $\frac{50}{3}$

2023. 4월 학력평가

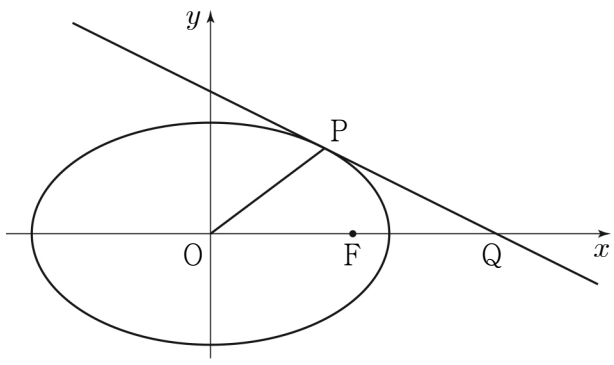
9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는?(단, a는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 4월 학력평가

10. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{OF}=\overline{FQ}$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2023. 4월 학력평가

11. 두 초점이 $F(3\sqrt{3}, 0)$, $F'(-3\sqrt{3}, 0)$인 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF′이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF가 정삼각형일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

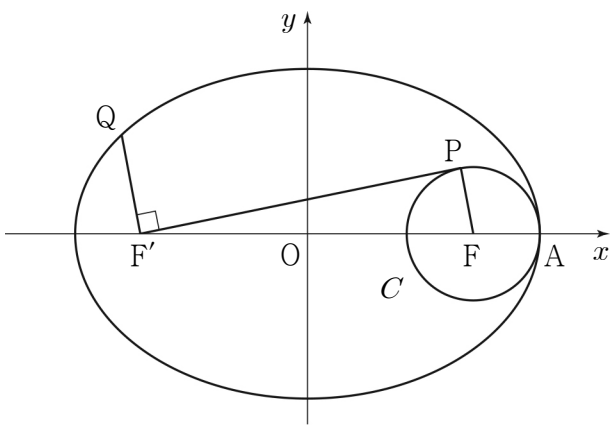
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 4월 학력평가

12. 그림과 같이 두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$을 초점으로 하는 타원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 y좌표가 양수인 점 P와 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PF′은 원 C에 접한다. (나) 두 직선 PF′, QF′은 서로 수직이다.

$\overline{QF'}=\frac{3}{2}\overline{PF}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? (단, $\overline{AF}<\overline{FF'}$) [3점]



① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$

2023. 6월 수능 모의평가

13. 두 초점이 $F(12, 0)$, $F'(-4, 0)$이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{F'F}=\overline{F'P}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 F′P의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{PF}+a^2+b^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 46 ② 52 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70

2023. 6월 수능 모의평가

14. 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 $A(0, 2)$에 대하여 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자. $\overline{OQ}+\overline{QA}=\overline{OP_0}+\overline{P_0A}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2023. 7월 학력평가

15. 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 (a, b)에서의 접선이 점 $(8, 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

2023. 7월 학력평가

16. 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2023. 9월 수능 모의평가

17. 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7, 6)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

18. 양수 p에 대하여 좌표평면 위에 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$가 있다. 이 포물선이 세 직선 $x=p$, $x=2p$, $x=3p$와 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자. $\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=27$일 때, p의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

2023. 10월 학력평가

19. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

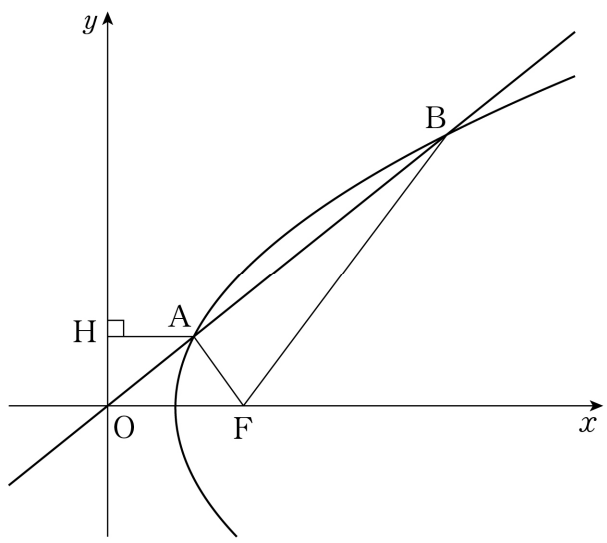
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 6

2023. 10월 학력평가

20. 그림과 같이 초점이 F(2, 0)이고 x축을 축으로 하는 포물선이 원점 O를 지나는 직선과 제1사분면 위의 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{AF}:\overline{BF}=1:4$

일 때, 선분 AF의 길이는? [3점]



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

2023. 11월 대학수학능력시험

21. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3}, -2)$에서의 접선의 기울기는?(단, a는 양수이다.)[3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

2023. 11월 대학수학능력시험

22. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는?(단, $\overline{CF}<\overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.)[3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$
④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

2022. 3월 학력평가

23. 두 초점의 좌표가 (0, 3), (0, −3)인 타원이 y축과 점 (0, 7)에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$
④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

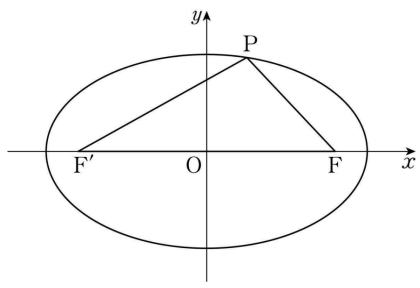
2022. 3월 학력평가

24. 쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

2022. 3월 학력평가

25. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]



① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 3월 학력평가

26. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은? [3점]

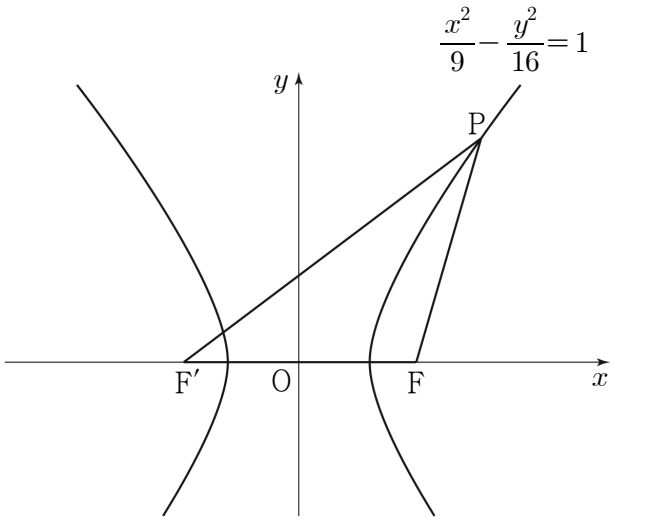
(가) 점 Q는 선분 FH를 1:2로 내분한다.

(나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

2022. 4월 학력평가

27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF}'}$일 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? [3점]

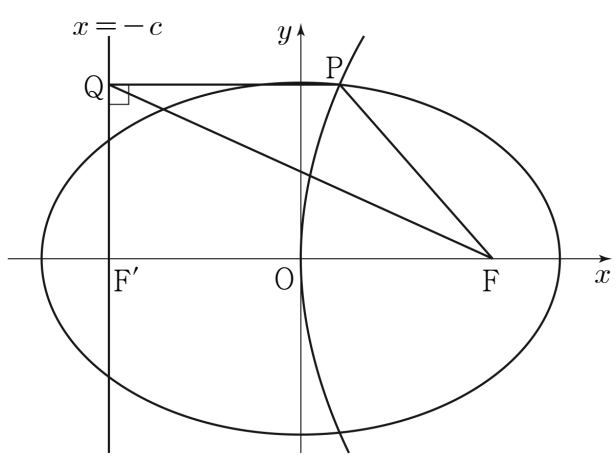


① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

2022. 4월 학력평가

28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 꼭짓점이 원점 O이고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 있다. 타원과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 직선 $x=-c$에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

$\overline{\mathrm{FP}}=8$이고 삼각형 FPQ의 넓이가 24일 때, 타원의 장축의 길이는? [3점]



① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

2022. 4월 학력평가

29. y축 위의 점 A에서 타원 $C:\frac{x^2}{8}+y^2=1$에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 타원 C와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 점 A의 y좌표는 1보다 크다.) [3점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

2022. 6월 수능 모의평가

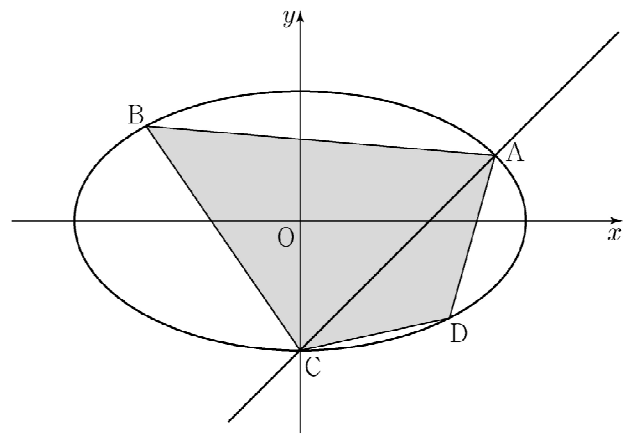
30. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$
④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

2022. 6월 수능 모의평가

31. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



2022. 7월 학력평가

32. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 (a,b)일 때, $a+b$의 값은? [3점]

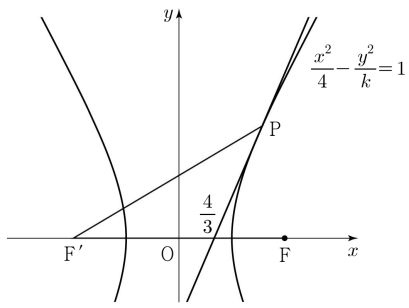
① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 7월 학력평가

33. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{FF}'}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



2022. 9월 수능 모의평가

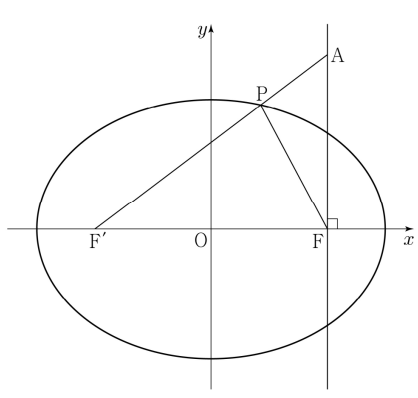
34. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a, \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 9월 수능 모의평가

35. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{\mathrm{AF}'}=5$, $\overline{\mathrm{AF}}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.)[3점]

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10



2022. 10월 학력평가

36. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하고 기울기가 2인 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $8\sqrt{2}$ ② 12 ③ $10\sqrt{2}$ ④ 15 ⑤ $12\sqrt{2}$

2022. 10월 학력평가

37. 양수 p에 대하여 두 포물선 $x^2=8(y+2)$, $y^2=4px$가 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 포물선 $x^2=8(y+2)$의 준선에 내린 수선의 발 H와 포물선 $x^2=8(y+2)$의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PF}}=40$일 때, p의 값은? [3점]

① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

2022. 11월 대학수학능력시험

38. 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a, 2)$를 지날 때, a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022. 11월 대학수학능력시험

39. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는?(단, a, b는 양수이다.)[3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

2021. 3월 학력평가

40. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 양수 c의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2021. 3월 학력평가

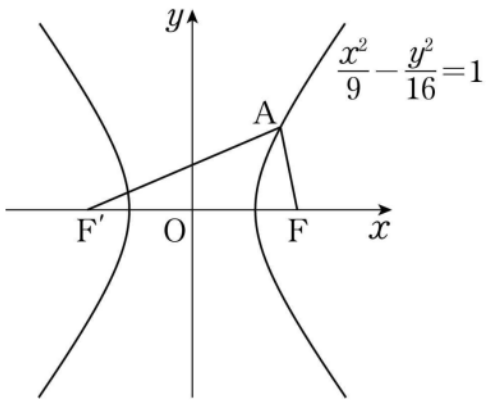
41. 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 3월 학력평가

42. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24일 때, 삼각형 AF′F의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면의 점이다.) [3점]

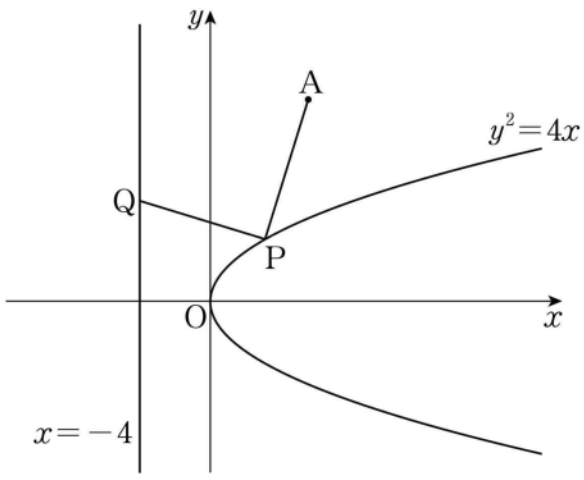


① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{6}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

2021. 3월 학력평가

43. 점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



2021. 4월 학력평가

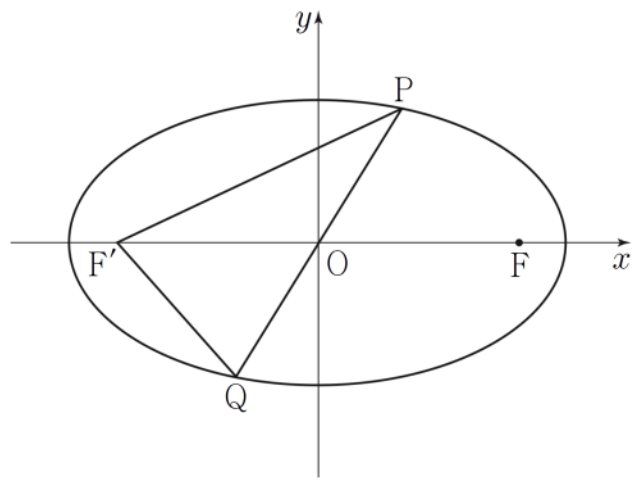
44. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 (4, 7)에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2021. 4월 학력평가

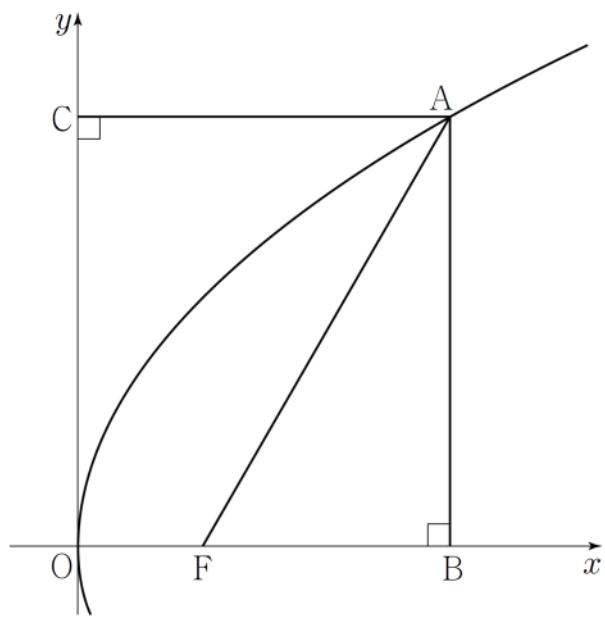
45. 좌표평면 위에 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$이 있다. 타원 위의 두 점 P, Q에 대하여 직선 PQ가 원점 O를 지나고 삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20일 때, 선분 OP의 길이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



2021. 4월 학력평가

46. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. $\overline{FA}=8$이고 사각형 OFAC의 넓이와 삼각형 FBA의 넓이의 비가 2 : 1일 때, 삼각형 ACF의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, 점 A의 x좌표는 p보다 크다.) [3점]

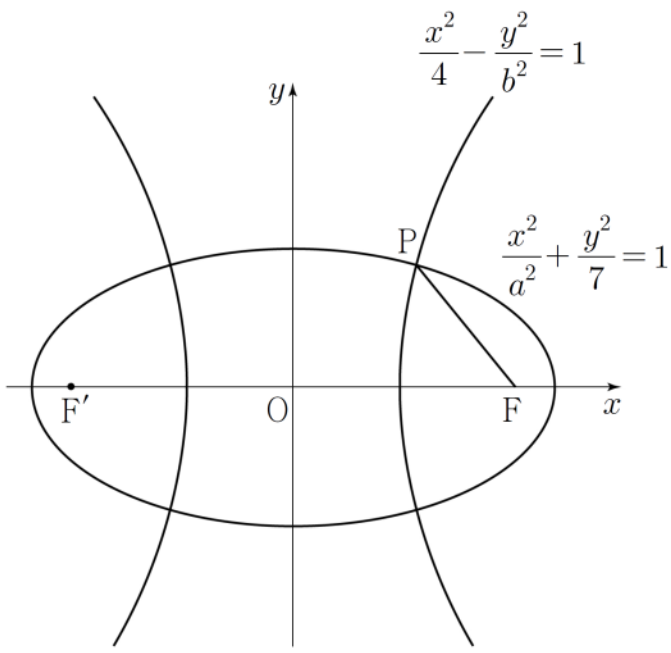


① $\frac{27}{2}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ 18 ④ $12\sqrt{3}$ ⑤ 24

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 4월 학력평가

47. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$(-c, 0)$$(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

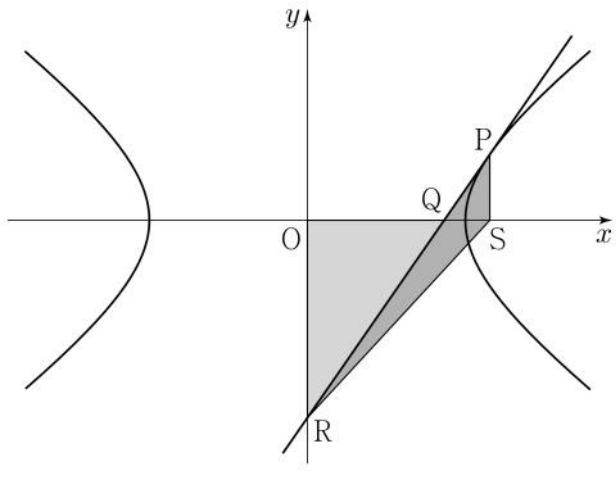
2021. 6월 수능 모의평가

48. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

2021. 6월 수능 모의평가

49. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(4, k)$$(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 S$(4, 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

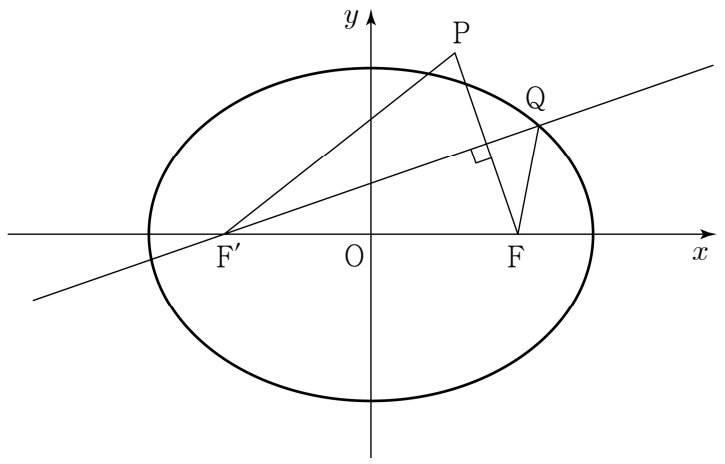
2021. 7월 학력평가

50. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 기울기가 2일 때, ab의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

2021. 7월 학력평가

51. 그림과 같이 두 점 F$(\sqrt{7}, 0)$, F′$(-\sqrt{7}, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. $\overline{FF'}=\overline{PF'}$, $\overline{FP}=2\sqrt{3}$을 만족시키는 점 P에 대하여 점 F′을 지나고 선분 FP에 수직인 직선이 타원과 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 Q라 할 때, 선분 FQ의 길이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

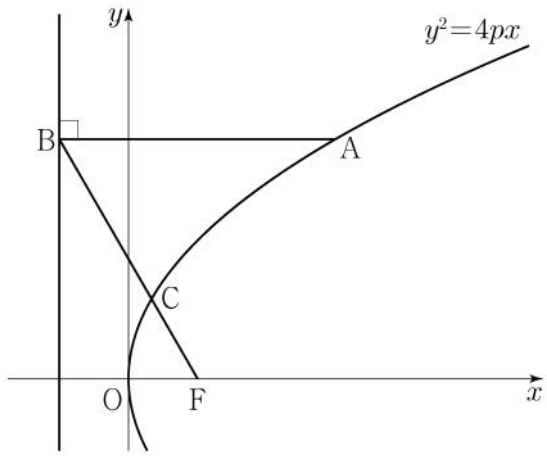


① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

2021. 9월 수능 모의평가

52. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 9월 수능 모의평가

53. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

2021. 10월 학력평가

54. 양수 a에 대하여 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$과 포물선 $y^2=ax$에 동시에 접할 때, 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

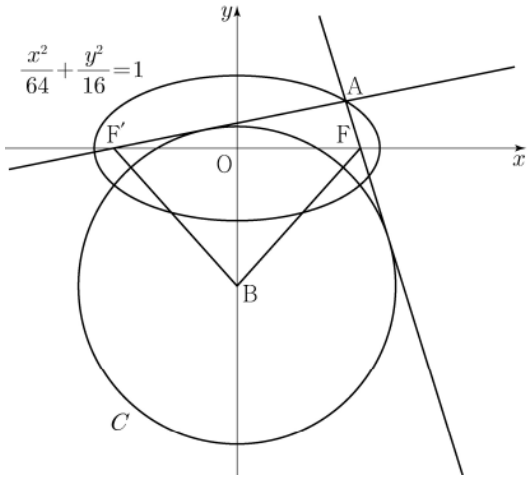
2021. 11월 대학수학능력시험

55. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이는?(단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

2021. 11월 대학수학능력시험

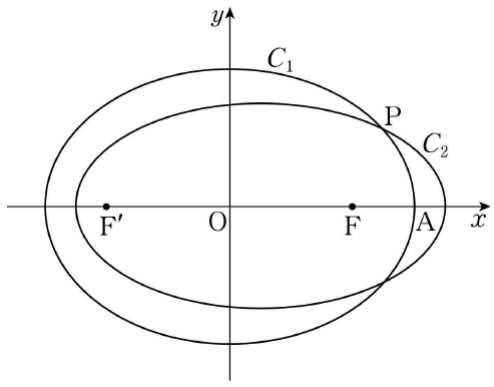
56. 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제 1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF′에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때, 사각형 AFBF′의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]



① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

2023. 3월 학력평가

57. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 A$(3, 0)$, F′$(-c, 0)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\cos(\angle AFP)=\frac{3}{8}$일 때, 삼각형 PFA의 둘레의 길이는? [4점]

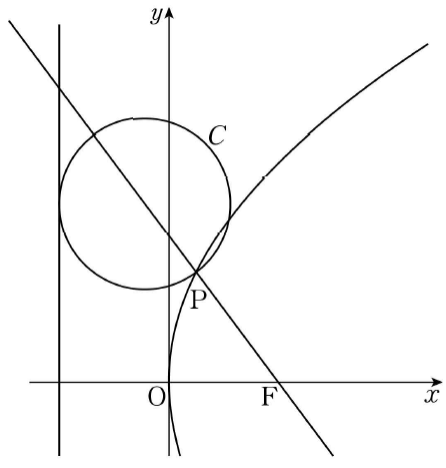


① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

2023. 3월 학력평가

58. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자.

직선 FP 위의 점을 중심으로 하는 원 C가 점 P를 지나고, 포물선의 준선에 접한다. 원 C의 반지름의 길이가 3일 때, $25p$의 값을 구하시오. (단, 원 C의 중심의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.) [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 3월 학력평가

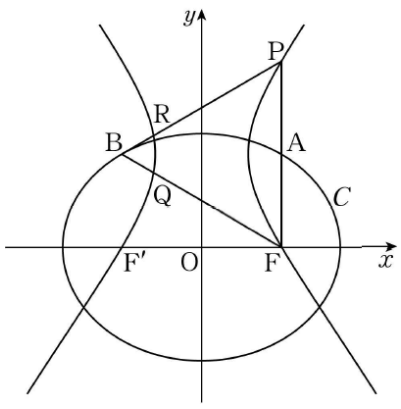
59. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자.

두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자.

세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
> (나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.

$60\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오. [4점]



2023. 4월 학력평가

60. 초점이 F인 포물선 $C: y^2=4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다.

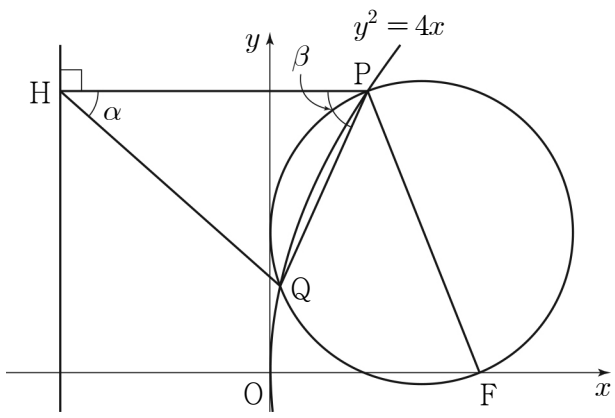
원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q,

점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle\mathrm{QHP}=\alpha$, $\angle\mathrm{HPQ}=\beta$라 할 때, $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=3$이다.

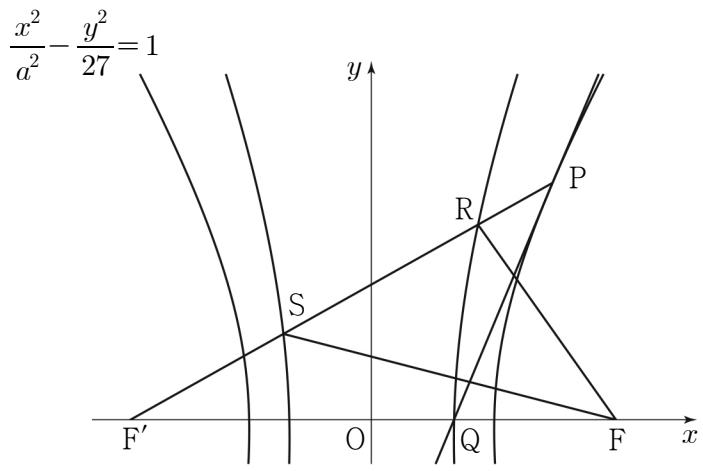
$\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\dfrac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\dfrac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\dfrac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$



2023. 4월 학력평가

61. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},k\right)(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF′과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{RF}}+8$일 때, $4\times(a^2+k^2)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.) [4점]



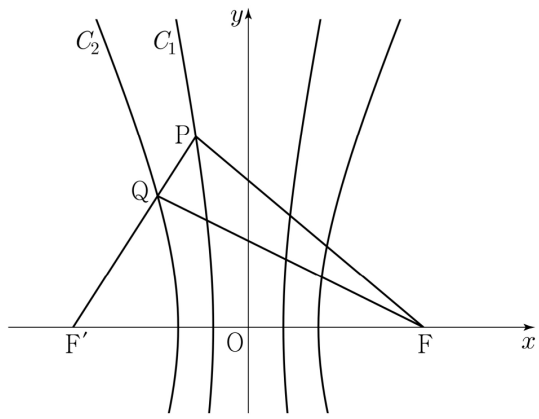
2023. 6월 수능 모의평가

62. 두 점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1: x^2-\frac{y^2}{24}=1,\ C_2: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$

이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF′이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF}'}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

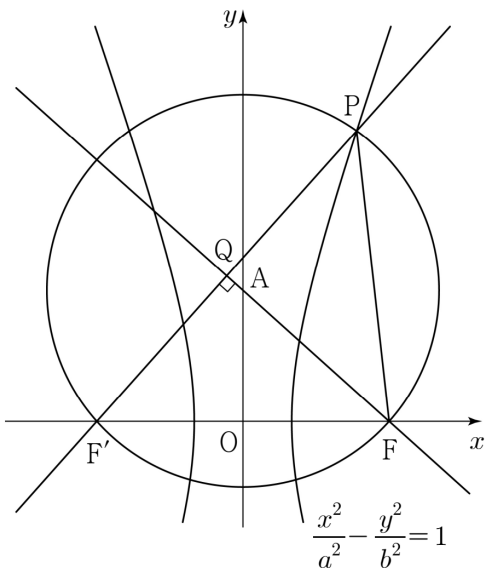
2023. 7월 학력평가

63. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0, 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF′, AF가 만나는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{PF}'}=3:4,\ \angle \mathrm{F}'\mathrm{QF}=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, b^2-a^2의 값은? (단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.) [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

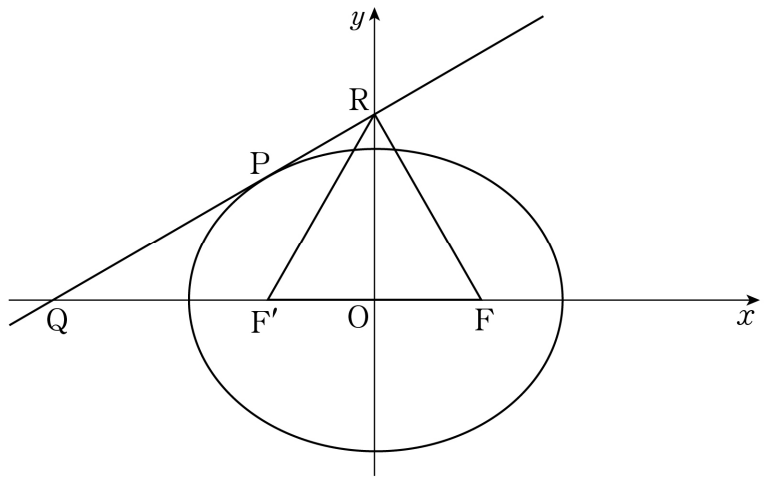


2023. 9월 수능 모의평가

64. 한 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2, 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오. [4점]

2023. 10월 학력평가

65. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{18}=1$이 있다. 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. 삼각형 RF′F가 정삼각형이고 점 F′은 선분 QF의 중점일 때, c^2의 값은? (단, a는 양수이다.) [4점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2023. 11월 대학수학능력시험

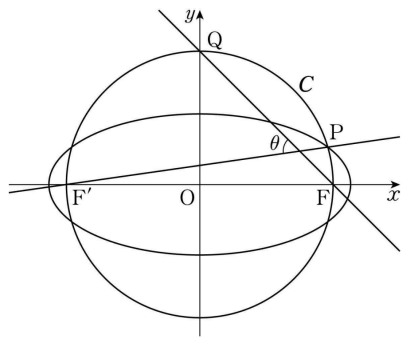
66. 양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 점 P는 제 1사분면 위에 있고, 점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
(나) 삼각형 PF′F는 이등변 삼각형이다.
(다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 3월 학력평가

67. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F′P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\frac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, a, b는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① $\frac{11}{64}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{13}{64}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{15}{64}$

2022. 3월 학력평가

68. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AF}<\overline{AF'}$
(나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F′을 지난다.

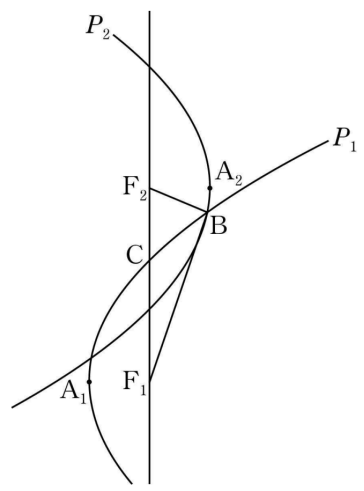
선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF′과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

2022. 3월 학력평가

69. 그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 F_1F_2와 평행하고, 두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치한다. 두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 F_1F_2와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{A_1C}=5\sqrt{5}$
(나) $\overline{F_1B}-\overline{F_2B}=\frac{48}{5}$

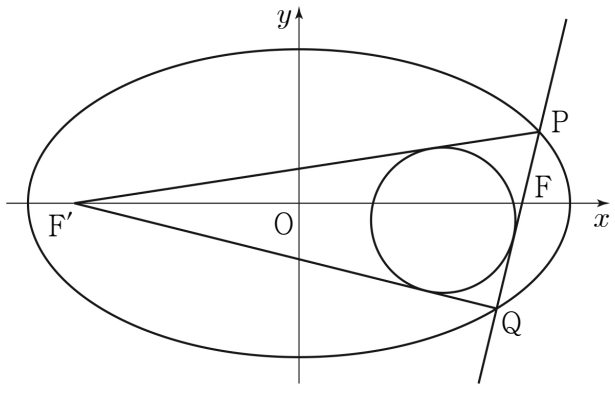
삼각형 BF_2F_1의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오. (단, $\angle F_1F_2B<90^\circ$) [4점]



2022. 4월 학력평가

70. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF가 타원과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OF}$, $\overline{FQ}:\overline{F'Q}=1:4$이고 삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이가 2일 때, 양수 c의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{17}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{17}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ ④ $\frac{51}{8}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{17}}{5}$

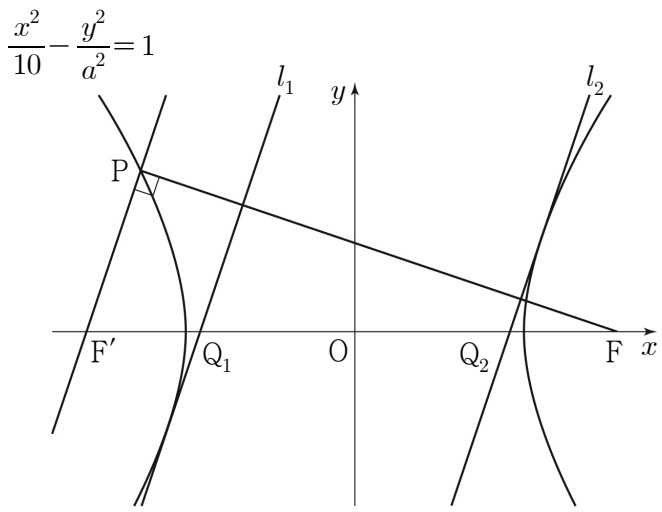
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 4월 학력평가

71. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$에 대하여 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 $x=-p$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선 $x=-p$에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자. $\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이 되도록 하는 상수 p의 값을 구하시오. [4점]

2022. 4월 학력평가

72. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 F′FP는 넓이가 15이고 $\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 직선 PF′과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2라 할 때, $\overline{Q_1Q_2}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, a는 양수이다.) [4점]



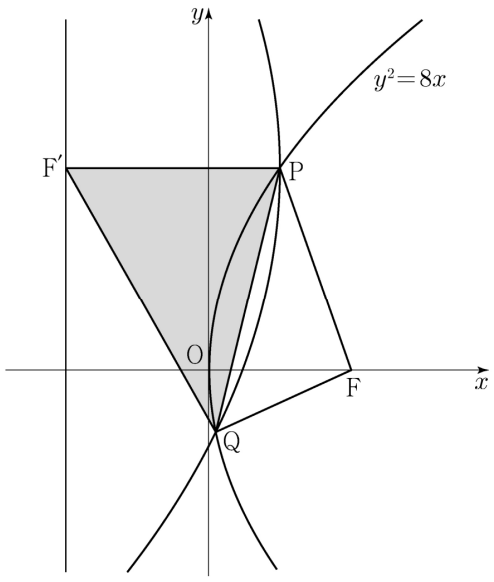
2022. 6월 수능 모의평가

73. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $A(c, 0)$, $B(-c, 0)(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3, 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

2022. 6월 수능 모의평가

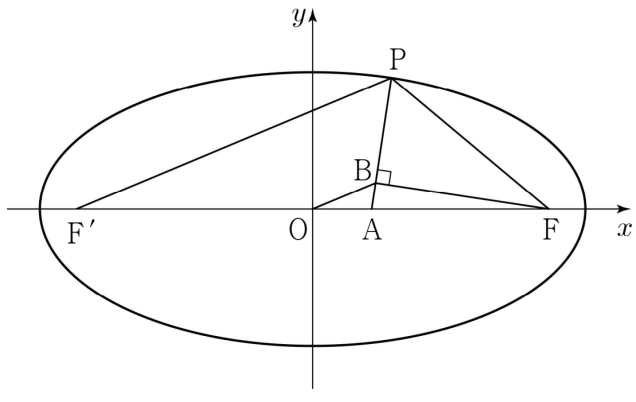
74. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2022. 7월 학력평가

75. 그림과 같이 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 $\angle FPA=\angle F'PA$를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{OB}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은?

(단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.) [4점]



① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

꿈을 현실로! 희망 부산교육

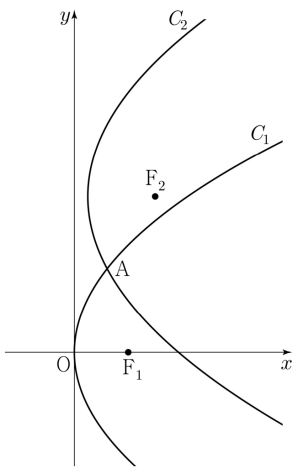
2022. 9월 수능 모의평가

76. 실수 $p(p \geq 1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 4x, \quad C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x-f(p)\}$$

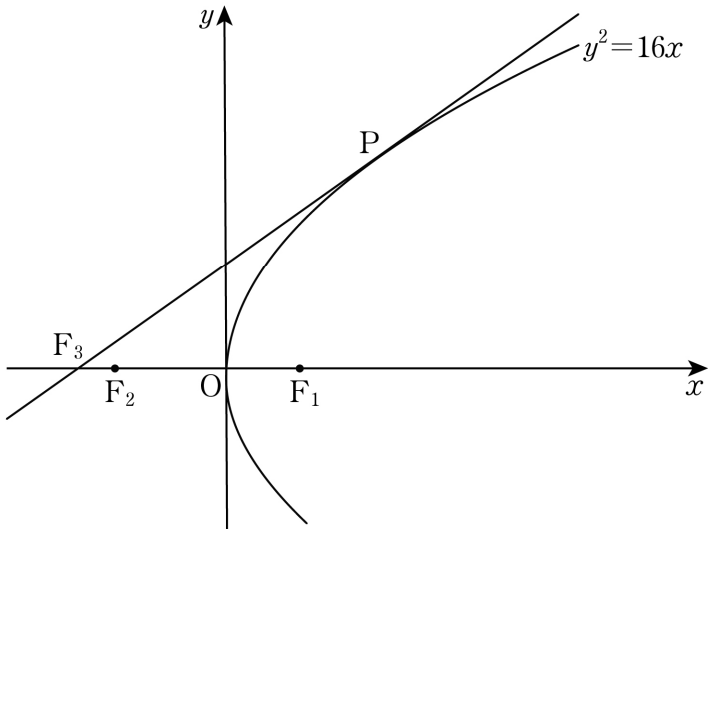
가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은?[4점]

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$



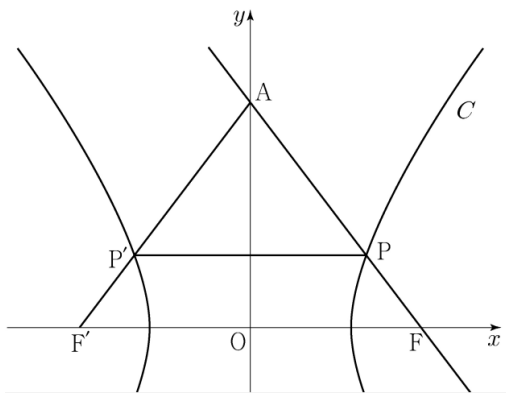
2022. 10월 학력평가

77. 두 점 $F_1(4, 0)$, $F_2(-6, 0)$에 대하여 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$을 만족시킨다. 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 F_3이라 하면 두 점 F_1, F_3을 초점으로 하는 타원의 한 꼭짓점은 선분 PF_3 위에 있다. 이 타원의 장축의 길이가 $2a$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



2022. 11월 대학수학능력시험

78. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자. 직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고 $\overline{AP} : \overline{PP'}=5 : 6$, $\overline{PF}=1$일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는?[4점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2021. 3월 학력평가

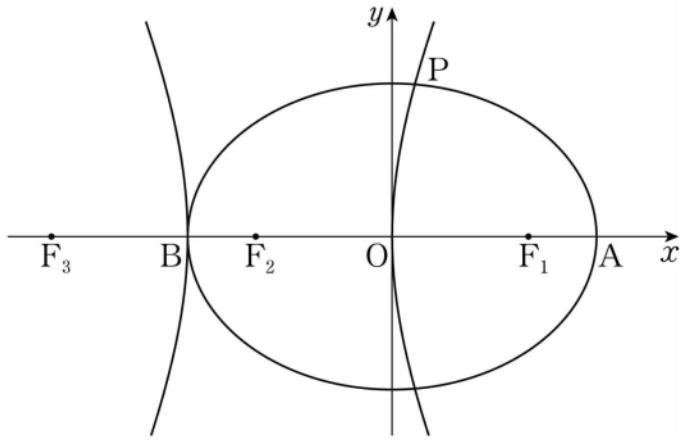
79. 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{FP_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{8}\overline{OP_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면에 있다.) [4점]

① 874 ② 876 ③ 878 ④ 880 ⑤ 882

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 3월 학력평가

80. 두 초점이 $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 A(3, 0), B(−3, 0)에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

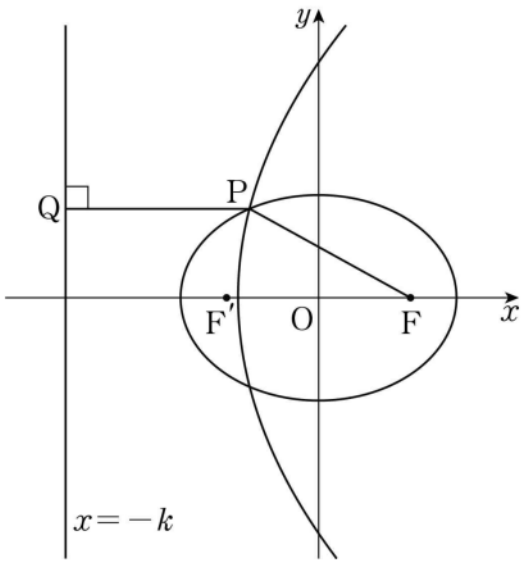


2021. 3월 학력평가

81. 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$
(나) $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$

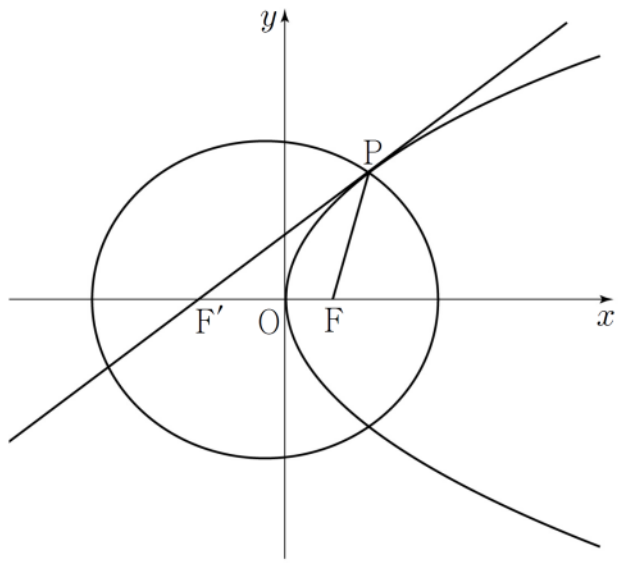
$c+k$의 값을 구하시오. [4점]



2021. 4월 학력평가

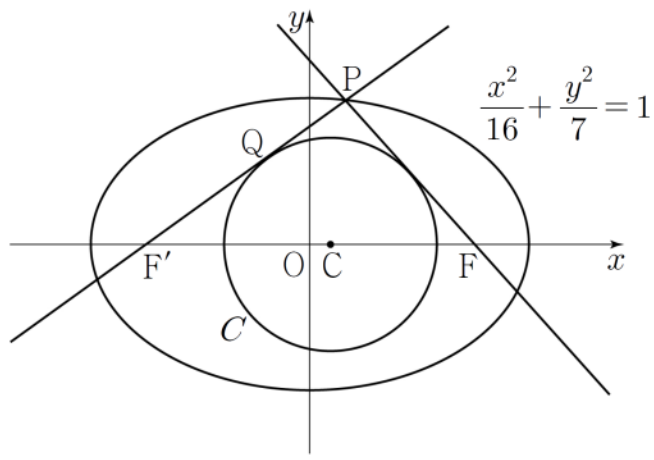
82. 좌표평면에서 두 점 $F\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$, $F'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]

① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14 ④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15



2021. 4월 학력평가

83. 그림과 같이 두 점 $F(c,\ 0)$, $F(-c,\ 0)(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 선분 F′F 위에 있는 원 C가 있다. 원 C의 중심을 C, 직선 F′P가 원 C와 만나는 점을 Q라 할 때, $2\overline{PQ}=\overline{PF}$이다. $24\times\overline{CP}$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

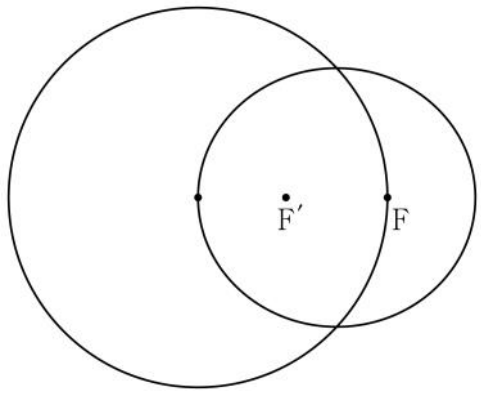


꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 6월 수능 모의평가

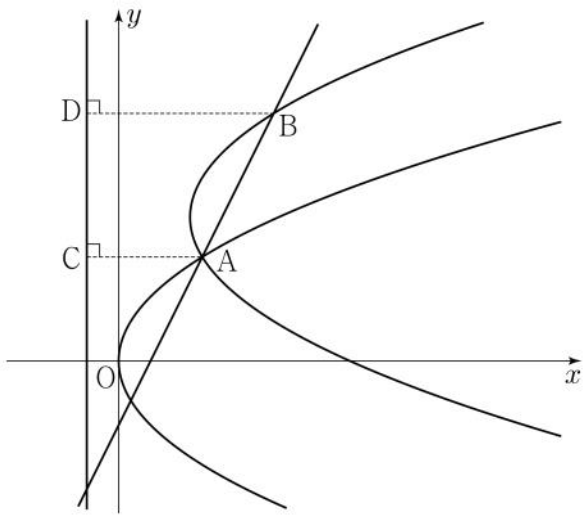
84. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$ ④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



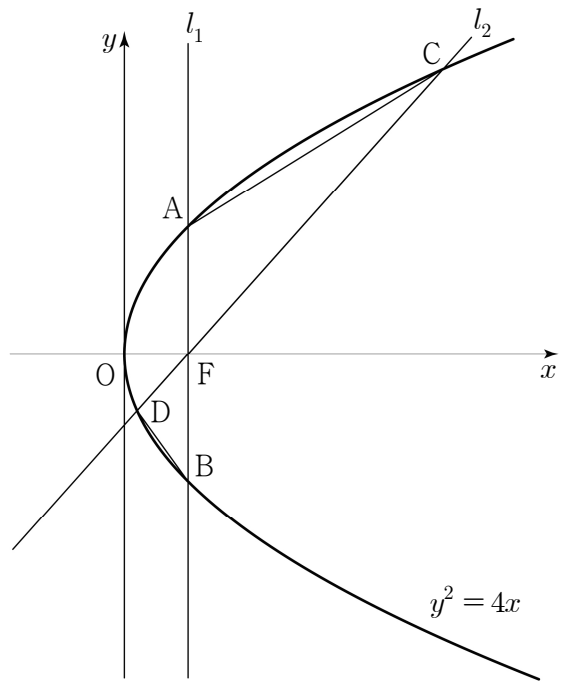
2021. 6월 수능 모의평가

85. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



2021. 7월 학력평가

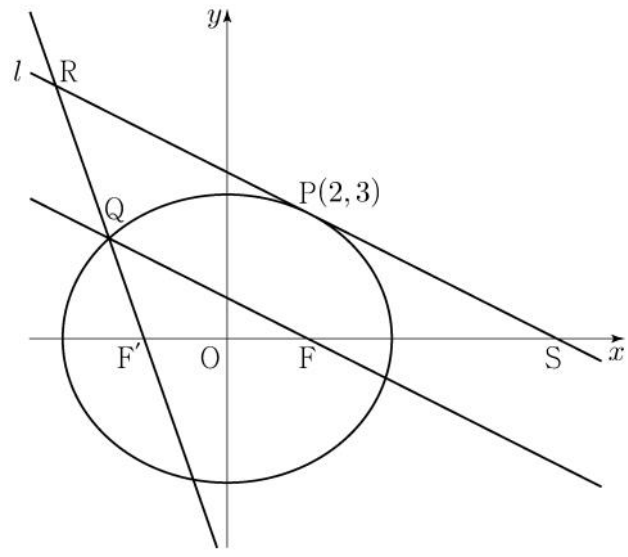
86. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나고 x축과 수직인 직선 l_1이 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 F를 지나고 기울기가 m $(m>0)$인 직선 l_2가 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배일 때, m의 값은? (단, 두 점 A, C는 제1사분면 위의 점이고, 두 점 B, D는 제4사분면 위의 점이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

2021. 9월 수능 모의평가

87. 그림과 같이 두 점 F(c, 0), F′(−c, 0) $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P(2, 3)에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F′Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는? [4점]

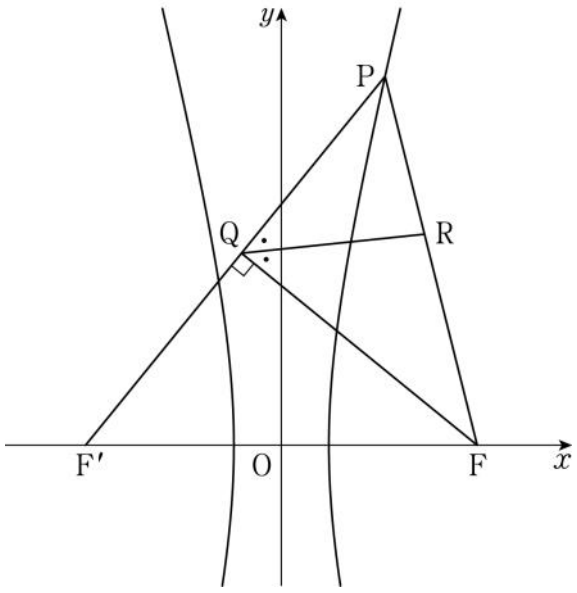


① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

꿈을 현실로!
희망 부산교육

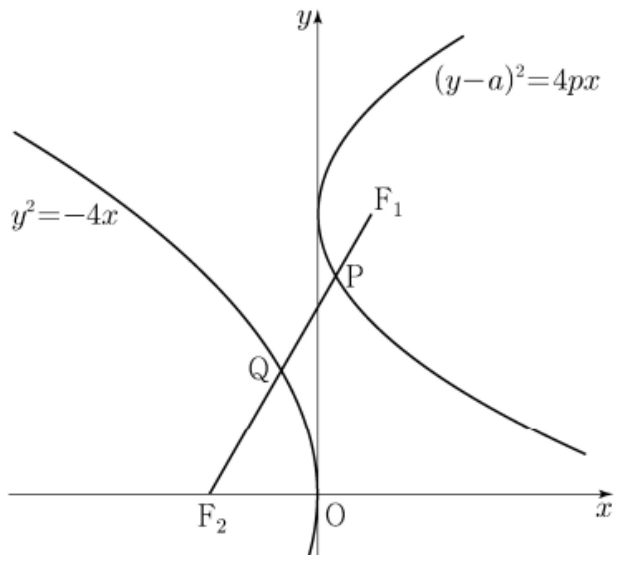
2021. 10월 학력평가

88. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\angle FQP$의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자. $4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, $\angle F'PF<90°$이다.) [4점]



2021. 11월 대학수학능력시험

89. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]



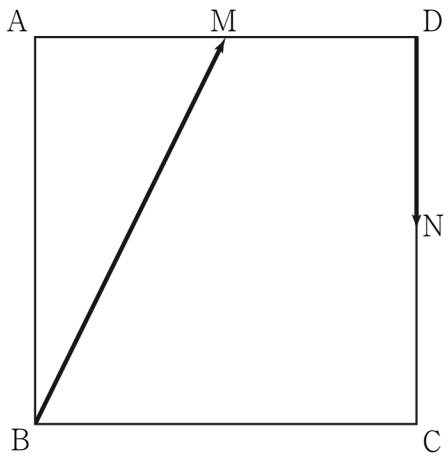
① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 14 평면벡터

2023. 4월 학력평가

1. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 선분 AD, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|$의 값은? [2점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

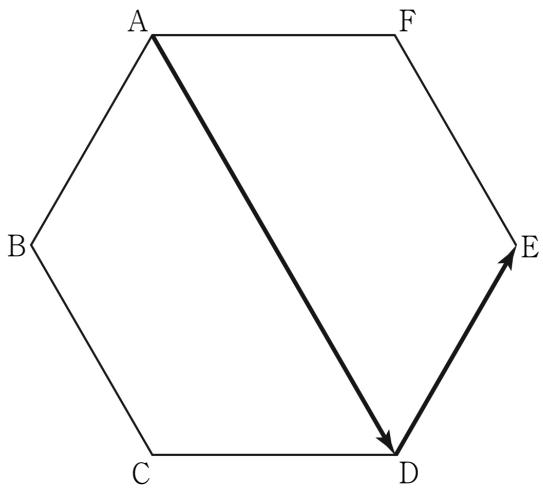
2023. 7월 학력평가

2. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{b}=(4, -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2022. 4월 학력평가

3. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|$의 값은? [2점]



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

2022. 6월 수능 모의평가

4. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b}, \quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2022. 7월 학력평가

5. 두 벡터 $\vec{a}=(2m-1, 3m+1)$, $\vec{b}=(3, 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 4월 학력평가

6. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, $(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$를 만족시키는 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 6월 수능 모의평가

7. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3, 3k-1)$과 $\vec{b}=(1, 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 7월 학력평가

8. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 4)$, $\vec{b}=(-1, k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? [2점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

2021. 10월 학력평가

9. 두 벡터 $\vec{a}=(m-2, 3)$과 $\vec{b}=(2m+1, 9)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 6월 수능 모의평가

10. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{2AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$$

일 때, $p-q$의 값은? (단, p와 q는 실수이다.) [3점]

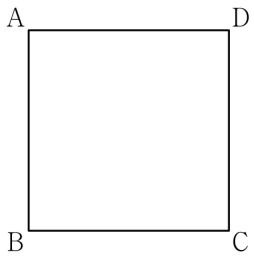
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 6월 수능 모의평가

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$$

일 때, 실수 k의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

2023. 7월 학력평가

12. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,-1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m: \frac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2023. 9월 수능 모의평가

13. 좌표평면 위의 점 A(4,3)에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?
(단, O는 원점이다.)[3점]

① 2π ② 4π ③ 6π ④ 8π ⑤ 10π

2023. 10월 학력평가

14. 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$는 서로 평행하다.
(나) $t\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

삼각형 ABD의 넓이가 12일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

2023. 11월 대학수학능력시험

15. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=\sqrt{11}$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$일 때, $|\vec{a}-\vec{b}|$의 값은?[3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

2022. 4월 학력평가

16. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은?
(단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2022. 6월 수능 모의평가

17. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

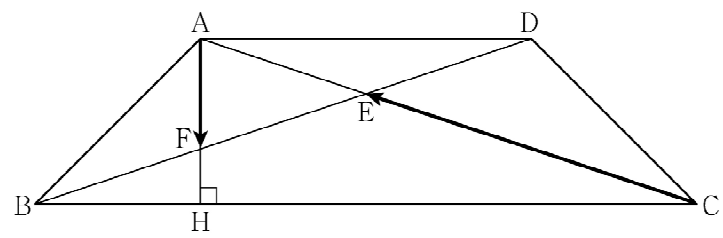
가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

2022. 6월 수능 모의평가

18. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45^\circ$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 7월 학력평가

19. 좌표평면에서 두 점 A(−2, 0), B(3, 3)에 대하여

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

2022. 9월 수능 모의평가

20. 좌표평면 위의 점 A(3, 0)에 대하여

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)[3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

2022. 10월 학력평가

21. 평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은? [3점]

(가) $|\overrightarrow{AB}|=2,\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$
(나) $|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=6$

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

2022. 11월 대학수학능력시험

22. 좌표평면에서 세 벡터 $\vec{a}=(2, 4)$, $\vec{b}=(2, 8)$, $\vec{c}=(1, 0)$에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$, $\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$($t$는 실수)를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은?[3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2021. 6월 수능 모의평가

23. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

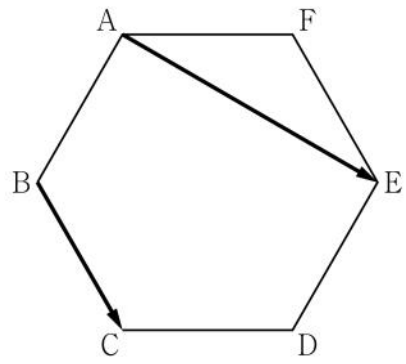
$$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

2021. 6월 수능 모의평가

24. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

2021. 7월 학력평가

25. 점 (2, 6)과 직선 $l: \frac{x-5}{2}=y-5$ 위의 한 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 직선 l의 방향벡터가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{OP}|$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 6

2021. 9월 수능 모의평가

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(3, 0),\quad \vec{b}=(1, 2),\quad \vec{c}=(4, 2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{q}-\vec{c}|=1$$

을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

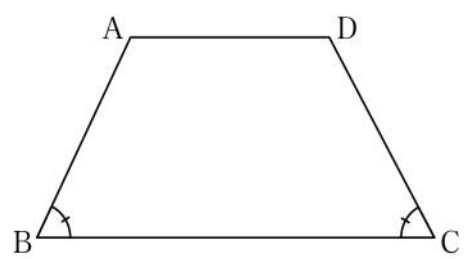
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 10월 학력평가

27. 그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고 $\angle CBA=\angle DCB$인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{AD}|=2,\ |\overrightarrow{BC}|=4,\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$$

일 때, $|\overrightarrow{BD}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 11월 대학수학능력시험

28. 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+1}{2}=y-3$, $x-2=\frac{y-5}{3}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

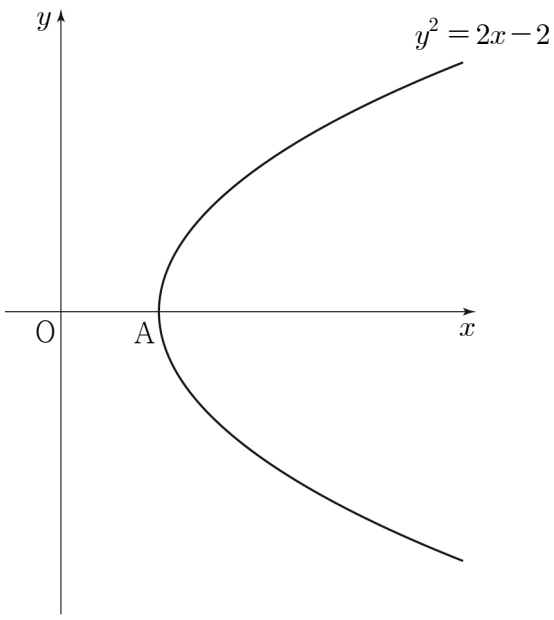
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2023. 4월 학력평가

29. 좌표평면에서 포물선 $y^2=2x-2$의 꼭짓점을 A라 하자. 이 포물선 위를 움직이는 점 P와 양의 실수 k에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



2023. 6월 수능 모의평가

30. 좌표평면의 네 점 A(2, 6), B(6, 2), C(4, 4), D(8, 6)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

(가) $\{(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}\}\times\{|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|-3\}=0$
(나) 두 벡터 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

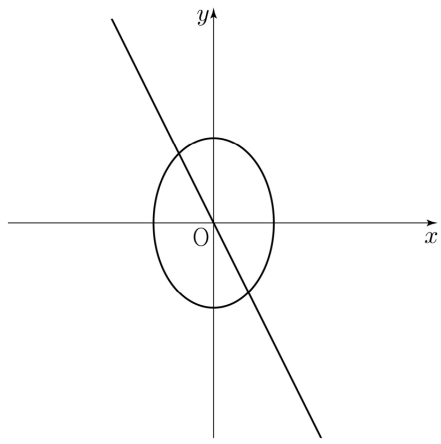
① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

2023. 6월 수능 모의평가

31. 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2023. 7월 학력평가

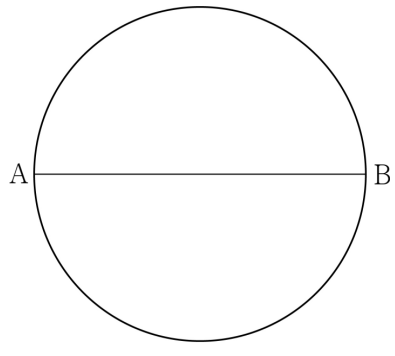
32. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=27,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=9,\ \overline{CD}>3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$
(나) $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

33. 좌표평면에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형APQ는 정삼각형이고, $9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$이다.
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$
(다) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

2023. 10월 학력평가

34. 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 제1사분면 위의 점 P가

$$|\overrightarrow{OP}|=2,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

을 만족시키고, 제1사분면 위의 점 Q가

$$|\overrightarrow{AQ}|=1,\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

2023. 11월 대학수학능력시험

35. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DF}|=|\overrightarrow{EQ}|=|\overrightarrow{FR}|=1$
(나) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

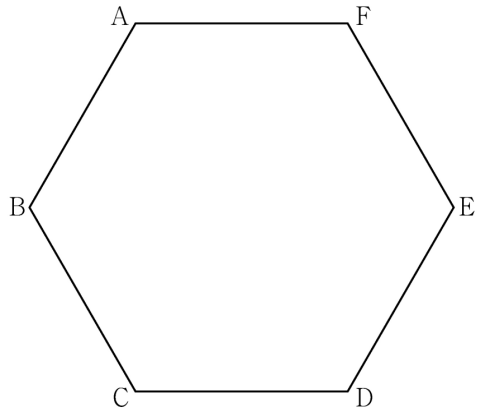
$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오.[4점]

2022. 6월 수능 모의평가

36. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

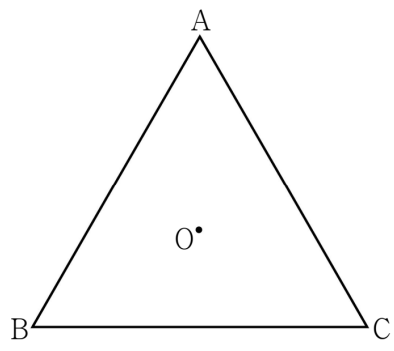
(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$
(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



2022. 7월 학력평가

37. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OA}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

2022. 9월 수능 모의평가

38. 좌표평면 위에 두 점 A(−2, 2), B(2, 2)가 있다.

$$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0, \quad |\overrightarrow{OX}| \geq 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1, 0)$에 대하여 $(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u}) \geq 0$이다.
(나) $|\overrightarrow{PQ}|=2$

$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

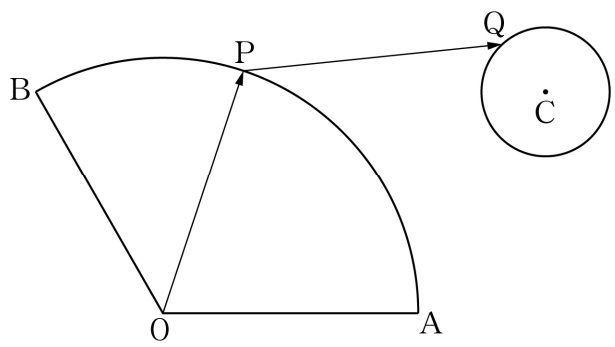
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

2022. 10월 학력평가

39. 그림과 같이 한 평면 위에 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB와 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$가

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}=24, \ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}=0$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

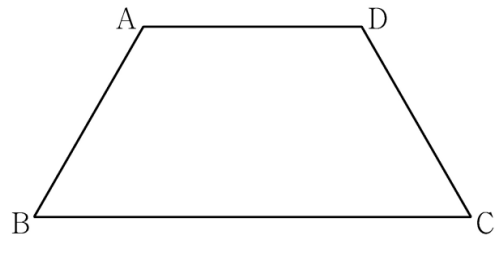


① $12\sqrt{3}-34$ ② $12\sqrt{3}-32$ ③ $16\sqrt{3}-36$
④ $16\sqrt{3}-34$ ⑤ $16\sqrt{3}-32$

2022. 11월 대학수학능력시험

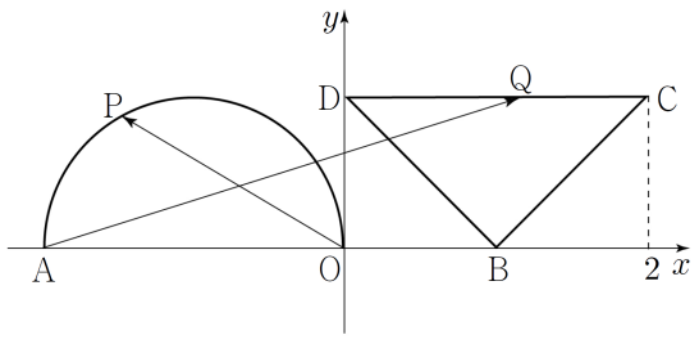
40. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오.[4점]

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$ (나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ}=6$
(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$



2021. 4월 학력평가

41. 좌표평면 위의 네 점 A(−2, 0), B(1, 0), C(2, 1), D(0, 1)이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1 (0 \leq y \leq 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



2021. 6월 수능 모의평가

42. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD})=0$
(나) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

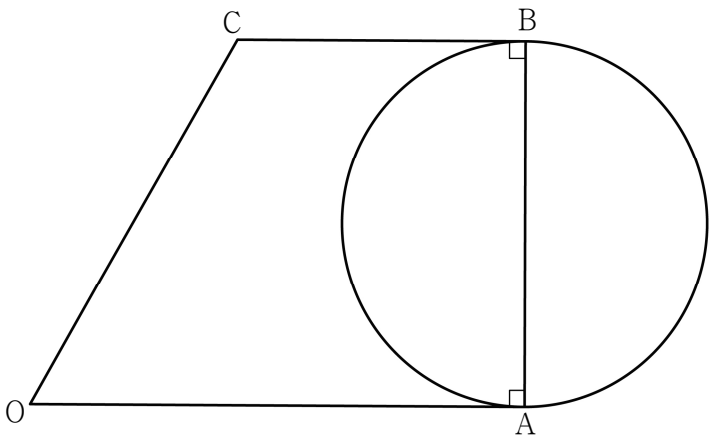
꿈을 현실로! 희망 부산교육

2021. 7월 학력평가

43. 평면 위에

$$\overline{OA}=2+2\sqrt{3},\ \overline{AB}=4,\ \angle COA=\frac{\pi}{3},\ \angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]



2021. 9월 수능 모의평가

44. 좌표평면에서 세 점 A(−3, 1), B(0, 2), C(1, 0)에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=2,\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자. 선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\ge 1$일 때, $\left|\overrightarrow{Q_0X}\right|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021. 10월 학력평가

45. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\ \dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$

(나) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|=-2|\overrightarrow{PC}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{PD}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

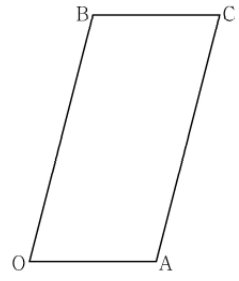
2021. 11월 대학수학능력시험

46. 좌표평면에서 $\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$

(나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\left|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}\right|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 15 공간도형과 공간좌표

2023. 9월 수능 모의평가

1. 좌표공간의 점 A(8, 6, 2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2023. 10월 학력평가

2. 좌표공간의 두 점 A(a, 0, 1), B(2, −3, 0)에 대하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 yz평면 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2023. 11월 대학수학능력시험

3. 좌표공간의 두 점 A(a, −2, 6), B(9, 2, b)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 (4, 0, 7)일 때, $a+b$의 값은?[2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2022. 9월 수능 모의평가

4. 좌표공간의 두 점 A(a, 1, −1), B(−5, b, 3)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 (8, 3, 1)일 때, $a+b$의 값은?[2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

2022. 10월 학력평가

5. 좌표공간의 두 점 A(3, a, −2), B(−1, 3, a)에 대하여 선분 AB의 중점이 xy평면 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2022. 11월 대학수학능력시험

6. 좌표공간의 점 A(2, 2, −1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점C(−2, 1, 1)에 대하여 선분 BC의 길이는?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 9월 수능 모의평가

7. 좌표공간의 점 A(3, 0, −2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C(0, 4, 2)에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021. 11월 대학수학능력시험

8. 좌표공간의 점 A(2, 1, 3)을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

2023. 7월 학력평가

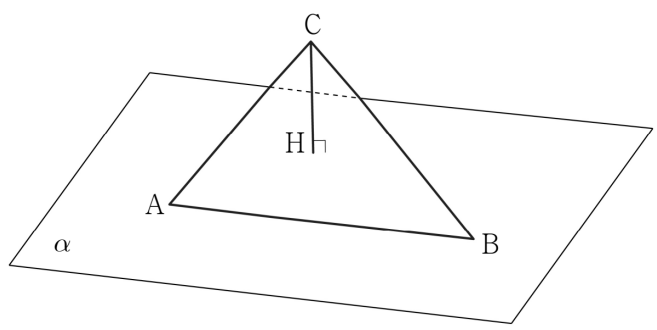
9. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle AHB=\frac{\pi}{2}$

(나) $\sin(\angle CAH)=\sin(\angle ABH)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.) [3점]

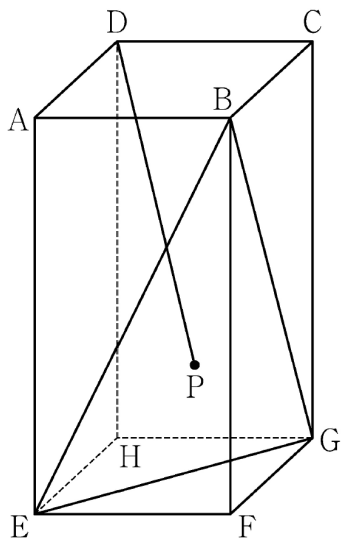
① $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 9월 수능 모의평가

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=6$인 직육면체 ABCD－EFGH가 있다. 삼각형 BEG의 무게중심을 P라 할 때, 선분 DP의 길이는? [3점]

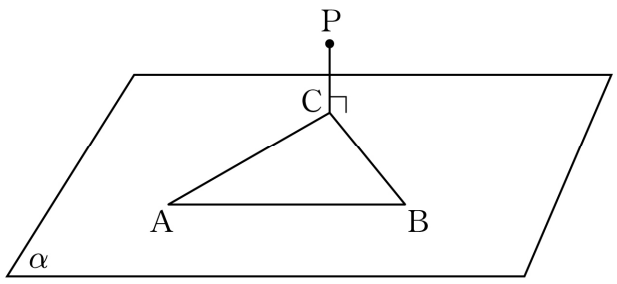


① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

2023. 10월 학력평가

11. 평면 α 위에 $\overline{AB}=6$이고 넓이가 12인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 C와 일치한다. $\overline{PC}=2$일 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는? [3점]

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$



2023. 11월 대학수학능력시험

12. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때, $\overline{AB}=\overline{A'B'}=6$이다.

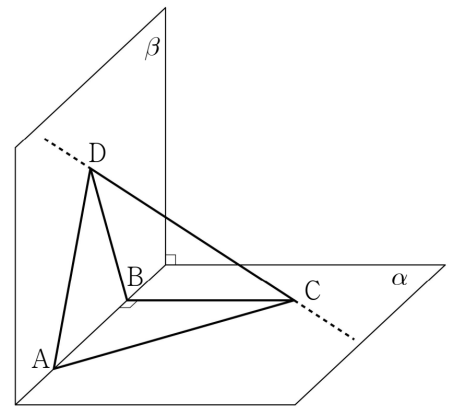
선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때, $\overline{PM'}\perp\overline{A'B'}$, $\overline{PM'}=6$이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다. 삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는?[3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

2022. 7월 학력평가

13. 공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6$인 점 C와 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=6$인 점 D가 있다. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

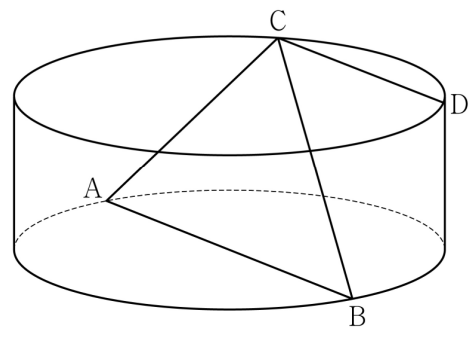
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{31}}{6}$



2022. 9월 수능 모의평가

14. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는?[3점]

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
(나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.

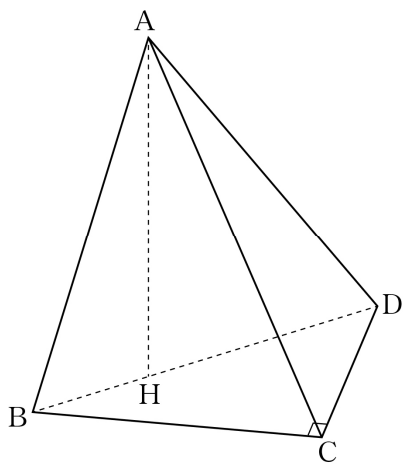


① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 10월 학력평가

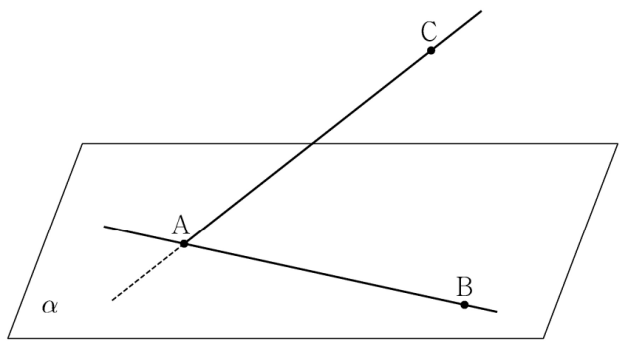
15. 그림과 같이 $\overline{BC}=\overline{CD}=3$이고 $\angle BCD=90°$인 사면체 ABCD가 있다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 선분 BD를 1:2로 내분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, 삼각형 AHC의 넓이는? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

2022. 11월 대학수학능력시험

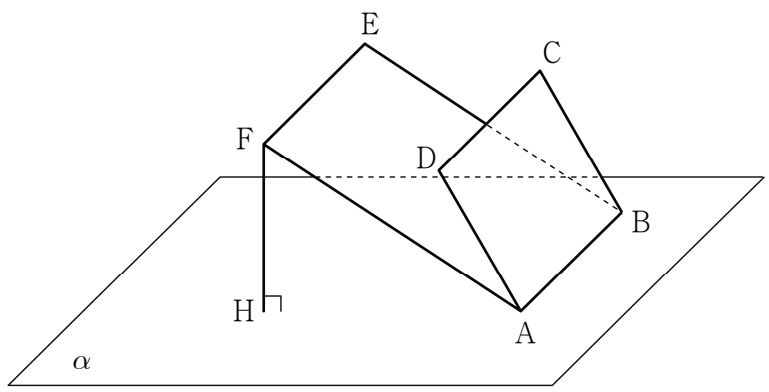
16. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때, $\sin\theta_1=\frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$

2021. 7월 학력평가

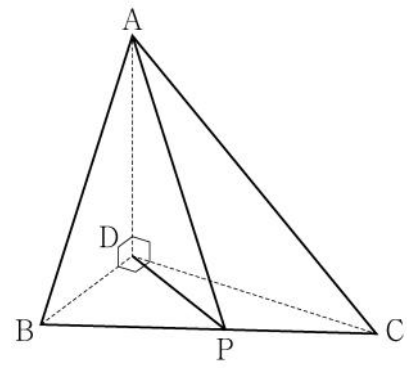
17. 그림과 같이 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 네 점 C, D, E, F가 있다. 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 6인 정사각형이고 사각형 ABEF는 $\overline{AF}=12$인 직사각형이다. 정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 18이고, 점 F의 평면 α 위로의 정사영을 H라 하면 $\overline{FH}=6$이다. 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이는? $\left(\text{단, } 0<\angle DAF<\frac{\pi}{2}\right)$ [3점]



① $12\sqrt{3}$ ② $15\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

2021. 9월 수능 모의평가

18. 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$이고 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=\frac{\pi}{2}$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{DP}$의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

2021. 10월 학력평가

19. 좌표공간의 두 점 A(−1, 1, −2), B(2, 4, 1)에 대하여 선분 AB가 xy평면과 만나는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

꿈을 현실로!
희망 부산교육

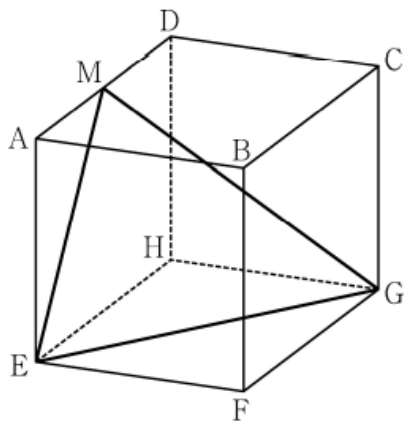
2021. 10월 학력평가

20. 좌표공간에 $\overline{OA}=7$인 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 25π이다. 구 S와 z축이 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $2\sqrt{46}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{13}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

2021. 11월 대학수학능력시험

21. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2023. 7월 학력평가

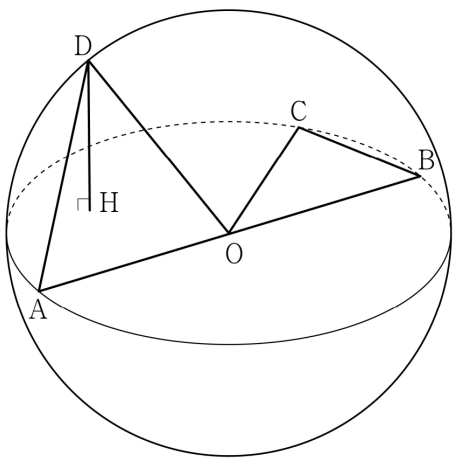
22. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB}=8,\ \overline{BC}=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다. (나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

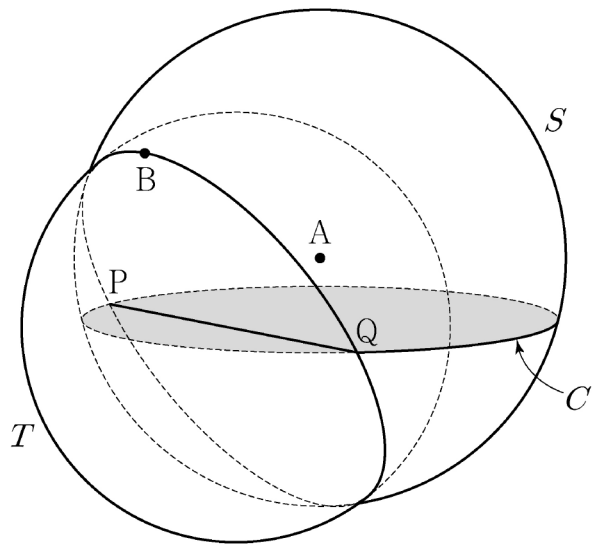
삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. (단, 점 H는 점 O가 아니다.) [4점]



2023. 9월 수능 모의평가

23. 좌표공간에 중심이 A$(0,0,1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은?[4점]

① 6 ② $3\sqrt{6}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

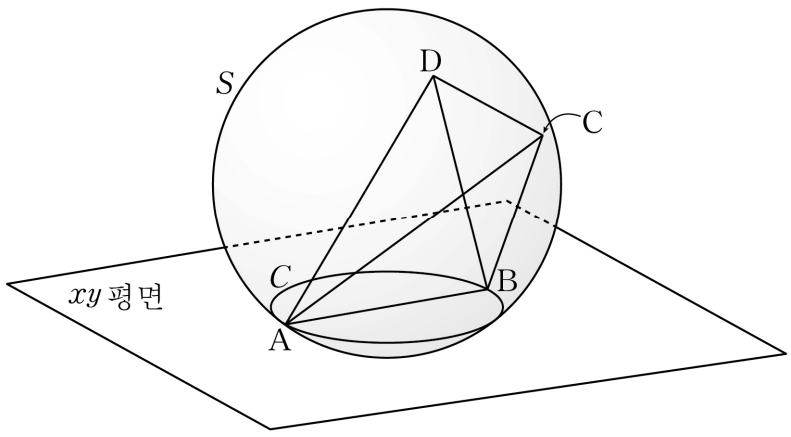


2023. 10월 학력평가

24. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-\sqrt{5})^2=9$가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB는 원 C의 지름이다. (나) 직선 AB는 평면 BCD에 수직이다. (다) $\overline{BC}=\overline{BD}=\sqrt{15}$

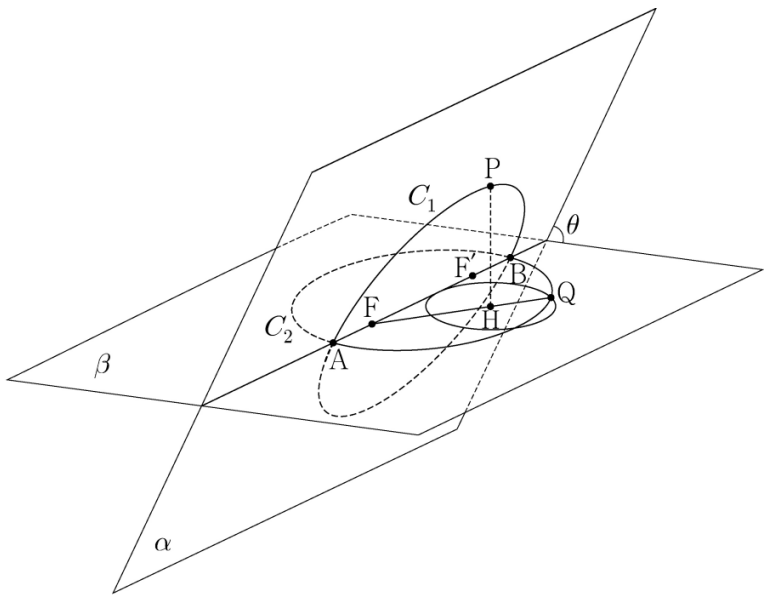
삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이를 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2023. 11월 대학수학능력시험

25. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'}<\overline{HF}$이고 $\angle HFF'=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH}<\overline{FQ}$이다., 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.)[4점]



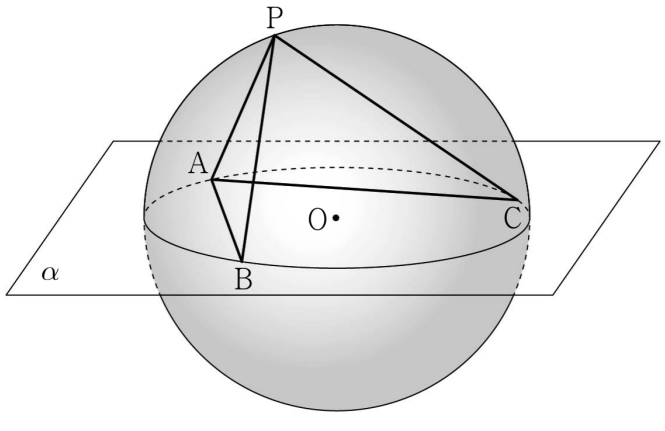
2022. 7월 학력평가

26. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle PAO=\frac{\pi}{3}$

(나) 점 P의 평면 α위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB)=\frac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30\times S^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]

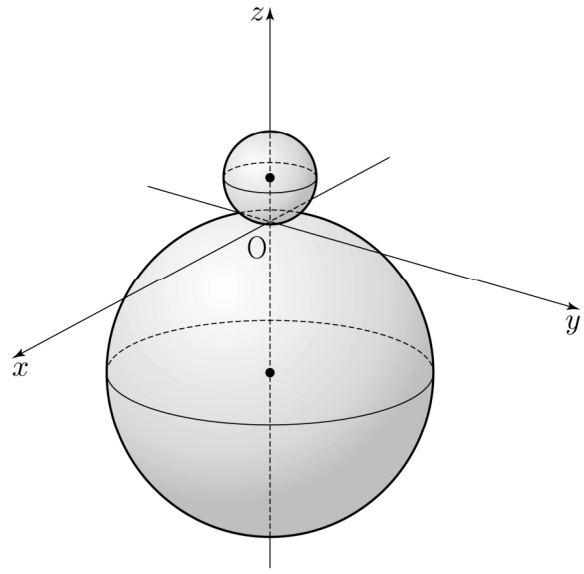


2022. 9월 수능 모의평가

27. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 A$(\sqrt{5},0,0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자. 원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



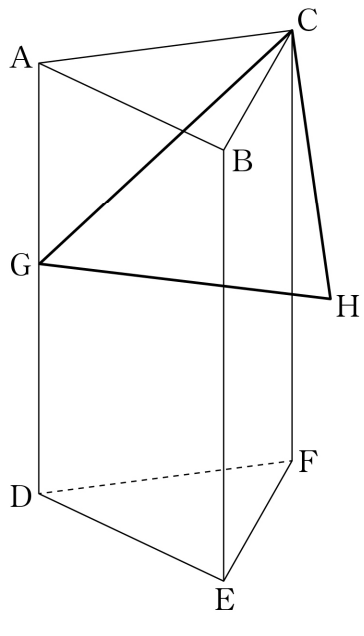
2022. 10월 학력평가

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+2\sqrt{3}$인 정삼각기둥 ABC−DEF와 $\overline{DG}=4$인 선분 AD 위의 점 G가 있다. 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 CGH의 평면 ADEB 위로의 정사영은 정삼각형이다.

(나) 삼각형 CGH의 평면 DEF 위로의 정사영의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

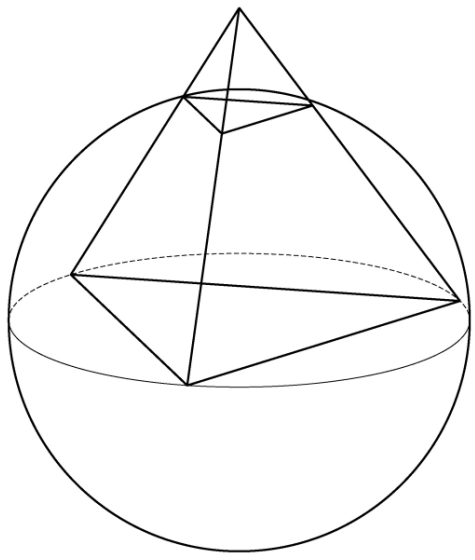
삼각형 CGH의 평면 ADFC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2022. 11월 대학수학능력시험

29. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자. 구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q, 구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자. 구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.[4점]

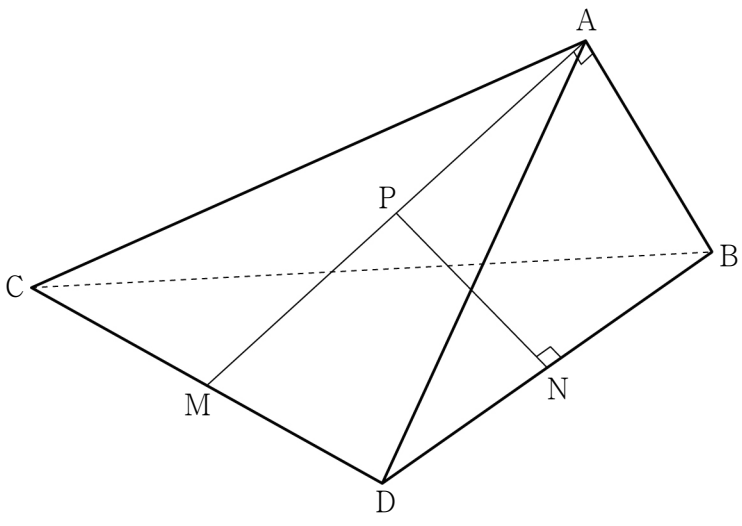


2021. 7월 학력평가

30. 그림과 같이

$$\overline{AB}=4,\ \overline{CD}=8,\ \overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$$

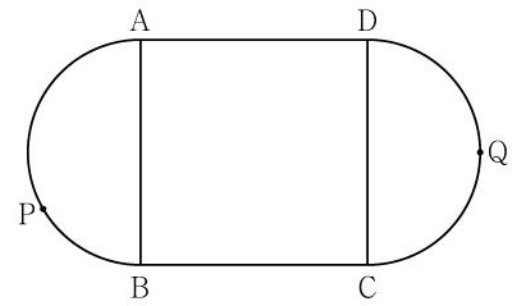
인 사면체 ABCD에 대하여 직선 AB와 평면 ACD는 서로 수직이다. 두 선분 CD, DB의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P에 대하여 선분 DB와 선분 PN은 서로 수직이다. 두 평면 PDB와 CDB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $40\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

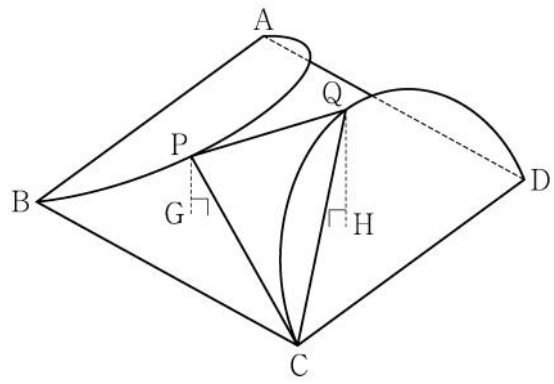


2021. 9월 수능 모의평가

31. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.

이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





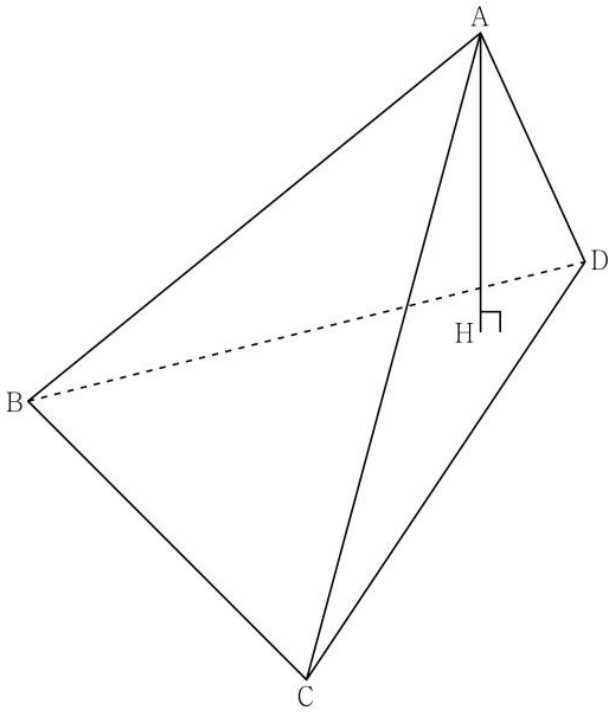
꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021. 10월 학력평가

32. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

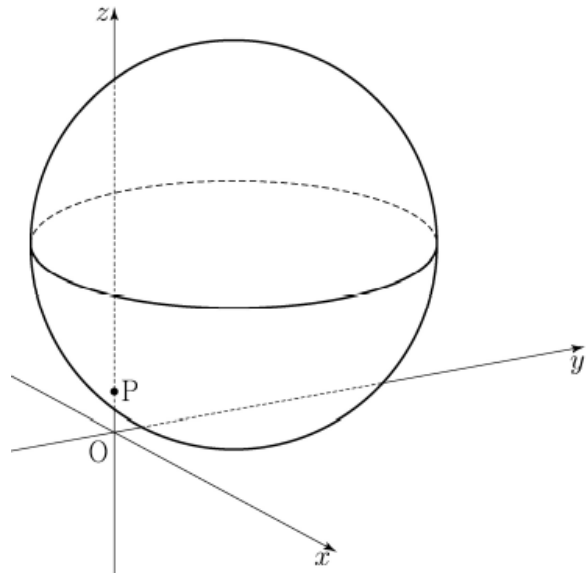
(가) $\angle AEH = \angle DAH$
(나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE}=4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2021. 11월 대학수학능력시험

33. 좌표공간에 중심이 C$(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 P$(0, 0, 1)$을 지나는 구 $S: (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자. 삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



꿈을 현실로!
희망 부산교육

2021 ~ 2023 전국연합학력평가 단원별 기출문제
정답 및 해설

단원 01 지수함수와 로그함수

해 설

1. ①
[출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$\sqrt[3]{8}\times\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}=2\times 2^{-1}=1$$

2. [정답] ②
[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$\log_6 4+\frac{2}{\log_3 6}=\log_6 4+2\log_6 3=\log_6(4\times 9)=2$$

3. 정답 ⑤
[해설]

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{3^3}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3\times 2^{-1}=\frac{3}{2}$$

4. [정답] ④
[해설]

$$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}-1}=2^{2(1-\sqrt{3})}\times 2^{2\sqrt{3}-1}$$
$$=2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}$$
$$=2$$

5. 정답 ⑤

$$3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}=3^{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}=3^2=9$$

6. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$$2^{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}=2^{\sqrt{2}}\times 2^{-\sqrt{2}+1}=2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}=2$$

7. 정답 ①

$$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}=2\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=2\times 3=6$$

8.

$$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=3^2=9$$

9.

$$\left(27\times\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(3^3\times 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=3^2\times 2=18$$

10.

$$(-\sqrt{2})^4\times 8^{-\frac{2}{3}}$$
$$=(-1)^4\times\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=1\times 2^{\frac{1}{2}\times 4}\times 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$$
$$=2^2\times 2^{-2}=2^{2+(-2)}=2^0=1$$

11.

$$3^{2\sqrt{2}}\times 9^{1-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})}=3^2=9$$

12. $\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2^2=4$

13.

$$(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}+1}=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$$

14.

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}=2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=2^2=4$$

15.

$$\log_8 16=\log_{2^3}2^4=\frac{4}{3}\log_2 2=\frac{4}{3}\times 1=\frac{4}{3}$$

16.

$$\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}=\left\{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}=3$$

17.

$$2^{\sqrt{3}}\times 2^{2-\sqrt{3}}$$
$$=2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

18.

$$4^{\frac{1}{2}}+\log_2 8=2+3=5$$

19.

$$3^{-\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{7}{4}}=3^{-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

20. $\log_3 x=3$ 이므로 $x=3^3=27$

21. $2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

22.

$$8^{\frac{4}{3}}\times 2^{-2}=(2^3)^{\frac{4}{3}}\times 2^{-2}=2^4\times 2^{-2}=2^{4-2}=2^2=4$$

23.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=64$, $(4^{-1})^{-x}=4^3$, $4^x=4^3$ 이므로 $x=3$

24.

$$3\times 8^{\frac{1}{3}}=3\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=3\times 2=6$$

25.

$$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

26.

$\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2\times 2^3 = 16$

27.

$4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 3^2 = 9$

28.

$32\times 2^{-3} = 2^5 \times 2^{-3} = 2^2 = 4$

29.

$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2$

30.

$\log_3 54 + \log_9 \frac{1}{36} = \log_3 54 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 9 = 2$

31.

$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$

32.

$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3$

33.

$3^0 \times 8^{\frac{2}{3}} = 1\times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4$

34. ⑤

[출제의도] 선분의 내분점과 로그함수를 이해하여 상수의 값을 구한다.

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2(m+3)+m}{2+1},\ \frac{2(m-3)+(m+3)}{2+1}\right)$

즉, $(m+2,\ m-1)$ 점 $(m+2,\ m-1)$이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있으므로 $m-1=\log_4(m+10)+m-3$

에서 $\log_4(m+10)=2$

$m+10=16$이므로 $m=6$

35. 4

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2 96 - \frac{1}{\log_6 2}\log_2 96 - \log_2 6 = \log_2 \frac{96}{2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

36. [정답] ④

[출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$는

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=2$일 때 최댓값 3,

$x=5$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b=3$

$\log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b=1$

두 식을 연립하면

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)-\log_{\frac{1}{2}}(5-a)=2$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-a}{5-a}=2$에서 $\frac{2-a}{5-a}=\frac{1}{4}$이므로

$4(2-a)=5-a,\ a=1$이고 $b=3$

따라서 $a+b=4$

37. [정답] 3

[출제의도] 지수함수의 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

함수 $y=4^{x-1}+a$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=4^{x-1}+a$의 그래프가

점 $\left(\frac{3}{2},5\right)$를 지나므로 $5=4^{\frac{3}{2}-1}+a$

따라서 $a=3$

38. 정답 ③

[해설]

상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은 $x=a$이고, 이 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{AB}=4$이므로

$\left|\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a\right|=4$

$\left|2\log_2 a-2\right|=4$

$\log_2 a=3$ 또는 $\log_2 a=-1$

$\therefore\ a=8$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

$a>2$이므로 $a=8$

39. 정답 3

[해설]

부등식 $2^{x-6}\le\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서

$2^{x-6}\le\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^{-2x}$

밑이 1보다 크므로

$x-6\le -2x,\quad x\le 2$

따라서 부등식을 만족하는 모든 자연수 x의 값은 1, 2이고, 그 합은 3이다.

40. [정답] 9

[해설]

로그의 진수 조건에 의하여

$x-5>0$이고 $x+7>0$이므로 $x>5$ …… ㉠

$\log_4(x-5)^2=\log_4(x+7),\ (x-5)^2=x+7$

$x^2-10x+25=x+7,\ x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0,\ x=2$ 또는 $x=9$

㉠에 의하여 $x=9$

41. 정답 ④

$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{3a+2b}{6ab}=\frac{\log_3 32}{6\log_9 2}=\frac{5\log_3 2}{6\times\frac{1}{2}\log_3 2}=\frac{5}{3}$

42. 정답 6

진수조건 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)=\log_4(x-1)^2$

$x^2-2x+1=13+2x,\ x^2-4x-12=(x-6)(x+2)=0$

$\therefore\ x=6\ (\because\ x>1)$

43. [출제의도] 로그함수를 활용하여 방정식을 푼다.

로그의 진수의 조건에서 $x-2>0,\ x+6>0$이므로

$x>2$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

주어진 방정식에서
$\log_2(x-2)=\log_4 4+\log_4(x+6)$
$\log_4(x-2)^2=\log_4 4(x+6)$
$(x-2)^2=4(x+6)$
$x^2-8x-20=0,\ (x+2)(x-10)=0$
$x>2$이므로 $x=10$

44. 정답 ④
$m\log_5 12+(1-m)\log_5 3=1,\ m\log_5 4+\log_5 3=\log_5 3\times 2^{2m}=1$
$3\times 2^{2m}=5,\ \therefore\ 4^m=\frac{5}{3}$

45.
$\frac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}=\log_2 72-\log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4$
$=\log_2\left(72\times\frac{4}{9}\right)$
$=\log_2 2^5=5$

46.
$x,\ x-6$은 로그의 진수이므로 $x>0,\ x-6>0$에서
$x>6$ … ㉠
$\log_2 x\le 4-\log_2(x-6)$
$\log_2 x(x-6)\le\log_2 16$
$x^2-6x-16\le 0$에서 $-2\le x\le 8$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $6<x\le 8$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8=15$

47.
$\log_2 9\times\log_3 16=2\log_2 3\times 4\log_3 2$
$=8\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=8$

48.
진수조건에서
$x+2>0$이고 $x-2>0$
이어야 하므로
$x>2$ … ㉠
$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$
$=\log_2(x+2)(x-2)$
$=\log_2(x^2-4)$
$=5$
에서
$x^2-4=2^5$
$x^2=36$ … ㉡
㉠, ㉡에서
$x=6$

49.
$\log_3 7\times\log_7 9=\log_3 7\times\frac{\log_3 9}{\log_3 7}=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

50.
$n=3$일 때 $f(3)=1$
$n=4$일 때 $2n^2-9n<0$이므로 $f(4)=0$
$n=5$일 때 $f(5)=1$
$n=6$일 때 $2n^2-9n>0$이므로 $f(6)=2$
따라서
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

51.
$\log_3(x-4)=\log_9(x+2)=\log_9(x-4)^2$
$x^2-8x+16=x+2,\ x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$
진수조건에 따라 $x>4$이므로 $x=7$

52.
$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)=\log_2(4x-8)$
$3x+2=4x-8,\ x=10$

53.
이차방정식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하기 위해서는
$\frac{D}{4}=(\log_2 n)^2-3\times\log_2 n<0$,
$(\log_2 n-3)\log_2 n<0,\ 0<\log_2 n<3,\ 1<n<8$
n은 자연수이므로 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$
따라서 조건을 만족하는 자연수 n의 개수는 6

54.
$0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.
따라서 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

55.
$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$
$=\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)$
$=\log_4 16$
$=\log_4 4^2$
$=2$

56.
양변의 밑을 5로 같게 하면
$5^{2x-7}\le 5^{-x+2}$
$2x-7\le -x+2$에서 $x\le 3$
주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는
1, 2, 3
따라서 자연수 x의 개수는 3

57.
$\log_2 100-2\log_2 5=\log_2 100-\log_2 5^2=\log_2\frac{100}{25}=\log_2 4=2$

58.
정사각형의 한 변의 길이가 1이므로
$6^{-a}-6^{-a-1}=1,\ 6^{-a}-\frac{6^{-a}}{6}=1,\ \left(1-\frac{1}{6}\right)\times 6^{-a}=1$
따라서 $6^{-a}=\frac{6}{5}$

59.
점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k),\ y=-\log_2 x$의 교점이므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\log_2(-x_1+k)=-\log_2 x_1$, $-x_1+k=\dfrac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2-kx_1+1=0$ …… ㉠

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$의 교점이므로

$-\log_2(-x_3+k)=\log_2 x_3$, $\dfrac{1}{-x_3+k}=x_3$

즉, $x_3^2-kx_3+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1x_3=1$

그러므로 $x_3-x_1=2\sqrt{3}$ 에서

$(x_1+x_3)^2=(x_3-x_1)^2+4x_1x_3=(2\sqrt{3})^2+4\times1=16$

따라서 $x_1+x_3=4$

60.

$A(1, n)$, $B(1, 2)$, $C(2, n^2)$, $D(2, 4)$이므로

$\overline{AB}=n-2$, $\overline{CD}=n^2-4$

사다리꼴 ABDC의 넓이는 18 이하이므로

$\dfrac{1}{2}\times(n-2+n^2-4)\times1=\dfrac{1}{2}(n^2+n-6)\le 18$, $-7\le n\le 6$

그러므로 3 이상의 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6

따라서 조건을 만족시키는 n의 값의 합은 18

61.

$\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}=\log_2 120-\log_2 15=\log_2\dfrac{120}{15}=\log_2 8=3$

62.

$a^p=-p$, $a^{2q}=-q$이므로

$a^p\times a^{2q}=(-p)\times(-q)$, $a^{p+2q}=pq$

따라서 로그의 정의에 의해 $p+2q=\log_a pq=-8$

63.

$\log x^3-\log\dfrac{1}{x^2}=3\log x-(-2\log x)=5\log x$

$10\le x<1000$에서

$1\le\log x<3$, $5\le 5\log x<15$

따라서 $5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 개수는 10

[보충 설명]

$5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 값을 구하면 $x=10$, $10^{\frac{6}{5}}$, $10^{\frac{7}{5}}$, $10^{\frac{8}{5}}$, …, $10^{\frac{14}{5}}$

64.

$2^{x-4}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$, $2^{x-4}\le 2^{-x+2}$에서

밑 2가 1보다 크므로 $x-4\le-x+2$, $x\le 3$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3=6$

65.

$7=a+\log_2 4=a+2$

$a=5$

66.

$\log_3\left(10\times\dfrac{9}{5}\div\dfrac{2}{3}\right)=\log_3 27=3$

67.

함수 $f(x)=2^{x+p}+q$의 그래프의 점근선이 직선 $y=q$이므로 $q=-4$

$f(0)=0$이므로 $2^p-4=0$, $p=2$

따라서 $f(4)=2^6-4=60$

68.

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=(\log_2 b-\log_4 a)(x-2)+\log_4 a$이다.

이 직선이 원점을 지나므로 $(0, 0)$을 대입하면

$0=(\log_2 b-\log_4 a)(0-2)+\log_4 a$이고

$3\log_4 a=2\log_2 b$이다. $3\log_4 a=4\log_4 b$이므로

$a^3=b^4$이고 $b=a^{\frac{3}{4}}$이다.

따라서 $\log_a b=\log_a a^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$

69.

$-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 $-n^2+9n-18>0$이고 n이 짝수이거나 $-n^2+9n-18<0$이고 n이 홀수여야 한다.(단, $2\le n\le 11$)

(ⅰ) $-n^2+9n-18>0$이고 n이 짝수인 경우

$n=4$

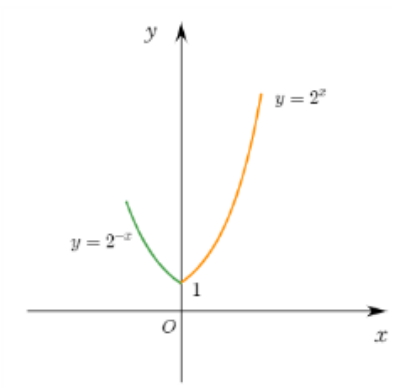
(ⅱ) $-n^2+9n-18<0$이고 n이 홀수인 경우

$n=7, 9, 11$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

70.



닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)=2^{|x|}$는 $x=3$에서 최댓값 8을 갖고, $x=0$에서 최솟값 1을 가지므로 $8+1=9$

71.

$(2, \log_4 2)=\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$이므로 두 점$(2, \log_4 2)$, $(4, \log_2 a)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\log_2 a-\frac{1}{2}}{4-2}(x-2)$이다.

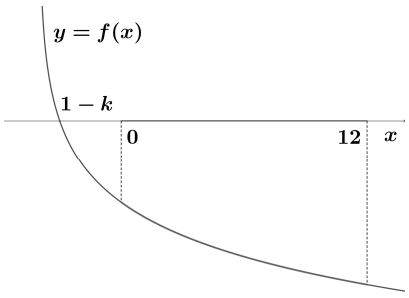
이 직선이 원점을 지나므로 $(0, 0)$을 대입하면 $-\dfrac{1}{2}=-\log_2 a+\dfrac{1}{2}$에서 $a=2$

72.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=2\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축 방향으로 $-k$만큼 평행이동 하였으므로 $(-k, \infty)$에서 정의된 감소함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 최댓값, $x=12$에서 최솟값을 갖는다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



$f(0)=-4$ 이므로 $2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$ 에서 $k=4$ 이다.

$f(12)=m$ 이므로 $2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=m$ 에서 $m=-8$ 이다. 따라서

$k+m=4+(-8)=-4$

73.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 P에서 만나므로

$2^x+1=2^{x+1}$에서 $2^x=1$

$x=0$이므로 교점 P의 좌표는 P(0, 2)

서로 다른 두 점 A, B의 중점이 P이므로 점

A(a, 2^a+1), B(b, 2^{b+1})에서

$\frac{a+b}{2}=0$, $\frac{2^a+1+2^{b+1}}{2}=2$

$\frac{2^a+1+2^{-a+1}}{2}=2$

$4^a-3\times2^a+2=0$

$(2^a-1)(2^a-2)=0$

$2^a=1$ 또는 $2^a=2$

$a=0$ 또는 $a=1$

$a=0$이면 $b=0$이므로 모순이다.

그러므로 $a=1$, $b=-1$

A(1, 3), B(−1, 1)

따라서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

74.

A(1, 0), B(4, 2), C(4, $\log_a 4$)

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)=\frac{9}{2}$

$\log_a 4=-1$

따라서 $a=\frac{1}{4}$

75.

$\log_{27}a=\log_{3^3}a=\frac{1}{3}\log_3 a$, $\log_3\sqrt{b}=\log_3 b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 b$

이므로

$\frac{1}{3}\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 b$

$\log_b a=\frac{\log_3 a}{\log_3 b}=\frac{3}{2}$

따라서 $20\log_b\sqrt{a}=10\log_b a=15$

76.

$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}=k(\neq 0)$라 하자.

$b=a^k$, $c=b^{2k}$, $a=c^{4k}$에서

$c=b^{2k}=a^{2k^2}$이고 $a=c^{4k}=a^{8k^3}$이므로

$8k^3=1$이다. 따라서 $k=\frac{1}{2}$이다.

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=k+2k+4k$

$=7k=\frac{7}{2}$

77.

$\log_5 40+\log_5\frac{5}{8}=\log_5\left(40\times\frac{5}{8}\right)$

$=\log_5 25=\log_5 5^2=2$

78.

점 A(t, t), B(s, s)라 하자.($s>t$)

$\overline{AB}=\sqrt{2(t-s)}=\sqrt{2}(s-t)=6\sqrt{2}$

이므로 $s=t+6$

사각형 ABCD의 넓이가 30이므로

$30=\frac{1}{2}\cdot6\cdot(t+s)$에서 $t=2$이다.

따라서 A(2, 2), B(8, 8)이므로

$2^{2a+b}=2$, $2^{8a+b}=8$이다. 따라서

$2a+b=1$, $8a+b=3$이므로

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이다. 그러므로 $a+b=\frac{2}{3}$

79.

$\log_2 x$와 $\log_4(2x-3)$이 존재하기 위해 $x>0$, $2x-3>0$이어야 하므로 $x>\frac{3}{2}$이다.

$\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$

$\log_4 x^2=\log_4 4+\log_4(2x-3)$

$=\log_4(8x-12)$

$x^2=8x-12$

$(x-2)(x-6)=0$

$x=2$ 또는 $x=6$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은 12

80.

$\log_2(x^2-7x)-\log_2(x+5)\le 1$의 진수조건에서

$-5<x<0$ 또는 $x>7$ …… ㉠

$\log_2(x^2-7x)\le\log_2 2(x+5)$이므로

$x^2-7x\le 2x+10$, $x^2-9x-10\le 0$

$(x-10)(x+1)\le 0$, $-1\le x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le x<0$ 또는 $7<x\le 10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

-1, 8, 9, 10이므로 그 합은 26이다.

81.

점 A의 좌표는 $(t, 3^{2-t}+8)$, 점 B의 좌표는 $(t, 0)$,

점 C의 좌표는 $(t+1, 0)$, 점 D의 좌표는

$(t+1, 3^t)$

사각형 ABCD가 직사각형이므로

점 A의 y좌표와 점 D의 y좌표가 같아야 한다.

즉, $3^{2-t}+8=3^t$

$(3^t)^2-8\times3^t-9=0$, $(3^t+1)(3^t-9)=0$

그런데 $3^t>0$이므로 $3^t=9$에서 $t=2$

그러므로 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 1이고 세로의 길이는

$3^2=9$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 9

82.

$3^{-2x}<3^{21-4x}$

$-2x<21-4x$

$x<\frac{21}{2}$이므로 자연수 x의 개수는10

꿈을 현실로! 희망 부산교육

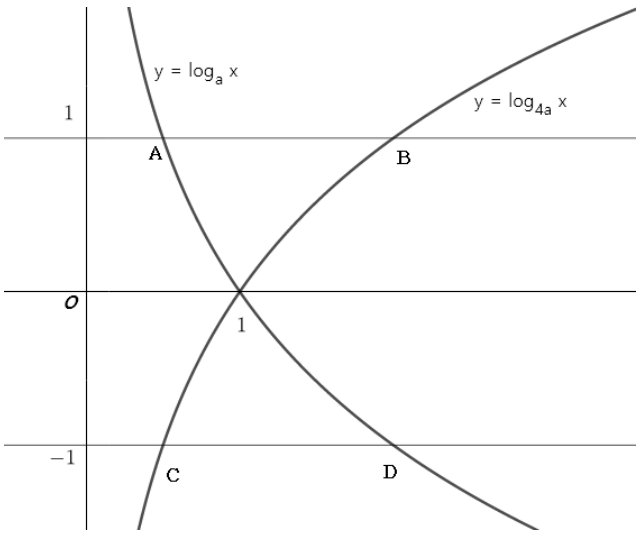
83.

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$-2x < 21-4x$

$x < \frac{21}{2}$ 이므로 자연수 x의 개수는 10

84.



ㄱ. A(a, 1), B(4a, 1)이므로 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다. <참>

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 C, 점 B와 D는 x축에 대하여 대칭이고 x좌표가 각각 같다. 즉

$C\left(\frac{1}{4a}, -1\right) = (a, -1)$

이다. $4a^2 = 1$이고 $\frac{1}{4} < a < 1$이므로 $a = \frac{1}{2}$ <참>

ㄷ. A(a, 1), B(4a, 1), $C\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$, $D\left(\frac{1}{a}, -1\right)$

$\overline{AB} = 3a$, $\overline{CD} = \frac{3}{4a}$

$\overline{AB} < \overline{CD}$이면 $3a < \frac{3}{4a}$에서 $4a^2 < 1$이고, $\frac{1}{4} < a < 1$이므로

$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ <거짓>

85.

$\log_3 72 - \log_3 8 = \log_3 9 = 2$

86.

12

[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 문제를 해결한다.

두 점 A와 B의 y좌표는 모두 k이므로 $A(1, k)$, $B(\log_a k + k, k)$이다.

두 점 C와 D의 x좌표는 모두 k이므로 $C(k, 2\log_a k + k)$, $D(k-1)$이다.

두 선분 AB와 CD가 만나는 점을 E라 하면 $E(k, k)$이므로

$\overline{AE} = k-1$, $\overline{BE} = \log_a k$, $\overline{CE} = 2\log_a k$, $\overline{DE} = k-1$

사각형 ADBC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times CD = \frac{85}{2}$이고,

삼각형 CAD의 넓이는 35이므로

삼각형 CBD의 넓이는 $\frac{85}{2} - 35 = \frac{15}{2}$이다.

$\overline{AE} = p$, $\overline{BE} = q$라 하면 두 삼각형 CAD, CBD의 넓이의 비는

$p : q = 35 : \frac{15}{2} = 14 : 3$ 즉, $q = \frac{3}{14}p$

이때 $\overline{CE} = 2q$, $\overline{DE} = p$이므로 삼각형 CAD의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times (\overline{CE} + \overline{DE}) = \frac{1}{2} \times p \times (2q + p) = \frac{p}{2} \times \left(\frac{3}{7}p + p\right)$

$= \frac{5}{7}p^2 = 35$

$p^2 = 39$이고 $p > 0$이므로 $p = 7$, $q = \frac{3}{2}$

$k-1 = p$, $\log_a k = q$이므로 $k = p+1 = 8$

$q = \log_a k = \log_a 8 = \frac{3}{2}$, $a^{\frac{3}{2}} = 8$ 즉, $a = 4$

따라서 $a + k = 12$

87.

[정답] ②

[출제의도] 지수함수를 이용하여 추론하기

곡선 $y = a^x - 1$을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y = \log_a(x+1)$이고

$a > 1$이므로 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이다.

점 P의 좌표를 (k, k)라 하면 점 P는 곡선 $y = \log_a(x+1)$ 위의 점이므로 $k > -1$

삼각형 OHP의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{k^2}{2} = 2$

에서 $k^2 = 4$, $k = 2$

따라서 곡선 $y = a^x - 1$이 점 P(2, 2)를 지나므로

$2 = a^2 - 1$, $a^2 = 3$에서 $a = \sqrt{3}$

88.

정답 110

[해설]

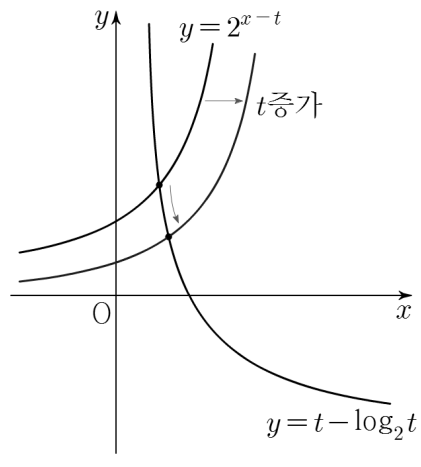
ㄱ. $t = 1$일 때, 두 곡선 $y = 1 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-1}$의 교점의 좌표는 (1, 1)이므로 $f(1) = 1$

$t = 2$일 때, 두 곡선 $y = 2 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-2}$의 교점의 좌표는 (2, 1)이므로 $f(2) = 2$ (참)

$\therefore A = 100$

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 함수 $y = t - \log_2 x$는 y축의 양의 방향으로 평행이동하고, 함수 $y = 2^{x-t}$는 x축의 양의 방향으로 평행이동한다.

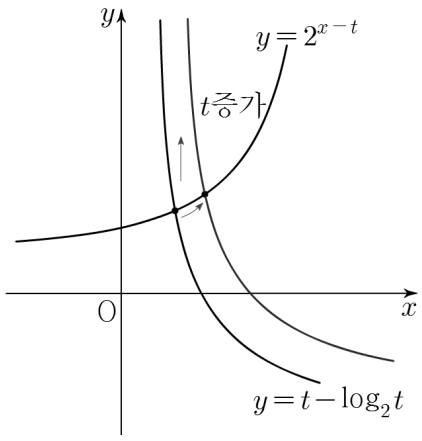
$a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 곡선 $y = a - \log_2 x$와 $y = 2^{x-a}$의 교점을 P, 두 곡선 $y = a - \log_2 x$와 $y = 2^{x-b}$의 교점을 Q라 하면 [그림1]과 같이 평행이동에 의해 Q의 x좌표가 P의 x좌표보다 크다.



[그림1]

또 두 곡선 $y = b - \log_2 x$와 $y = 2^{x-b}$의 교점을 R라 하면 [그림2]와 같이 평행이동에 의해 R의 x좌표가 Q의 x좌표보다 크다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

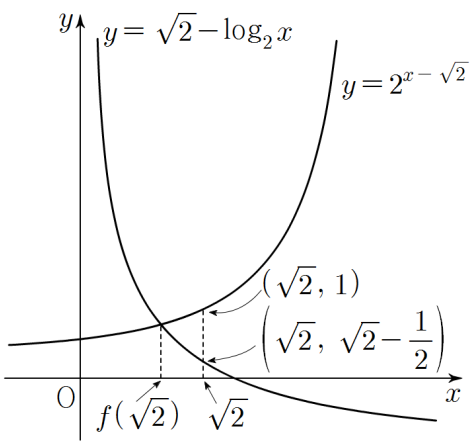


[그림2]

따라서 R의 x좌표가 P의 x좌표보다 크므로 t가 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다. (참)

$\therefore B=10$

ㄷ.



$t=\sqrt{2}$일 때, 두 함수 $y=\sqrt{2}-\log_2 x$와 $y=2^{x-\sqrt{2}}$에서 $x=\sqrt{2}$에 대한 함숫값은 각각

$\sqrt{2}-\log_2\sqrt{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, $2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=1$

이고, $\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$이다.

즉, $\sqrt{2}-\log_2\sqrt{2}<2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$이므로 $x=\sqrt{2}$는 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표보다 큰 곳에 있다.

$\therefore f(\sqrt{2})<\sqrt{2}$ (거짓)

$\therefore C=0$

이상에서 $A+B+C=100+10+0=110$

89.

[정답] ②

[해설]

(i) n이 짝수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$의 실근은 $x=\pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n이 홀수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)=-2^{\frac{6}{n}}=-4$

$2^{\frac{6}{n}}=2^2$, $\frac{6}{n}=2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $n=3$

90.

[정답] 13

[해설]

점 D의 좌표를 $(t, 0)$ $(t>0)$이라 하자.

점 D는 선분 CA를 5 : 3으로 외분하는 점이므로 $\overline{CA}:\overline{AD}=2:3$

점 A의 x좌표는 $\frac{2}{5}t$, $A\left(\frac{2}{5}t, \frac{6}{5}t\right)$

점 C의 y좌표는 $2t$, $C(0, 2t)$

직선 BC의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+2t$

점 B는 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x+2t$의 교점이므로 $B\left(\frac{3}{5}t, \frac{9}{5}t\right)$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{10}}{5}t$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\frac{t^2}{5}=20$

$t^2=100$이므로 $t=10$

A(4, 12), B(6, 18)이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m}$

$2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$64\times 2^{-m}-16\times 2^{-m}=6$

$48\times 2^{-m}=6$, $2^{-m}=\frac{1}{8}$

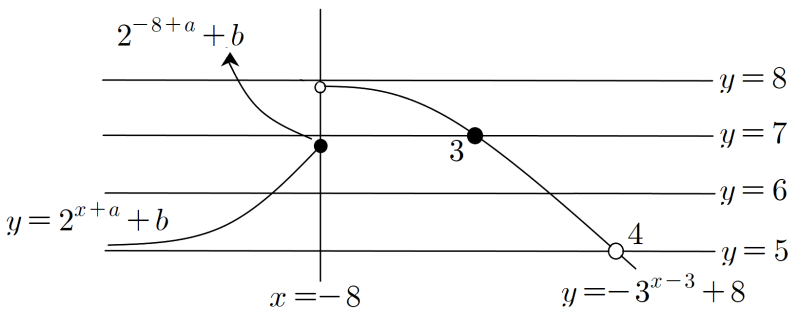
$m=3$, $n=10$

따라서 $m+n=13$

91.

정답 ②

주어진 함수에서 $x\le k$일 때, 함숫값의 정수가 2개인 k의 범위가 $3\le k<4$



위의 그림과 같을 때, $x\ge k$에서 정수인 함숫값이 2개가 나오고 k값의 범위가 $3\le k<4$이다.

$y=2^{x+a}+b$의 점근선은 $y=5$이므로 $b=5$

$2^{-8+a}+b=2^{-8+a}+5$, $6\le 2^{a-8}+5<7$이므로

$1\le 2^{a-8}<2$, $0\le a-8<1$, $8\le a<9$ $\therefore$ 자연수 $a=8$

$\therefore a+b=8+5=13$

92.

[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해한다.

n이 홀수이면 $n^2-16n+48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1이므로

$f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$

n이 짝수이면 $n^2-16n+48$의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $n^2-16n+48>0$인 경우

$(n-4)(n-12)>0$에서 $n<4$ 또는 $n>12$

이때 $f(n)=2$이므로

$f(2)=2$

(ii) $n^2-16n+48=0$인 경우

$(n-4)(n-12)=0$에서 $n=4$ 또는 $n=12$

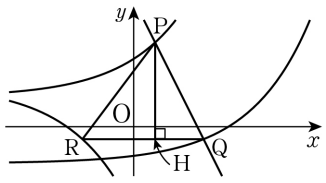
이때 $f(n)=1$이므로

$f(4)=1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

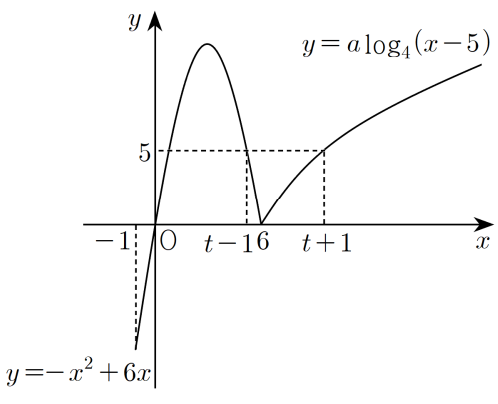
(iii) $n^2-16n+48<0$인 경우
$(n-4)(n-12)<0$에서 $4<n<12$
이때 $f(n)=0$이므로
$f(6)=f(8)=f(10)=0$
따라서 $\sum_{n=2}^{10} f(n)=4\times1+1\times2+1\times1+3\times0=7$

93. [출제의도] 지수함수를 이용하여 문제를 해결한다.



점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{HQ}=t\,(t>0)$이라 하면 직선 PQ의 기울기가 -2이므로 $\overline{PH}=2t$이고 $\overline{HR}=5-t$이다.
직각삼각형 PRH에서 피타고라스 정리에 의하여
$(5-t)^2+(2t)^2=5^2,\ t(t-2)=0,\ t=2$
따라서 $\overline{PH}=4,\ \overline{HR}=3$
점 R의 x좌표를 m이라 하면 점 P의 x좌표는 $m+3$, 점 Q의 x좌표는 $m+5$이므로
$\mathrm{P}(m+3,\ a^{m+4}+1),\ \mathrm{Q}\left(m+5,\ a^{m+2}-\frac{7}{4}\right),$
$\mathrm{R}\left(m,\ -a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)$
점 P의 y좌표는 점 R의 y좌표보다 4만큼 크므로
$a^{m+4}+1=\left(-a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)+4$
$a^{m+4}=\frac{9}{4}$ …… ㉠
점 Q의 y좌표와 점 R의 y좌표가 같으므로
$a^{m+2}-\frac{7}{4}=-a^{m+4}+\frac{3}{2}$
㉠을 대입하여 정리하면 $a^{m+2}=1$
$a>1$에서 $m+2=0$이므로 $m=-2$
㉠에서 $a^2=\frac{9}{4},\ a>1$이므로 $a=\frac{3}{2}$
점 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{13}{4}\right)$이 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로
$\frac{13}{4}=-2\times1+k,\ k=\frac{21}{4}$
따라서 $a+k=\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{27}{4}$

94.
정답 10



$-(t-1)^2+6(t-1)=5,\ t^2-8t+12=0,\ t=6$
$a\log_4(t+1-5)=5,\ a\log_4 2=5,\ a=10$

95.
점 A의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이고 $\overline{AB}=8$이므로 점 B의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.
직선 BC의 기울기가 -1이고 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 B, C의 x좌표의 차와 y좌표의 차는 모두 2이다.
따라서 점 C의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.
한편 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로 $2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$
$\frac{1}{2}\times2^k-\frac{1}{8}\times2^k=6,\ 2^k=16$
$k=4$
즉, A(4, 9), B(4, 1), C(2, 3)이다.
점 B가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로 $1=\log_2(4-a)$, $4-a=2,\ a=2$
점 D의 x좌표는 $x-2=1$에서 3
사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로
$\frac{1}{2}\times8\times2+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

96.
점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $\mathrm{B}(b,\ a)$이다.
조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로
$b=\log_2(a+2)+k$…… ㉠
조건 (나)에서 점 $\mathrm{B}(b,\ a)$가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로
$a=4^{b+k}+2$…… ㉡
㉠에서
$b-k=\log_2(a+2),\ 2^{b-k}=a+2$
$a=2^{b-k}-2$…… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 정리하면
$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$
$4^k\times4^b-2^{-k}\times2^b+4=0$ …… ㉣
조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고
$2^b=t\,(t>0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식 $4^kt^2-2^{-k}t+4=0$ …… ㉤
은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다. $D=(-2^{-k})^2-4\times4^k\times4$
$=4^{-k}-16\times4^k=0$
위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면
$2^{4k+4}=1,\ k=-1$
㉤에 대입하여 정리하면
$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0,\ \frac{1}{4}(t-4)^2=0$
$t=4$
즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.
$k=-1,\ b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면
$a=4^{2+(-1)}+2=6$
따라서 $a\times b=6\times2=12$

97.
점 B의 좌표가 $\mathrm{B}(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{OB}=2^a$
$\overline{OB}=3\times\overline{OH}$에서 $\overline{OH}=\frac{2^a}{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

점 A의 x좌표를 k라 하면 $A\left(k, \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a}=\frac{2^a}{3}$에서 $2^{-k}=\frac{1}{3}$, $2^k=3$

또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2$에서 $2^a=6$

따라서 $a=\log_2 6$

98.

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) ……㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1\le k\le 333$인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2=2^{3m}$

$16(k+1)^2=2^{-3m}$

$(k+1)^2=2^{-3m-4}$

이어야 하므로

$(k+1)^2=2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$

$k+1=2,\ 2^4,\ 2^7$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므

로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

99.

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64}=16^{x_1}$에서

$2^{64}=2^{4x_1}$

$4x_1=64$에서

$x_1=16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 x_n으로 서로

같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n}=2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비 가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^4\times 2^{-2n+2}=2^{6-2n}$

한편,

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5\ge\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$

이어야 한다.

$x_5\ge\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\ge\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16}\ge\frac{1}{k}$에서 $k\ge 16$ …㉠

$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64$ …㉡

㉠, ㉡에서 $16\le k<64$이므로 자연수 k

의 개수는 $64-16=48$이다.

100.

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(a, \log_2 2a)$, $B(b, \log_2 4b)(a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\frac{1}{2}$에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\frac{1}{2}(b-a)$

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}$

$b-a=4$ ……㉠

$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\frac{2b}{a}=2$, $b=2a$ ……㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

101.

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네 제곱근은 $\pm\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}$

$-\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}\times\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}=-3^{\frac{f(n)}{4}}=-3^2$에서 $f(n)=8$

$-(n-2)^2+k=8$, $(n-2)^2=k-8$

$k=8$일 때, $n=2$

$k=9$일 때, $n=1$ 또는 3

$k=12$일 때, $n=0$ 또는 4, 자연수 n값은 더 이상 2개가 될 수 없

음을 알 수 있다. 그러므로 ∴ $k=9$

102.

$2^a:2^b=1:4$에서 $2^b=2^{a+2}$, $b=a+2$

$P(a, 2^a)$, $Q(a+2, 2^{a+2})$라 할 때,

기울기 $m=\frac{2^{a+2}-2^a}{2}=3\times 2^{a-1}$

직선 AB의 방정식은 $y=-3\times 2^{a-1}(x-a)+2^a$에서 y절편은

$3a\times 2^{a-1}+2^a$ 닮음비에 따라 $3a\times 2^{a-1}+2^a:2^a=4:3$가 성립하므

로

$2^{a+2}=9a\times 2^{a-1}+3\times 2^a$, 2^a으로 양변을 나눠주면

$4=\frac{9}{2}a+3$, $a=\frac{2}{9}$, $b=a+2$이므로 $b=\frac{20}{9}$

∴ $90\times(a+b)=90\times\frac{22}{9}=220$

103.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$

$\frac{1}{-x}=x+2a$, $-x^2-2ax=1$, $x^2+2ax+1=0$의 두 근을 α, β라 할

때, $\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=1$이므로 $y=-\log_2(-x)=f(x)$라 할 때,

$f(\alpha)+f(\beta)=-\log_2(-\alpha)+\{-\log_2(-\beta)\}=\log_2\alpha\beta=\log_2 1=0$

두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$의 중점은 $(-a, 0)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

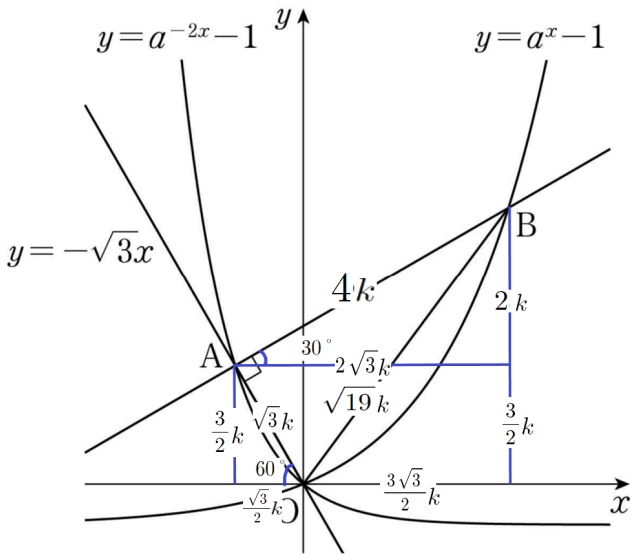
$4x+3y+5=0$에 얻어진 좌표를 대입하면, $-4a+5=0$, $a=\frac{5}{4}$

$x^2+\frac{5}{2}x+1=0$이므로 α, β는 $-\frac{1}{2}$, -2이므로

$\mathrm{A}(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$, 두점 사이거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$

104.

$y=-\sqrt{3}x$의 기울기가 $-\sqrt{3}$이므로 $y=-\sqrt{3}x$과 x축이 이루는 각의 크기는 60°이다. $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}k$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{19}k$라 할 때,
직각삼각형 OAB에서 피타고라스정리에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}=4k$이고
아래 그림과 같이 특수각의 삼각비에 따라 길이가 결정된다.



그러므로 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{3}{2}k\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{7}{2}k\right)$

함수 $y=a^{-2x}-1$, $y=a^x-1$에 각각의 좌표를 대입하면,

$a^{\sqrt{3}k}-1=\frac{3}{2}k$, $a^{\frac{3}{2}\sqrt{3}k}-1=\frac{7}{2}k$

$a^{3\sqrt{3}k}=\left(\frac{3}{2}k+1\right)^3$, $a^{3\sqrt{3}k}=\left(\frac{7}{2}k+1\right)^2$

$27k^3-44k^2-20k=0$, $k(k-2)(27k+10)=0$

$\therefore\ k=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=4\mathrm{k}=8$

105.

m^{12}의 n제곱근은 $m^{\frac{12}{n}}$

$f(2)$는 $2^{\frac{12}{n}}$가 정수가 되는 n은 $12=2^2\times3$의 약수 6개 1은 제외해야 하므로 $f(2)=5$

같은 방법으로 $f(3)=5$, $f(5)=5$, $f(6)=5$, $f(7)=5$

$f(4)$는 $4^{\frac{12}{n}}=2^{\frac{24}{n}}$에서 n은 $24=2^3\times3$의 약수는 8개, $f(4)=7$

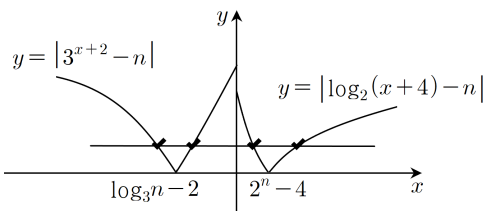
$f(8)$은 $36=2^2\times3^2$의 약수개수 9개, $f(8)=8$

$f(9)$는 24의 약수개수 8, $f(9)=7$

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+\ \cdots\ +f(9)=5\times5+7\times2+8$

$=25+14+8=47$

106.



주어진 조건을 만족하는 그래프를 그려보면 위의 그림과 같다.

$f(x)$의 x절편이 y축의 좌우에 존재해야한다.

$\log_3 n-2<0$, $n<9$, $2^n-4>0$, $n>2$, $\therefore\ 2<n<9$

$\therefore\ 3+4+5+6+7+8=33$

107.

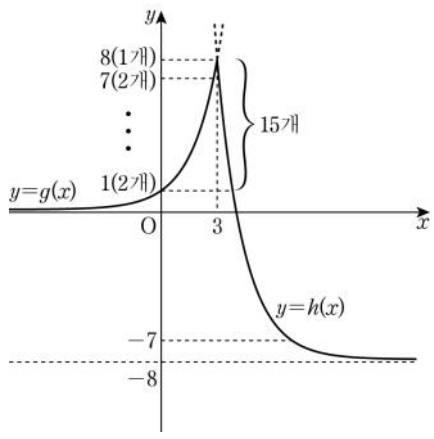
$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하면

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고,

곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은

$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y\le0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

곡선 $y=h(x)$의 점근선이 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이므로

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8\le-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$,

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le16$, $4<15<4^{-3-a}\le4^2$,

$1<-3-a\le2$, $-5\le a<-4$

따라서 구하는 정수 a의 값은 -5

108.

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\frac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\frac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\frac{4}{k-1}=\frac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\frac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\frac{-m}{k-1}=\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\frac{-4}{k+1}\times\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\frac{4}{k-1}\right)^2={x_2}^2$ (참)

ㄷ. ${x_2}^2=x_1x_3$에서 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}$

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{-k-1}{k-1}=-1-\frac{2}{k-1}<-1$

$\frac{x_2}{x_1}=r(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$= \frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)} + \frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$$

$$= \frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)} + \frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$$

$$= \frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)} + \frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)} = 0$$

에서 $1+\frac{2}{r+1}=0,\ r=-3$

$x_2 = x_1 r$에서

$\frac{4}{k-1} = \frac{12}{k+1},\ k+1=3k-3,\ k=2$이고,

$m = \frac{4(k+1)}{k-1} = 12$이므로 $m+k^2=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

109.

진수 조건에서 $x>0$

$-\log_n(x+3)+1=\log_n\frac{n}{x+3}$이므로

$\log_n x = \log_n\frac{n}{x+3}$에서

$x=\frac{n}{x+3}$

$x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면

$f(1)<0, f(2)>0$이어야 한다.

$f(1)=4-n<0$에서 $n>4$

$f(2)=10-n>0$에서 $n<10$

따라서 $4<n<10$이므로

n의 값은 5, 6, 7, 8, 9이고, 그 합은

$5+6+7+8+9=35$

110.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

즉,

$x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$ ····· ㉠

한편, 조건 (나)에서 함수$f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은

$-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}} = -2^{\frac{12}{n}}$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (i), (ii)에서 n의 모든 값의 합은

$2+4+6+12=24$

111.

$(\sqrt[n]{a})^3 = a^{\frac{3}{n}}$

(i) $a=4$일 때 $4^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$

$n(n\geq 2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로

$n=2,\ 3,\ 6$

그러므로 $f(4)=6$

(ii) $a=27$일 때 $27^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}}$

$n(n\geq 2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로

$n=3,\ 9$

그러므로 $f(27)=9$

따라서 $f(4)+f(27)=6+9=15$

112.

직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로

$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$

A(2, -2)

$B\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, C$(10,\ -\log_a 8+1)$이고,

점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로

삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$

$=4\times(\log_a 24-3)=28$

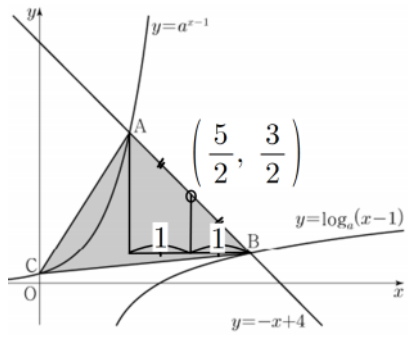
$\log_a 24=10$

따라서 $a^{10}=24$

113.

두 함수는 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축으로 1만큼 평행 이동한 함수이다. $y=a^x$, $y=\log_a x$는 $y=x$ 대칭이고, x축으로 1만큼 평행이동한 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$의 대칭축은 $y=x-1$

주어진 두 함수가 $y=x-1$에 대칭이므로 $y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$에 점대칭이다.



$\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 위의 그림의 직각 이등변삼각형을 통해 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$, $B\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.

$y=a^{x-1}$에 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 대입하면, $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$, $a=\frac{25}{4}$

$C\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, $C\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$

$\overline{AB}$를 밑변으로 했을 때, 점 C에서 직선 $x+y-4=0$까지 거리가 높이가 된다.

$x+y-4=0$과 $\left(\frac{4}{25},\ 0\right)$사이 거리 $\frac{\left|\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$

삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$

$\therefore\ 50S=192$

114.

점P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,

P$(\alpha,\ 2\alpha+k)$, Q$(\beta,\ 2\beta+k)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{5}=\sqrt{5}$, $\beta-\alpha=1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

점P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1=2\alpha+k$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}+\frac{8}{3}=2\beta+k$

두식을 같은 변끼리 빼주면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}-\frac{5}{3}=2\alpha-2\beta$이고, $\beta-\alpha=1$이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}=-2+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}$

얻어진 식에 $\beta=\alpha+1$을 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=1$에서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}+\frac{8}{3}=2\beta+k$에 $\alpha=-2$, $\beta=-1$을 대입하면

$1+\frac{8}{3}=-2+k$에서 $k=2+1+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

115.

주어진 두 직선의 방정식은 아래와 같다.

$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$

두 직선의 y절편이 같으므로

$-\frac{a}{b-a}\left(\log_2\frac{b}{a}\right)+\log_2 a=-\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}\right)+\log_4 a$

얻어진 조건식을 간단히 해보자.

$\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\log_4 a-\log_2 a$

$\frac{a}{b-a}\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 a$

$\frac{a}{b-a}\times\left(-\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}\right)=-\frac{1}{2}\log_2 a$

$a\log_2 b-a\log_2 a=(b-a)\log_2 a$, $a\log_2 b=b\log_2 a$, $a\log b=b\log a$

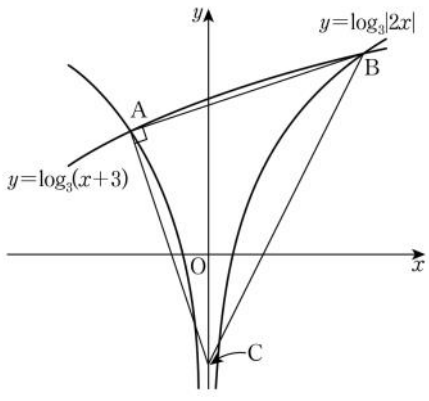
$\log a^b=\log b^a$, $a^b=b^a$ … ㉠

$f(1)=a^b+b^a=40$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $a^b=b^a=20$,

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=20^2+20^2=800$

116.



$x<0$일 때의 교점 A의 x좌표는 방정식

$\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로

$-2x=x+3$, $3x=-3$, $x=-1$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(-1, \log_3 2)$

$x>0$일 때의 교점 B의 x좌표는 방정식

$\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로

$2x=x+3$, $x=3$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(3, \log_3 6)$이다.

두 점 $\mathrm{A}(-1, \log_3 2)$, $\mathrm{B}(3, \log_3 6)$에 대하여

직선 AB의 기울기는

$\frac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\frac{\log_3\frac{6}{2}}{4}=\frac{1}{4}$ 이므로

점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은

$y-\log_3 2=-4(x+1)$

$y=-4x-4+\log_3 2$ …… ㉢

직선 ㉢이 y축과 만나는 점 C의 좌표는

$\mathrm{C}(0, -4+\log_3 2)$이다. 이때

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$

직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$

117.

(ⅰ) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다.

그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{{}_{10}\mathrm{C}_2=45}$이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다.

한편, n이 짝수이면 실수인 m의 n제곱근은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는

$\boxed{2+4+6+8=20}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{45}+\boxed{20}$이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 45, 20이고

$p+q=65$

118.

$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $\mathrm{A_m}(\log_3 m, m)$

$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $\mathrm{B_m}(2^m, \mathrm{m})$

그러므로 $\overline{\mathrm{A_mB_m}}=2^m-\log_3 m$

$\overline{\mathrm{A_mB_m}}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$(단, k는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A_mB_m}}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 n에 대하여

$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$

$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1$

$=7\times 2^{3^{n-1}}-1$

$3^{n-1}\geq 1$이므로 $2^{3^{n-1}}\geq 2$이다.

그러므로 $7\times 2^{3^{n-1}}-1>0$

따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

119.

$2\leq n\leq 4$일 때, $n-5<0$이므로

$f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$

$n=5$일 때, $n-5=0$이므로 $f(5)=1$

$6\leq n\leq 10$일 때, $n-5>0$이므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f(6)=2$, $f(7)=1$, $f(8)=2$, $f(9)=1$, $f(10)=2$
따라서
$\sum_{n=2}^{10} f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$

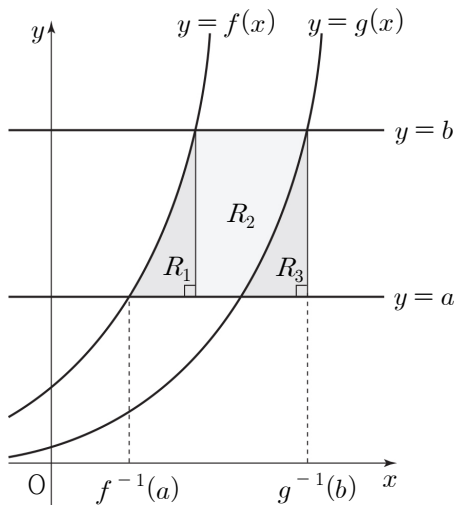
120.
정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$
밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$을
만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.
(i) $k=0$인 경우
$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서
$n=1$, 2, 3, 4, 5이므로 $h(0)=5$
(ii) $k=3$인 경우
$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$
에서 $n=9$, 10, …, 18이므로 $h(3)=10$
따라서 $h(0)+h(3)=15$로그함수를 이용하여 추론하기
정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$
밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$을
만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.
(i) $k=0$인 경우
$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서
$n=1$, 2, 3, 4, 5이므로 $h(0)=5$
(ii) $k=3$인 경우
$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$
에서 $n=9$, 10, …, 18이므로 $h(3)=10$
따라서 $h(0)+h(3)=15$
정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$
밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$을
만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.
(i) $k=0$인 경우
$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서
$n=1$, 2, 3, 4, 5이므로 $h(0)=5$
(ii) $k=3$인 경우
$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$
에서 $n=9$, 10, …, 18이므로 $h(3)=10$
따라서 $h(0)+h(3)=15$

121.
$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 (k, k)이고,
점 B의 좌표는 $(2k, k)$이다.
점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로
$k=-\log_a k$ … ㉠
점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로
$k=\log_a 2k$ … ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서
$2k^2=1$이므로 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$
곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는
두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$-\log_a \alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$
$\log_a \beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$d=\beta-\alpha$
$=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$
$=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}$
$=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}$
따라서 $20d=20\times\frac{15}{4}=75$

122.
조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m=a^{\frac{m}{3}}=b$
조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n=b^{\frac{n}{2}}=c$
조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$
$c^4=\left(b^{\frac{n}{2}}\right)^4=\left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{2n}=a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$
$\frac{2mn}{3}=12$, $mn=18$
조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은
$(2, 9)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$이므로
모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 4이다.

123.
두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는
다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3
이라 하자.
함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$S_1=S_3$
조건 (가)에서
$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$
$b-a=3$ …… ㉠
조건 (나)에서
$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면
$2^p=a$, $2^{q-2}=b$
$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$
$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\frac{4b}{a}=\log_2 6$
$3a=2b$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$
$a+b=15$

124.
ㄱ. $x_1<x<x_2$이면 $2^x<-2x^2+2$이다.
$x=\frac{1}{2}$에서 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{3}{2}$
이고 $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$이므로 $x_2>\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<\frac{y_2-0}{x_2-(-1)}<\frac{\frac{3}{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=1$
이고 $x_2-x_1>0$이므로 $y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

꿈을 현실로!
희망 부산교육

ㄷ. $-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2=1<2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 이므로

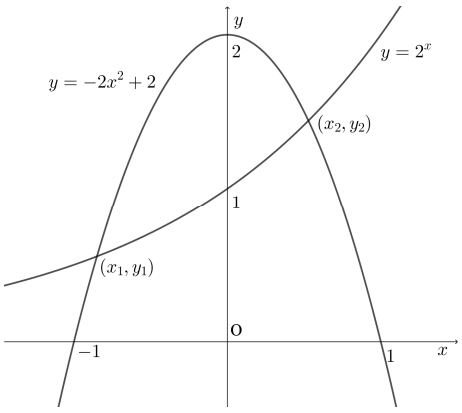
$x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}$가 되어 $\frac{1}{2}<x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}$ … ㉠

$-2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2=1=2^0>2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 이므로

$x_1<-\frac{1}{\sqrt{2}}$가 되어 $-1<x_1<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ …㉡

㉠과 ㉡으로 부터 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$이므로

$2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$에서 $2^{-\frac{1}{2}}<y_1y_2<2^0$ (참)



125.

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2(1+1)}{1+2}+\frac{1}{2}\log_2\frac{2(2+1)}{2+2}+\cdots+\frac{1}{2}\log_2\frac{2(m+1)}{m+2}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2^m\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$$

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 $m+2$가 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2=2^{2i}$일 때,

$\frac{2^{m+1}}{m+2}=\frac{2^{2^{2i}-1}}{2^{2i}}=2^{2^{2i}-1-2i}$

$2^{2i}-1-2i$는 홀수이므로 $\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$가 홀수이고 $\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$의 값은 자연수가 아니다.

(ⅱ) $m+2=2^{2i-1}$일 때,

$\frac{2^{m+1}}{m+2}=\frac{2^{2^{2i-1}-1}}{2^{2i-1}}=2^{2^{2i-1}-2i-2}$

$2^{2i-1}-2i-2$는 짝수이므로 $\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$가 짝수이고 $\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$의 값은 자연수이다.

$i\geq 5$ 이면

$2^{2i-1}-2i-2\geq 2^{2i-1}-2^i-2>2^{2i-1}-2^i$

$2^{2i-1}-2^i=2^i(2^{i-1}-1)>2^i2^{i-2}=2^{2i-2}>2^8$

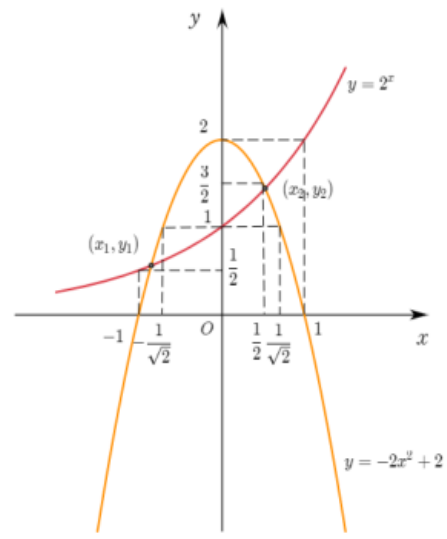
$\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}>\log_2 2^8=256$

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$의 값은 100이하일 수 없다.

따라서 $m=2^{2i-1-2}$, $(1<i\leq 4,\ i$는 자연수)이고 구하는 모든 m의 값의 합은

$(2^3-2)+(2^5-2)+(2^7-2)=162$

126.



$x_1<x_2$ 이므로 (x_1,y_1)은 2사분면, (x_2,y_2)는 1사분면에 위치한다.

$f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$라 두면

$x=\frac{1}{2}$에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$이고

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이므로

$\frac{1}{2}<x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$x=-1$에서 $g(-1)<f(-1)$이고

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이므로

$-1<x_1<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……②

ㄱ. ①에서 $x_2>\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<\frac{y_2-0}{x_2-(-1)}<\frac{\frac{3}{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=1$

이고 $x_2-x_1>0$이므로 $y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

ㄷ. ①, ②에서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$이므로

$2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$에서 $2^{-\frac{1}{2}}<y_1y_2<2^0$ (참)

127.

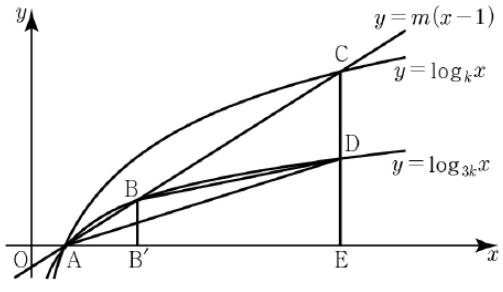
조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$에서 $\overline{BC}=3\overline{AB}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{B'E}=3\overline{AB'}$이다.

$\overline{AB'}=a$라 하면 $\overline{B'E}=3a$이므로

$B(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$, $C(4a+1,\ \log_k(4a+1))$,

$D(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$

$\frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로

$m=\frac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\frac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$에서

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$

$(a+1)^2=4a+1$

$a^2-2a=0$

$a>0$이므로 $a=2$

$m=\dfrac{\log_9 3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

128.

$S(x)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\dfrac{16}{x}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\dfrac{1}{2}(\log_2 16-\log_2 x)$

$=\dfrac{1}{2}\times\log_2 x\times(4-\log_2 x)\quad(1<x<16)$

$\log_2 x=t$로 치환하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}t(4-t)\quad(0<t<4)$

$=-\dfrac{1}{2}(t-2)^2+2$

$t=2$일 때, 즉 $\log_2 x=2$, $x=4$일 때, $S(x)$는 최댓값 2를 가지므로

$a=4$, $M=2$이다.

$\therefore\ a+M=6$

129.

점 P의 좌표를 $P(t, a^t)\,(t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (a^t, t)이다. $\angle PQR=45^\circ$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t, -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\dfrac{1}{7}$이므로 $\dfrac{a^t+t}{t-a^t}=\dfrac{1}{7}$에서

$a^t=-\dfrac{3}{4}t$ ····· ㉠

$\overline{PR}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

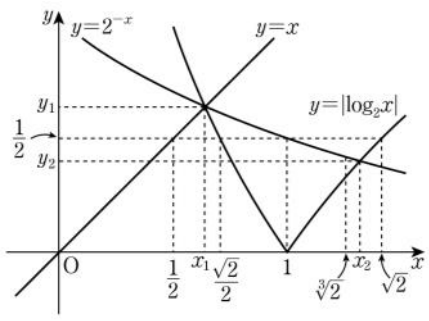
$a^{2t}+t^2=\dfrac{25}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

130.

$y=2^{-x}$, $y=|\log_2 x|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때,

두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2 x$의 교점은

직선 $y=x$ 위에 있으므로

$x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$

그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$ 즉, $\dfrac{1}{2}<y_1=x_1$

한편, $-\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}<y_1=-\log_2 x_1$이고

$y=-\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\dfrac{1}{2}<x_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\dfrac{1}{3}$

그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ ····· ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\dfrac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$이므로 $\sqrt[3]{2}<\dfrac{3}{2}$ 즉,

$2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로

$\log_2\sqrt[3]{2}<2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2$

또, $\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2\sqrt{2}>2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2<\sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1=x_1$이므로 ㄱ에서 $\dfrac{1}{2}<y_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$,

$\log_2\sqrt[3]{2}<\log_2 x_2<\log_2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{1}{3}<y_2<\dfrac{1}{2}$

그러므로 $y_1-y_2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

131.

$\log_4 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\log_2 n\le 40$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\log_2 n=\log_2\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}}=m$ (m은 40이하의 자연수)

$\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}}=2^m$

$n^{\frac{3}{4}}=2^{m-\frac{1}{2}}$

$n=2^{\frac{4}{3}(m-\frac{1}{2})}=2^{\frac{4m}{3}-\frac{2}{3}}$

에서 m이 3으로 나누어 2가 남는 자연수이면 n도 자연수가 된다.

40이하의 자연수 중 조건을 만족하는 m은 2,5,8,…,38의 13개

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 02 삼각함수

해 설

1. ⑤
[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$에서 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0$에서 $\sin\theta<0$
θ는 제3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

2.
θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서
$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$
따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

3.
$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

4.
$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

5. [정답] ③
[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기
함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프에서
함수 $y=a\tan b\pi x$의 주기는 $8-2=6$이므로
$\frac{\pi}{|b\pi|}=\frac{1}{b}=6,\ b=\frac{1}{6}$
함수 $y=a\tan\frac{\pi}{6}x$의 그래프는 점 $(2,3)$을 지나므로
$a\tan\left(\frac{\pi}{6}\times2\right)=3$에서 $a=\sqrt{3}$
따라서 $a^2\times b=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

6. 정답 ④
[해설]
$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta$에서
$\cos\theta=-7\sin\theta,\quad \tan\theta=-\frac{1}{7}$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta+(-7\sin\theta)^2=1,\quad \sin^2\theta=\frac{1}{50}$
$\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로
$\sin\theta>0$
$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 정답 8
[해설]
조건 (가)에서 $f(x)\geq0$이고, 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
수 $f(x)=a\sin bx+8-a$의 최솟값은 $8-2a$이므로
$8-2a=0,\quad a=4$
조건 (나)에서 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin bx=-1$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 방정식 $\sin bx=-1$의 해는
$bx=\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi+\frac{3}{2}\pi,\ 4\pi+\frac{3}{2}\pi,\ 6\pi+\frac{3}{2}\pi$
뿐이어야 한다.
$x<2\pi$이므로 $6\pi+\frac{3}{2}\pi<2\pi b\leq8\pi+\frac{3}{2}\pi$
따라서 $3+\frac{3}{4}<b\leq4+\frac{3}{4}$이고 b는 자연수이므로
$b=4$
$\therefore\ a+b=8$

8. [정답] ⑤
[해설]
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{16}{25}$
$\sin\theta\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$
따라서 $\sin\theta+2\cos\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

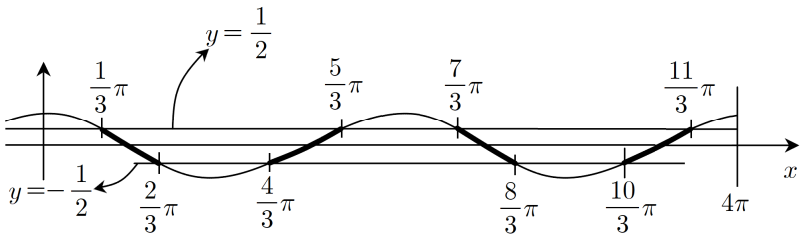
9. 정답 ②
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\ \sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로
$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \therefore\ \tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.
$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=18$
$\sin^2\theta=\frac{1}{9}$이고 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로
$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

11. 정답 ②
$\sin\theta=-\frac{1}{3},\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\tan\theta=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. 정답 32
$\sin\frac{\pi}{4}(2+x)\times\sin\frac{\pi}{4}(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)^2$
$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}x=\theta$라 할 때, $0<\theta<4\pi,\ -\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{1}{2}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육



$\frac{1}{3}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi<\theta<\frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi<\theta<\frac{11}{3}\pi$

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3},\ \frac{16}{3}<x<\frac{20}{3},\ \frac{28}{3}<x<\frac{32}{3},\ \frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

$1.\cdots<x<2.\cdots$에서 2, $5.\cdots<x<6.\cdots$에서 6

$9.\cdots<x<10.\cdots$에서 10, $13.\cdots<x<14.\cdots$에서 14

$\therefore\ 2+6+10+14=32$

13.

$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\cos\theta+\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

14.

$0\le x\le\frac{2\pi}{a}$에서 $0\le ax\le 2\pi$이므로

$2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\frac{1}{2}$에서

$ax=\frac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\frac{5\pi}{3}$, 즉 $x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\frac{\pi}{3a},1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3a},1\right)$이고

$\overline{AB}=\frac{8}{3}$이므로

$\frac{5\pi}{3a}-\frac{\pi}{3a}=\frac{4\pi}{3a}=\frac{8}{3}$

$a=\frac{4\pi}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{\pi}{2}$

15.

x, $x-6$은 로그의 진수이므로 $x>0$, $x-6>0$에서

$x>6\ \cdots$ ㉠

$\log_2 x\le 4-\log_2(x-6)$

$\log_2 x(x-6)\le\log_2 16$

$x^2-6x-16\le 0$에서 $-2\le x\le 8\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $6<x\le 8$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8=15$

16.

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

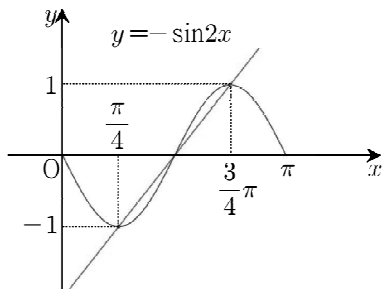
따라서

$\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

17.

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이

므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점

$\left(\frac{3}{4}\pi,1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},-1\right)$을 지나는 직선의

기울기는

$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

18.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=\frac{6}{5}$

19.

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$,

$\tan\theta=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$

20.

$\sin\theta=-2\cos\theta$, $\tan\theta=-2$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore\ \cos\theta\tan\theta=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times(-2)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

21.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 θ의 동경은 4사분면, $\cos\theta>0$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

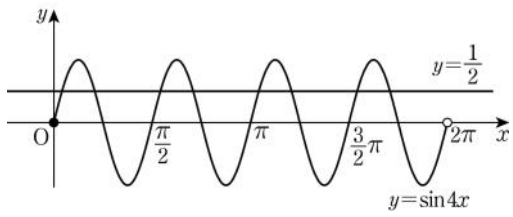
22.

$y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$이다.

좌표평면에 직선 $y=\frac{1}{2}$과 $0\le x<2\pi$의 범위에서

함수 $y=\sin 4x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 8

23.

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기는

$\frac{2\pi}{a}$이므로 $\frac{2\pi}{a}=4\pi$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

24.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\frac{7}{18}=\frac{16}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

따라서 $30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

25.

$\tan\theta=\frac{12}{5}$이고 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이

P$(-5,\ -12)$이다.

따라서 원점 O에 대하여

$\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{-12}{13}+\frac{-5}{13}=-\frac{17}{13}$

26.

$\cos(-\theta)+\sin(\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta=\frac{3}{5}$

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{25}$

27.

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^{2\theta}}=2\tan^2\theta=4,\ \tan\theta=-\sqrt{2}\ (\because\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

28. $\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\tan\left\{\pi(x+1)+\frac{\pi}{2}\right\}$

따라서 함수 $y=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 1

29. $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=\frac{\tan^2\theta-6}{\tan\theta}=1$에서 $\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan\theta=x$로 치환하면, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $x>0$이고,

$x^2-x-6=0,\ (x-3)(x+2)=0$에서 $x=3$,

$\tan\theta=3$이고, θ의 동경이 3사분면에 있으므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{4\sqrt{10}}{10}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

30.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 할 때, 중심각의 크기가 1라디안이므로 $\frac{l}{r}=1$ 즉, $l=r$

부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l=24$이므로

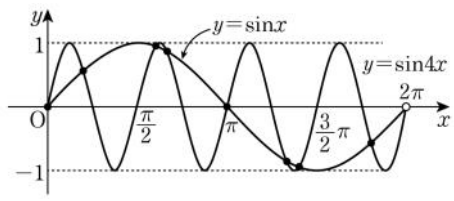
$l=r$를 대입하면 $3r=24$

$r=8,\ l=8$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times8\times8=32$

31.

함수 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 함수 $y=\sin4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

32.

$\sin^2x=\cos^2x+\cos x$

$1-\cos^2x=\cos^2x+\cos x$

$2\cos^2x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0<x\le2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

$\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{5}{3}\pi<\cos\frac{5}{3}\pi,\ \sin\pi>\cos\pi$

이므로 구하는 모든 x의 값의 합은 $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$

33.

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OP}=\frac{3}{4}r,\ \overline{OQ}=\frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3},\ r=8$

따라서 호 AB의 길이는 $8\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

34.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$, $\sin\theta=2\cos\theta$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

35.

사인법칙에 의해

$\frac{5}{\sin\theta}=2\times4$

$\sin\theta=\frac{5}{8}$

36.

삼각형ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times15$

따라서 $\overline{AC}=2\times15\times\sin B=2\times15\times\frac{7}{10}=21$

37.

모든 실수 x에 대하여

$-1\le\sin x\le1$이므로

$-5\le5\sin x\le5$

$-4\le5\sin x+1\le6$

따라서 $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값은 6

38.

함수 $f(x)$의 주기가 4π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{b}=4\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

최솟값이 -1이므로

$-|a|+3=-1$에서 $a=4$

따라서 $a+b=\frac{9}{2}$

39.

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}\times\sin\theta=\sqrt{6}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$

$\angle A$는 예각이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

40.

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3}{4}\pi=0$

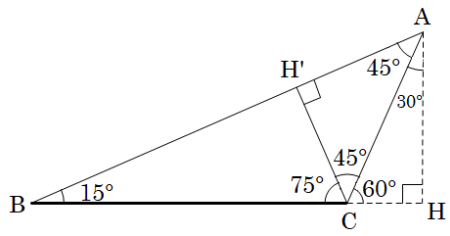
41.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{1}{4}=1+2\sin\theta\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{4}{3}$

42.



$\overline{CH}=x$라 하면

$\triangle ACH$에서 $\overline{AH}=\sqrt{3}x$

$\triangle ACH'$에서 $\overline{CH'}=\sqrt{2}x$

$\angle A=\angle BCH'$, $\angle B$는 공통

$\triangle ABH\backsim\triangle CH'B$(AA 닮음)

$\sin15^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CH'}}{\overline{BC}}$

$\frac{\sqrt{3}x}{8}=\frac{\sqrt{2}x}{\overline{BC}}$

$\overline{BC}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

43.

$\angle ADB=\alpha$, $\angle BDC=\beta$라 하면

$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{15}}{12}$이고,

$\cos\beta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{12}$이다.

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$k^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos\beta$

$=15+16-8\sqrt{15}\times\cos\beta$

$=31-8\sqrt{15}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

$=31+10=41$

따라서 $k^2=41$이다.

44.

$\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x)$, $\sin^2x=1-\cos^2x$이므로

$1-\cos^2x=3(1+\cos x)^2$, $2(1+\cos x)(2\cos x+1)=0$

(ⅰ) $\cos x=-1$일 때, $\sin x=0$이고 $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $x=\frac{2}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 모든 해의 합은 $\frac{5}{3}\pi$이다.

45.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\cos\theta\times(-\tan\theta)=-\sin\theta$

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$이므로 $30(1-\sin\theta)=30\times\frac{8}{5}=48$

46.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y좌표가

같으므로 $\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 $2\sin x=1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

즉, $\sin x=\frac{1}{2}$

그러므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x좌표의 합은 π

47. ③

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 PBC에서

$\angle PBC=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin135^\circ}=\frac{PC}{\sin30^\circ}$이므로 $\overline{PC}=2\sqrt{3}\times\frac{\sin30^\circ}{\sin135^\circ}=\sqrt{6}$

$\overline{AC}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times2\sqrt{2}\times b\times\cos60^\circ$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A=60^\circ$에서 $C<120^\circ$이므로 $C=45^\circ$

$\angle PCA=45^\circ-15^\circ=30^\circ$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

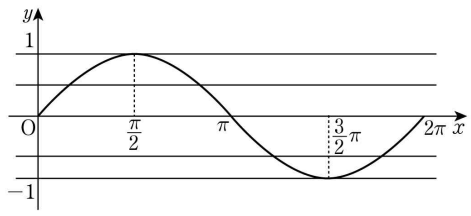
48. ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\frac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로 $-1\le t\le1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\le x\le2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은 $t=-1$일 때 $\frac{3}{2}\pi$, $-1<t\le0$일 때 3π, $0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\frac{\pi}{2}$이다.

$0\le x\le2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\frac{5}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고 $0<\alpha<1$이다.

(i) $a=\frac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b-\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b+\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이고 $f(2)=\frac{9}{2}$

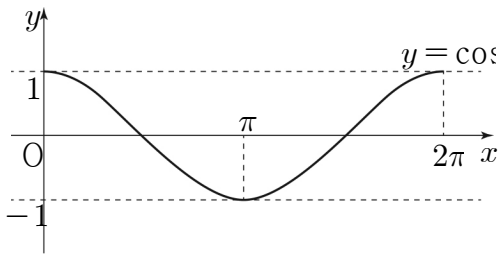
49. [정답] ②

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$2(1-\cos^2x)-3\cos x=k$

$2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$

$0\le x\le2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



상수 a에 대하여

$0\le x\le2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a=-1$일 때 1이고, $-1<a\le1$일 때 2이므로

$0\le x\le2\pi$일 때,

방정식 $2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$의

서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x=\pi$가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$2\times(-1)^2+3\times(-1)+k-2=0$에서 $k=3$

$2\cos^2x+3\cos x+1=(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$

에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 $k\times\alpha=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$

50. [정답] ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$0\le x\le2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$k\sin x=\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{k}$ $(\cos x\ne0)$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(\alpha,\cos\alpha)$, $(\alpha+\pi,-\cos\alpha)$

선분 AB를 3:1로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1},\frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$

이므로 $C\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,-2\cos\alpha\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$

$-2\cos\alpha=k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

에서 점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고

$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

51. [정답] 22

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{OP}=k_1$, $\overline{OQ}=k_2$라 하자.

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=k_1^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_1\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=k_2^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_2\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

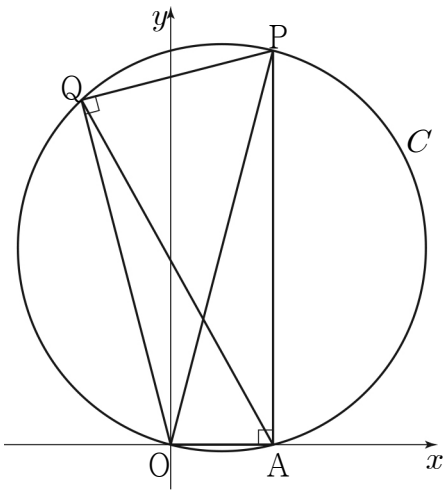
이므로 두 실수 k_1, k_2는 이차방정식

$2^2=x^2+(2\sqrt{15})^2-2\times x\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

의 서로 다른 두 실근이다.

$x^2-15x+56=(x-7)(x-8)=0$

에서 $k_1>k_2$이므로 $k_1=8$, $k_2=7$



$\cos(\angle OPA)=\cos(\angle OQA)$이므로

$\angle OPA=\angle OQA$

삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면

두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로

점 Q도 원 C 위의 점이다.

$\sin(\angle OPA)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$이므로

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OA}}{\sin(\angle OPA)}=8=2R$

그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$\angle PAO=\angle OQP=\frac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{PQ}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

사각형 OAPQ의 넓이는

두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15}+\frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}$

에서 $p=2$, $q=11$

따라서 $p\times q=22$

52. 정답 ①

[해설]

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$2=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin A$ $\therefore\ xy=\frac{4}{\sin A}$ …… ㉠

$\angle BCD=\theta$라 하면 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\times 3\times 2\times\cos\theta$

$=9+4-12\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$ …… ㉡

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\times\cos A$

$=(x+y)^2-2xy(1+\cos A)$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(x+y)^2=17+2xy(1+\cos A)$ …… ㉣

점 E가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 선분 AE를 지름으로 하는 원의 반지름을 R라 하면 선분 CE를 지름으로 하는 원의 반지름은 $2R$이다.

또한 $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이므로 $\overline{P_1P_2}=3k$, $\overline{Q_1Q_2}=5\sqrt{2}k$라 하면 삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙에 의하여

$\frac{5\sqrt{2}k}{\sin\theta}=\frac{5\sqrt{2}k}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{15k}{2}=2\times 2R$ $\therefore\ 2R=\frac{15}{4}k$

삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙에 의하여

$\frac{3k}{\sin A}=2R=\frac{15}{4}k$ $\therefore\ \sin A=\frac{4}{5}$

㉠에 대입하면 $xy=5$

$\angle DAB>\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\frac{3}{5}$

$xy=5$와 $\cos A=-\frac{3}{5}$를 ㉣에 대입하면

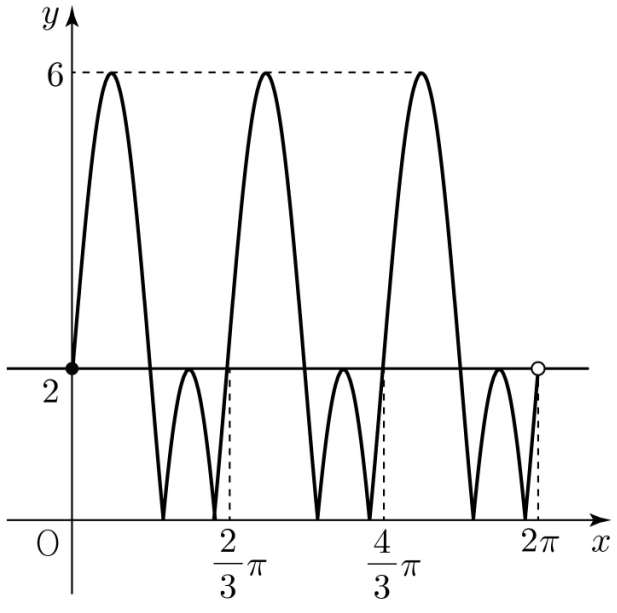
$(x+y)^2=17+2\times 5\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=21$

$\therefore\ x+y=\sqrt{21}$

53. [정답] ③

[해설]

삼각함수 $y=4\sin 3x+2$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $0\le x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$는 다음과 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

54. [정답] ①

[해설]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\angle AFC=\alpha$, $\angle CDE=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle ECD=\angle EFB=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{ED}}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\overline{EC}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{ED}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$

$\overline{CD}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$

$=x^2+100+2\times x\times 10\times\cos\alpha$

$=x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle ABE=\angle CDE=\frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=2\sqrt{10}$이므로 $\overline{BE}=\overline{AE}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 3이다.

$\overline{AF}=\frac{2}{3}\times\overline{AB}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{3}\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{20}{3}$

55. **정답** ③

$\cos x=\sin\frac{\pi}{7}$의 두 근이 α, β라 할 때,

$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}=\frac{5}{14}\pi$, $\beta=2\pi-\frac{5}{14}\pi=\frac{23}{14}\pi$이므로 $\beta-\alpha=\frac{18}{14}\pi=\frac{9}{7}\pi$

56. **정답** 98

BCD에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin\angle DCB}=\frac{\overline{BD}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2R_1$, $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$

삼각형 ABD에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin\angle DAB}=\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2$,

$R_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$, $p=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(나)는 $2\times\overline{AD}\times\overline{AB}\times\cos\frac{2}{3}\pi=2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2=q$

$\overline{BD}^2=5-(-2)=7$

$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}^2=\frac{7}{\sqrt{6}}=r$

$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7}{\sqrt{6}}\right)^2=9\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$=9\times\frac{98}{9}=98$

57. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times5=\frac{15}{2}$이므로

$\overline{AB}=3$, 이때 $\overline{BC}=\overline{AB}+6=9$

함수 $y=f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=12$, $b=6$

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},5\right)$이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=5$에서 $a\sin\frac{\pi}{4}+1=5$, $a=4\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2+6^2=32+36=68$

58. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle CAE=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$이고 $\overline{BC}=4$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CE}}{\sin\theta}=\overline{BC}$, $\overline{CE}=1$

$\overline{BF}=\overline{CE}=1$이므로 $\overline{FC}=3$

$\overline{BC}=\overline{DE}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$이다.

$\angle BAD=90^\circ-\angle DAC=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABF)}=\frac{1}{\sin\theta}=4$이므로 $\sin(\angle ABF)=\frac{k}{4}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle ABC)=\frac{\overline{AC}}{4}$이므로

$\overline{AC}=4\sin(\angle ABC)=4\times\frac{k}{4}=k$

직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle BCA)=\frac{k}{4}$이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{FC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{FC}\times\cos(\angle FCA)$

$k^2=k^2+3^2-2\times k\times3\times\frac{k}{4}$, $\frac{3}{2}k^2=9$

따라서 $k^2=6$

59. **정답** ①

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 따라

$13=9+\overline{AC}^2-6\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$, $\overline{AC}^2-3\overline{AC}-4=0$, $\therefore\ \overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$S_2=\frac{5}{6}S_1=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$, $\overline{AD}=x$, $\overline{CD}=y$, $\angle ADC=\theta$이라 할 때, 삼각형 ACD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times xy\times\sin\theta=\frac{9}{2}\sin\theta=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{5}{9}\sqrt{3}$, 삼각형 ADC에서 사인법칙에 따라

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$, $R=\frac{4}{2\times\frac{5}{9}\sqrt{3}}=\frac{18}{5\sqrt{3}}$

$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{18}{5\sqrt{3}}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{162}{25\times3}=\frac{54}{25}$

60.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times \cos\frac{\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$이다.

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 + \overline{CD}^2 - 2\times 2\times \overline{CD}\times \cos\frac{2\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{CD} = \boxed{1}$이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$는 공통이고 $\angle EAB = \angle ECD$이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$이다. 즉,

$\frac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$

에서 $\overline{ED} = \boxed{\frac{7}{3}}$이다.

$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin\theta}$

에서 $\sin\theta = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$이다.

$p=1,\ q=\frac{7}{3},\ r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$이므로

$(p+q)\times r = \left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$

61.

함수 $y=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의

서로 다른 실근의 개수는

$0\le x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이

만나는 점의 개수와 같다.

$1\le l\le k$인 자연수 l에 대하여

$\frac{2(l-1)}{k}\pi \le x < \frac{2l}{k}\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와

직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 개수는 2이고

$0\le x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이

만나는 점의 개수가 8이므로

$2k=8$에서 $k=4$

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{3}$의 서로 다른

실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_8$이라 하자.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

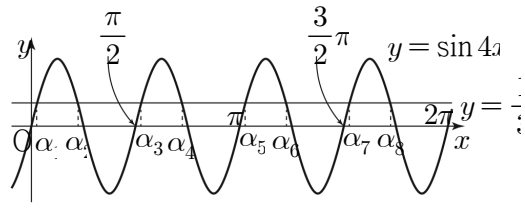
$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha_1,\ \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1,\ \alpha_4 = \frac{3}{4}\pi - \alpha_1,$

$\alpha_5 = \pi + \alpha_1,\ \alpha_6 = \frac{5}{4}\pi - \alpha_1,\ \alpha_7 = \frac{3}{2}\pi + \alpha_1,$

$\alpha_8 = \frac{7}{4}\pi - \alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

<참고>



62.

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ACB) = \frac{10^2 + \overline{BC}^2 - k^2}{2\times 10\times \overline{BC}}$

$= \frac{1}{20}\left(\overline{BC} + \frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right),$

$\cos(\angle DCA) = \frac{10^2 + \overline{CD}^2 - k^2}{2\times 10\times \overline{CD}}$

$= \frac{1}{20}\left(\overline{CD} + \frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{CD}}\right)$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA)$이다.

$\frac{1}{20}\left(\overline{BC} + \frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right) = \frac{1}{20}\left(\overline{CD} + \frac{100-k^2}{\overline{CD}}\right)$

$\overline{BC} - \overline{CD} = (100-k^2)\times\left(\frac{1}{\overline{CD}} - \frac{1}{\overline{BC}}\right)$

$\overline{BC} - \overline{CD} = (100-k^2)\times\frac{\overline{BC}-\overline{CD}}{\overline{BC}\times\overline{CD}}$

$\overline{AC} = 10 < 2R$이므로 $\overline{BC} \ne \overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC}\times\overline{CD} = 100-k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD) + \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi - \angle BAD)$

$= \frac{1}{2}\{k^2 + (100-k^2)\}\sin(\angle BAD)$

$= 50\sin(\angle BAD) = 40$

에서 $\sin(\angle BAD) = \boxed{\frac{4}{5}}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} = 2R$에서 $\overline{BD} = \frac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD} : R = \boxed{\frac{8}{5}} : 1$

따라서 $f(k) = 100-k^2,\ p=\frac{4}{5},\ q=\frac{8}{5}$이므로

$\frac{f(10p)}{q} = (100-8^2)\times\frac{5}{8} = \frac{45}{2}$

63.

$\angle BAC = \theta,\ \overline{AC} = a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

즉,

$2^2 = 3^2 + a^2 - 2\times 3\times a\times\frac{7}{8}$

$a^2 - \frac{21}{4}a + 5 = 0$

$4a^2 - 21a + 20 = 0$

$(4a-5)(a-4) = 0$

따라서 조건에서 $a>3$이므로 $a=4$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\overline{AM}=\overline{CM}=\frac{a}{2}=2$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{7}{8}$

$=\frac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$

에서

$2\times2=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{MD}$

따라서

$\overline{MD}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

64.

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1(0<x_1<1)$, x_2, x_3이라 하면 삼각함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로 $x_2=2-x_1$, $x_3=x_1+4$

$x_1+x_2+x_3=x_1+(2-x_1)+(x_1+4)$

$=x_1+6=\frac{25}{4}$

$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2-x_1=\frac{7}{4}$

따라서 $\overline{AB}=x_2-x_1=\frac{3}{2}$

65.

ㄱ. $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\angle CBA)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle CBA)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle CBA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{AC}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{AD}=k(k>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times7\times\cos(\pi-\theta)$

$=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$이므로

$\overline{AD}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$

$\overline{AD}=x(x>0)$이라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$이므로 $\overline{AD}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

66.

$12-\alpha_1=\alpha_2$이므로 $\alpha_2-\alpha_1=12-2\alpha_1=8$, $\alpha_1=2$

$f(2)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=k$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$, $x=4$, $\beta_1=4$, $\beta_2=12-4=8$이므로 $|\beta_1-\beta_2|=4$

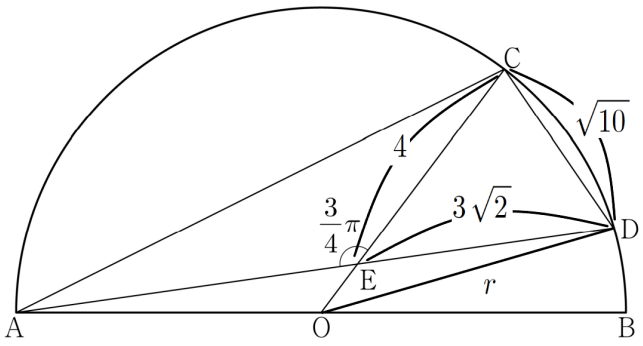
67.

삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\cos(\angle CED)$

$=16+18-24\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$, $\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{10}$

원의 반지름을 r이라 할 때,



삼각형 OED에서 코사인 법칙에 따라

$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$r^2=r^2-8r+16+18+6(r-4)$, $10-2r=0$, $r=5$

삼각형 ACD에서 $\angle CAD=\theta$라 할 때, 사인법칙에 따라

$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AEC에서

$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{4}{\sin\theta}$, $\overline{AC}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{40}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

68.

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$에서

$4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=2$ 또는 $4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=-2$

$ax-\frac{\pi}{3}=\theta$라 할 때, $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{11\pi}{3}$

$\sin\theta=0$ 또는 $\sin\theta=-1$

$\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$ $\therefore\ n=6$

$x=\frac{\pi}{3a},\ \frac{4\pi}{3a},\ \frac{7\pi}{3a},\ \frac{10\pi}{3a},\ \frac{11\pi}{6a},\ \frac{23\pi}{6a}$

$\frac{\pi}{3a}+\frac{4\pi}{3a}+\frac{7\pi}{3a}+\frac{10\pi}{3a}+\frac{11}{6a}\pi+\frac{23}{6a}\pi$

$=\frac{(2+8+14+20+11+23)\pi}{6a}=\frac{78\pi}{6a}=\frac{13\pi}{a}=39$, $\therefore\ a=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

69.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{4+27-13}{12\sqrt{3}}=\dfrac{18}{12\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(가)는 $p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\angle ABD=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$이므로 사인법칙에 의하여 ABD의 외접원의 반지름은 $\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4=2R,\ R=2$ (나)는 $q=2$

삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=x$라 할 때, 코사인법칙에 따라

$\overline{AD}^2=4+x^2-4x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4,\ x^2-2\sqrt{3}x=0,\ \therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{3}$

그러므로 $\overline{CD}=\sqrt{3}$

삼각형 ACD에서 $\cos(\angle CAD)=\dfrac{4+13-3}{4\sqrt{13}}=\dfrac{14}{4\sqrt{13}}=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$

사각형ABDE의 외접원의 반지름은 2이므로 삼각형 ADE의 외접원의 반지름도 2

$\sin(\angle CAD)=\sqrt{1-\dfrac{49}{52}}=\sqrt{\dfrac{3}{52}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\dfrac{\overline{DE}}{\sin(\angle CAD)}=4,\ \overline{DE}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

(다) $r=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

$\therefore\ p\times q\times r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{39}}{13}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

70.

$y=f(x)$가 감소함수이므로 $x=-\dfrac{\pi}{6}$일 때, 최댓값을 갖는다.

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=a+3=7,\ a=4$

$x=b$일 때, 최솟값 3이므로 $f(b)=4-\sqrt{3}\tan2b=3,\ \tan2b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$2b=\dfrac{\pi}{6},\ b=\dfrac{\pi}{12}\quad\therefore\ ab=\dfrac{\pi}{3}$

71.

호 BC와 호CD의 원주각이 같으므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 할 때,

$\overline{BC}^2=25+45-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\cos\theta,$

$\overline{CD}^2=49+45-42\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\cos\theta,\ 12\sqrt{5}\cos\theta=24,\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=10$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=5\sqrt{2}=2R,\ \therefore\ R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

72.

원 O'에서 중심각의 크기가 $\dfrac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO'B의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\dfrac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면,

$S_1=T_1+S_2-T_2$

$=\left(\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{7}{6}\pi\right)+S_2-\left(\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$=\dfrac{3}{2}\pi+S_2$

따라서 $S_1-S_2=\dfrac{3}{2}\pi$

73.

$\angle ABC=\theta$라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

이므로 $\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\dfrac{1}{8}=36$

그러므로 $\overline{AC}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle ACE=\angle ABE$

호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle EAC=\angle EBC$

한편, $\angle ABE=\angle EBC$이므로 $\angle ACE=\angle EAC$

그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{EA}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle ADE=\angle DAB+\angle ABD$

한편, $\angle DAB=\angle CAD$, $\angle ABD=\angle EBC$

그러므로 $\angle ADE=\angle CAD+\angle EBC$

$=\angle CAD+\angle EAC$

$=\angle EAD$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{EA}=\overline{ED}$인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{EA}^2+\overline{EC}^2-2\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos(\pi-\theta)$이고

ㄴ에서 $\overline{EA}=\overline{EC}$이므로

$36=2\times\overline{EA}^2-2\times\overline{EA}^2\times\left(-\dfrac{1}{8}\right),\ \overline{EA}=4$

그러므로 $\overline{EA}=\overline{ED}$에서 $\overline{ED}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

74.

$\overline{AC}=k$라 하면 $\overline{BD}=2k$이고

$\overline{AH}:\overline{HB}=1:3$이므로 $\overline{AH}=\dfrac{1}{2}$

$\angle CAB=\theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r,\ \dfrac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$

즉, $\overline{BC}=2r\sin\theta,\ \overline{AD}=2R\sin\theta$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2$이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2=51$에 대입하면

$\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$ …… ㉠

삼각형 AHC에서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CA}}=\dfrac{1}{2k}$이므로

두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=4+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta=k^2+2$ …… ㉡

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4k^2+2\times2\times2k\times\cos\theta=4k^2+8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=3k^2+6=51$

즉, $k^2=15$

따라서 $\overline{AC}^2=15$

75.

$2\cos^2x-\sin(\pi+x)-2=2(1-\sin^2x)+\sin x-2$

$=-2\sin^2x+\sin x$

$=-\sin x(2\sin x-1)=0$

$\sin x=0$또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

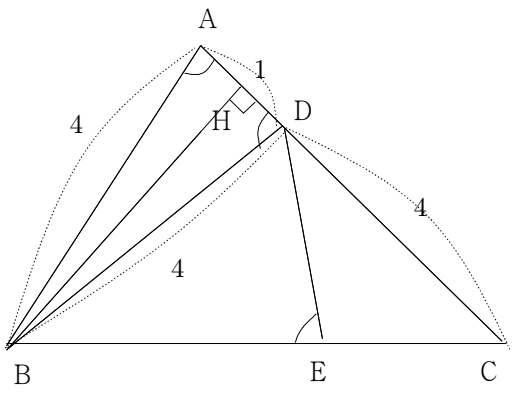
$\sin x=0$에서 $x=\pi$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

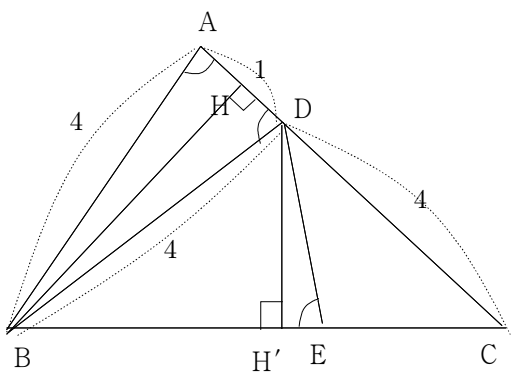
$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
따라서 모든 해의 합은 2π이다.

76.
$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$에서
삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를
각각 k, $2k$, $\sqrt{2}k(k>0)$이라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$2k^2=k^2+4k^2-4k^2\cos(\angle ABC)$
$4k^2\cos(\angle ABC)=3k^2$
$\cos(\angle ABC)=\frac{3}{4}$이므로
$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.
따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{CA}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

77.
삼각형 ABD에서
$\angle BAC=\angle BDA$이고 $\overline{AB}=4$이므로
$\overline{BD}=4$ ……㉠
이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\overline{AB}\cos(\angle BAC)=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$
그러므로
$\overline{AD}=1$

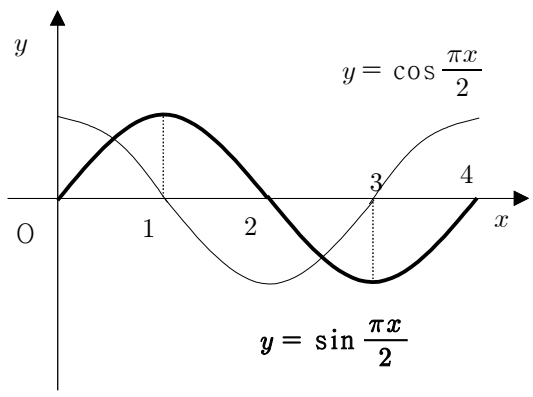


삼각형 BCD는 $\overline{DB}=\overline{DC}=4$인 이등변삼각형이다.
점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{DE}=x$라 하면
$\overline{DH'}=x\sin(\angle H'ED)$
$=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$
$=\frac{\sqrt{63}}{8}x$ …… ㉡

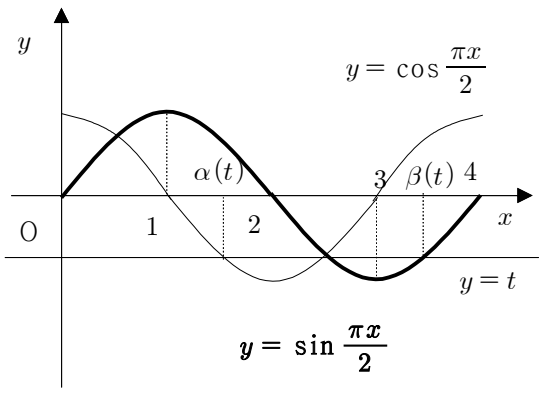


한편, 삼각형 ABC에서
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$
$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$
$=36$
이므로
$\overline{BC}=6$
이때,
$\overline{BH'}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$ …… ㉢
직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면
$4^2=\left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2+3^2$
$\frac{63}{64}x^2=7$
$x^2=\frac{64}{9}$
$\overline{DE}=x$이므로 $x>0$
따라서 $\overline{DE}=\frac{8}{3}$

78.
ㄱ.
방정식
$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$
에서
$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$
이 방정식의 실근은 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=t$와의 교점의 x좌표이다.
한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1\le t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.

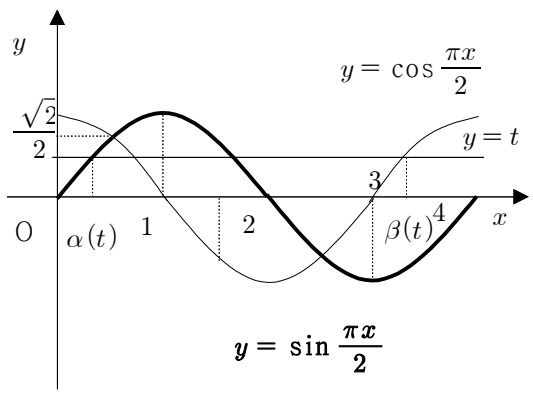


이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 $(2,0)$에 대하여 대칭이다.
그러므로
$\alpha(t)=1+k$ $(0<k\le1)$
로 놓으면
$\beta(t)=4-k$
그러므로

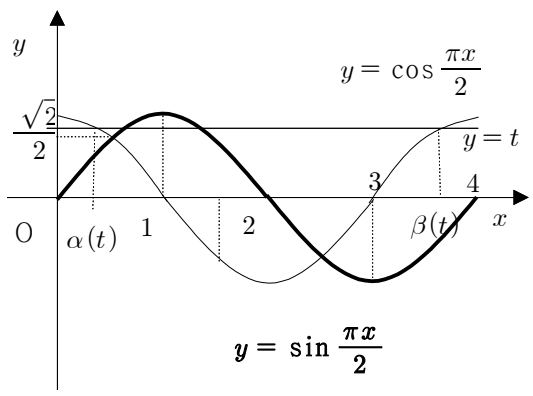
꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ <참>

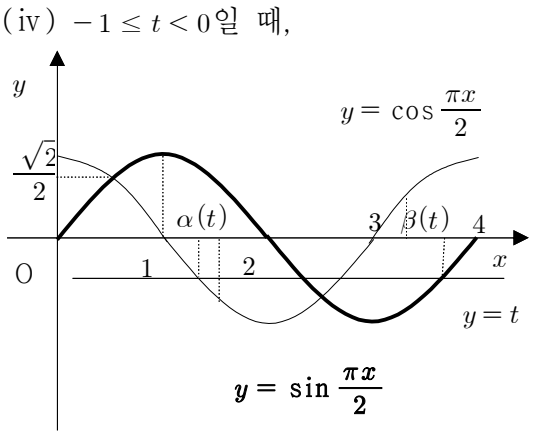
ㄴ.
실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x|0\le x<4\}$의 원소이므로
$\beta(0)=3$, $\alpha(0)=0$
그러므로 주어진 식은
$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$
$=\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$
(i) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,
$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$
$t\ne0$이면 다음 그림과 같다.



이때,
$\alpha(t)=k\ \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)$
이라 하면
$\beta(t)=3+k$
그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$
(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때,
$\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$
이라 하면
$\beta(t)=4-k$
그러므로
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ \ (0<2k<1)$
(iii) $t=1$일 때,
$\alpha(1)=0$, $\beta(1)=1$이므로
$\beta(1)-\alpha(1)=1$
(iv) $-1\le t<0$일 때,

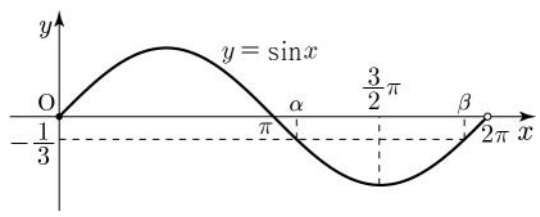


$1<\alpha(t)\le2$, $3\le\beta(t)<4$이므로
$\beta(t)-\alpha(t)<3$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서
$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$
$=\left\{t|0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는
$0<t_1<\frac{\sqrt{2}}{2}<t_2$
이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면
$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\alpha$, $t_2=\cos\frac{\pi}{2}\alpha$
이때, $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로
$\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{2}$
이 식을 $\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면
$2\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{4}=1$
$8\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+4\sin\frac{\pi}{2}\alpha-3=0$
$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$
이때, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha>0$이므로
$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$
그러므로
$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,
$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서
$t_1\times t_2=\frac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{3}{8}$ <거짓>

79.
$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로
$3(1-\sin^2x)+5\sin x-1=0$
$3\sin^2x-5\sin x-2=0$
$(3\sin x+1)(\sin x-2)=0$
$-1\le\sin x\le1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{3}$ ····· ㉠



㉠을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha$, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha+\beta=3\pi$
따라서 모든 해의 합은 3π

80.
선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로
삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$, $\angle CAB=\alpha$라 하면
$\cos\alpha=\frac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$이므로
$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\overline{BC}=\overline{AB}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{AB}=18$이고, $\overline{AC}=6$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로
$\overline{AD}=10$
삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{DC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$
$\overline{DC}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$
삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,
사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$
삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S=27\pi$
따라서 $\frac{S}{\pi}=27$

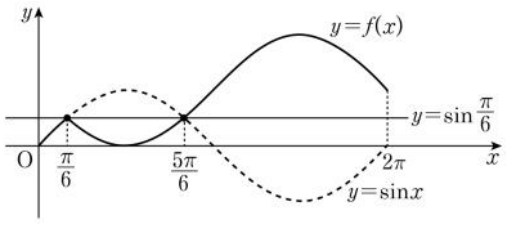
81.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,
$a\sin b\pi x=a$, $\sin b\pi x=1$에서 $b\pi x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$에서 $x=\frac{1}{2b}$, $\frac{5}{2b}$
$\beta-\alpha=\frac{2}{b}$, $\alpha\beta=\frac{5}{4b^2}$
삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times(\beta-\alpha)=5$, $a\times\frac{2}{b}=10$, $a=5b$
OA의 기울기는 $\frac{a}{\alpha}$, OB의 기울기는 $\frac{a}{\beta}$, $\frac{a^2}{\alpha\beta}=\frac{5}{4}$
$\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$, $ab=\frac{5}{4}$
$ab=5b^2=\frac{5}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{5}{2}$, $\therefore\ a+b=3$

82.
사인법칙에 따라 $\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=2R$이므로
$\frac{\overline{BD}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=4\sqrt{7}$, $\overline{BD}=8$
$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\overline{BC}=4\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$
코사인 2법칙에 따라
$\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BCD)=\overline{BD}^2$
$84+x^2-4\sqrt{21}x\times\frac{\sqrt{21}}{7}=64$, $x^2-12x+20=0$
$x=2$ 또는 10에서 삼각형 BCD의 세변의 길이이므로 $x=\overline{CD}=2$
$\therefore\ \overline{BD}+\overline{CD}=10$

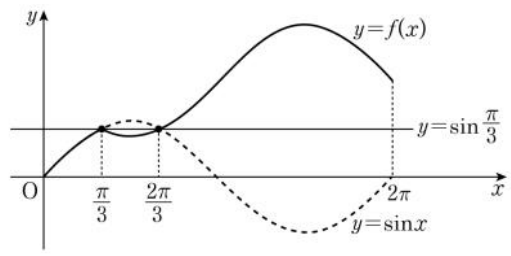
83. 그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

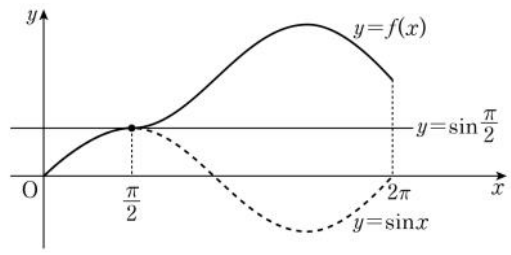
(i) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



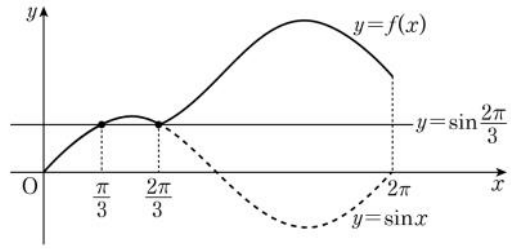
(ii) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



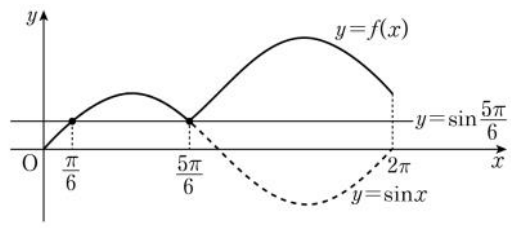
(iii) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$ 일 때, $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi<x\le2\pi$ 일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0,2\pi]$에서 방정식 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1$, $k=5$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2$, $k=4$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=1$이므로 $\sin x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

84. 호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle CBD=\angle CAD=\angle DAB=\angle DCB$이다. 즉, $\overline{BD}=\overline{DC}$
$\overline{BD}=\overline{DC}=a$, $\overline{AD}=b$, $\angle CAD=\theta$라 하면 $\angle DAB=\theta$이고
$\overline{BD}^2=\overline{DC}^2$이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면
$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$,

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$4b\cos\theta = 28$ 이므로 직각삼각형 ADE 에서 $k = b\cos\theta = 7$

따라서 $12k = 84$

85. $f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$ 의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a$ 이므로 $\overline{AC} = a$

그림의 삼각형이 정삼각형이므로 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 이고 직선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x$

$\overline{OB} = \frac{a}{2}$ 이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\sqrt{3}\right)$

$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$ 에 대입하면, $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{a}{4}\sqrt{3}$

$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

86. 삼각형 ABO_2에서 $\overline{AO_2}$는 원 C_1의 지름이고 점 B는 그 원 위의 한 점이므로 삼각형 ABO_2는 $\angle ABO_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
피타고라스정리에 따라
$\overline{AB}^2 + \overline{BO_2}^2 = \overline{AO_2}^2$ 이므로 $k^2 + (2\sqrt{2}k)^2 = 9k^2$, $\overline{AO_2} = 3k$

직각삼각형 ABO_2에서 $\cos\angle BO_2A = \frac{\overline{BO_2}}{\overline{AO_2}} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{CO_2} = x$라 할 때, 코사인 법칙에 따라
$\overline{BC}^2 = \overline{BO_2}^2 + \overline{CO_2}^2 - 2 \times \overline{BO_2}^2 \times \overline{CO_2}^2 \times \cos\angle CO_2B$
$k^2 = 8k^2 + x^2 - 4\sqrt{2}kx \times \cos\frac{\theta_1}{2}$, $k^2 = 8k^2 + x^2 - 4\sqrt{2}kx \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$x^2 - \frac{16}{3}kx + 7k^2 = 0$, $3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$
$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0(3x - 7k)(x - 3k) = 0$
$x = \overline{CO_2} = \frac{7}{3}k$ 또는 $x = \overline{CO_2} = 3k$
$\overline{CO_2} \neq \overline{AO_2} = 3k$이므로 $\overline{CO_2} = \frac{7}{3}k$

$\therefore f(k) = 3k$, $g(k) = \frac{7}{3}k$, $p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\therefore f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{56}{9}$

87.
$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$ 이다.
$\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2는 각각
$S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin\alpha = 5\sin\alpha$
$S_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin\beta = 5\sin\beta$
주어진 조건에서 $3S_1 = 4S_2$이므로
$\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$
$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 이므로 $\beta = \frac{3}{2}\pi - \alpha$
$\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$
$\sin\alpha > 0$ 이므로 ㉠에서 $\cos\alpha < 0$
따라서 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$
코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는
$\overline{AB} = \sqrt{(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}\cos\alpha}$
$= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{10})^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)}$
$= 4\sqrt{2}$

88.
원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.
점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ 이므로
점 A의 좌표는 $A(2\sqrt{2}, 1)$
점 Q가 점 P와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다. 그러므로
점 B의 좌표는 $B(1, 2\sqrt{2})$
점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로
동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.
그러므로 점 C의 좌표는 $C(-1, -2\sqrt{2})$
삼각함수의 정의에 의해
$\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma = \frac{(-2\sqrt{2})}{(-1)} = 2\sqrt{2}$
따라서 $9(\sin^2\beta + \tan^2\gamma) = 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8\right) = 80$

89.
닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $0 < a < \frac{4}{7}$ 이므로
$-\frac{\pi}{a} < -\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2} < \frac{2\pi}{a}$ 이다.
함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지나므로
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right) + b = -2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right) + b = 0$
$f\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right) + b = 0$
따라서 $\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$
$0 < a < \frac{4}{7}$ 에서 $0 < \frac{a}{2}\pi < \frac{2}{7}\pi$, $0 < \frac{7a}{2}\pi < 2\pi$
이므로
$\frac{7a}{2}\pi = 2\pi - \frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi = \pi + \frac{a}{2}\pi$
따라서 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{3}$
(ⅰ) $a = \frac{1}{2}$ 일 때
$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$ 에서
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b$
$= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b$
$= -\sqrt{2} + b = 0$
이므로 $b = \sqrt{2}$
이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a = \frac{1}{3}$ 일 때
$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + b$ 에서
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$$

$$=-1+b=0$$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$ 이다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$ 이고

$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

90.

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의해

$\frac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$, $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC 는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$ 에서 $\frac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$ 이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a^2$,

$100=\frac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

91.

∠BAD 와 ∠BCD 는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

∠BAD = ∠BCD = θ, $\overline{AD}=a$, $\overline{CB}=b$ 라 하면

삼각형 ABD 의 넓이 S_1 은

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD 의 넓이 S_2 는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k$, $b=5k\,(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

∠ABC 와 ∠ADC 는 같은 호에 대한 원주각이므로

∠ABC = ∠ADC = α

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

92.

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi$, $R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2-3a-40=0$, $(a-8)(a+5)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

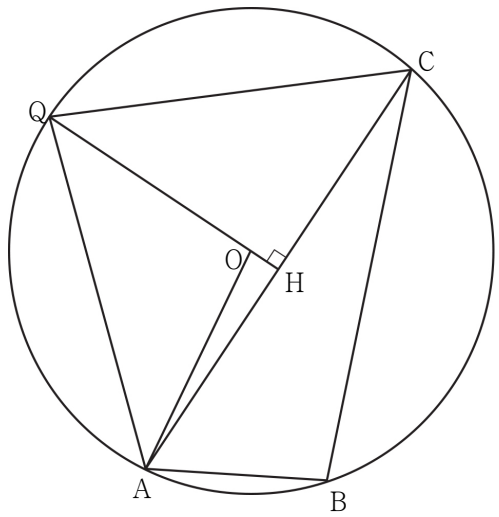
$\cos(\angle CBA)=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어

삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{QH}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

93.

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면

함수 $f(m)$의 주기가 k이므로

집합 A_k는 $A_k=\{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$이다.

ㄱ. $k=3$일 때, $f(1)=0$, $f(2)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\frac{2\times2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=1$을 만족시키는 자연수 $m\,(m=1, 2, \cdots, k)$가 존재해야 한다.

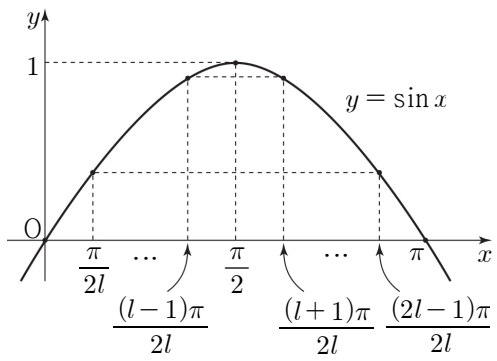
$\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$

$m=1+\frac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로

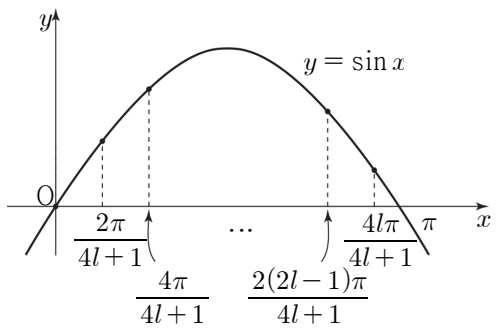
k는 4의 배수이어야 한다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

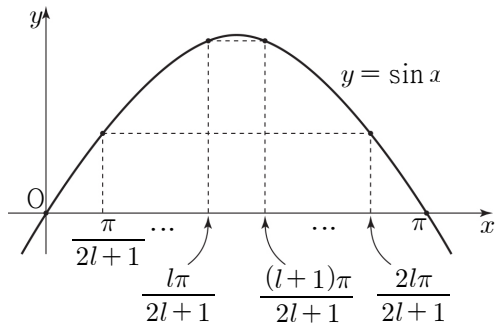
따라서 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며
그 개수는 22이다. (참)
ㄷ. 4 이상의 자연수 k에 대하여
(ⅰ) $k=4l$(l은 자연수)인 경우
$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l}\pi$이므로
$m=1$일 때, $f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l}\pi=\sin 0=0$
$m=l+1$일 때,
$f(l+1)=\sin\dfrac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$
$m=2l+1$일 때,
$f(2l+1)=\sin\dfrac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$
$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l)$일 때,
$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l}\pi=\dfrac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$
이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는
$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고
그 개수는 l이다.
같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중
음수의 개수도 l이다.
따라서 집합 A_k의 원소의 개수는
$l+l+1=2l+1$
(ⅱ) $k=4l+1$(l은 자연수)인 경우
$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로
$m=1$일 때,
$f(1)=\sin\dfrac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin 0=0$
$4l+1$ 이하의 서로 다른 두 자연수
$r,\ s$에 대하여
$\dfrac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\dfrac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$
에서 $4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는
짝수이므로
$\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi,\ \dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq 3\pi$이다.



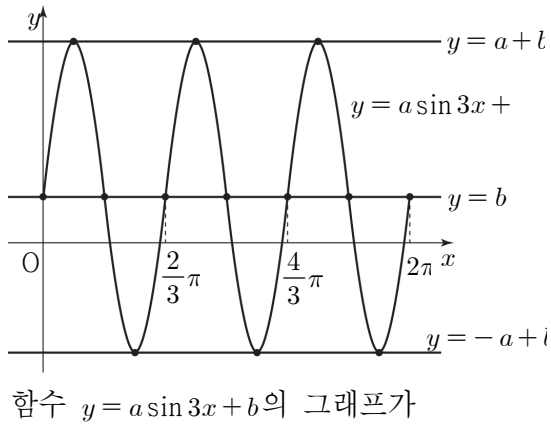
따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$
(ⅲ) $k=4l+2$(l은 자연수)인 경우
$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l+1}\pi$
$m=1$일 때,
$f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l+1}\pi=\sin 0=0$
$m=2l+2$일 때,
$f(2l+2)=\sin\dfrac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$
$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l+1)$일 때,
$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\dfrac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$
이므로 $\beta=2l+3-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는
$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고
그 개수는 l이다.
같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중
음수의 개수도 l이다.
따라서 집합 A_k의 원소의 개수는
$l+l+1=2l+1$
(ⅳ) $k=4l+3$(l은 자연수)인 경우
(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의
원소의 개수는 $4l+3$이다.
$A_1=A_2=\{0\}$이고 (ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여
집합 A_k의 원소의 개수는
$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\ (l\text{은 자연수})$$
$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는
자연수 l은 존재하지 않는다.
$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는
자연수 l은 6이므로 $k=22$
$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는
자연수 l은 3이므로 $k=11$
$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는
자연수 l은 5이므로 $k=20$
따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는
모든 k의 값의 합은 $22+11+20=53$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

94.

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기가 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로
$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=a\sin 3x+b$의
그래프의 개형은 그림과 같다.

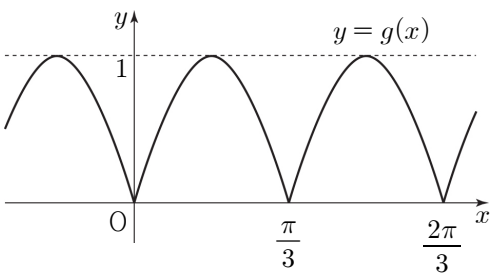


함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가
직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는
$k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

꿈을 현실로! 희망 부산교육

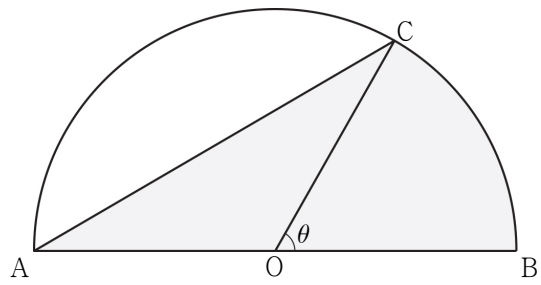
$k=b$일 때, 7
이므로 $b=2$이고, $-a+2=9$ 또는 $a+2=9$
a가 양수이므로 $a=7$
따라서 $a\times b=7\times 2=14$

95.
함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$
함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 서로 같으므로
$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$
a는 양수이므로 $a=6$

96.
반원의 중심을 O라 하고 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ라 하자.



반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π이므로
$2\pi=6\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$
부채꼴 OBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$
$\angle COA=\frac{2\pi}{3}$이므로
삼각형 CAO의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=9\sqrt{3}$
따라서 구하는 넓이는 $6\pi+9\sqrt{3}$

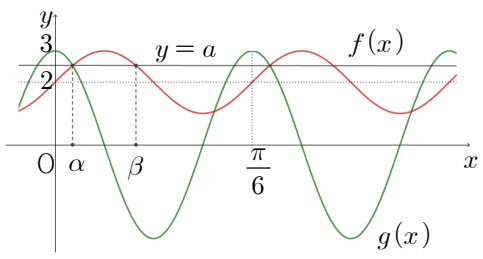
97.
이차방정식이 실근을 가지려면 $D\geq 0$이므로
$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)$
$=\sin^2\theta-(-3\sin^2\theta-5\sin\theta+2)$
$=-2\sin^2\theta+5\sin\theta-2\geq 0$
$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\leq 0$에서
$\frac{1}{2}\leq\sin\theta\leq 2$으므로 $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{6}$이다.';
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5\pi}{6}$이고, $4\beta-2\alpha=3\pi$

98.
α, β, γ가 삼각형 ABC의 세 내각의 크기이므로
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ … ㉠
α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\alpha+\gamma=2\beta$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $3\beta=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{3}$
$\beta=\frac{\pi}{3}$이므로 $\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{3}$에서
$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\frac{1}{2}$ … ㉢
$\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$
$\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$ … ㉣
㉢, ㉣에서 $\sin\alpha\sin\gamma=\frac{5}{8}$ … ㉤
따라서 $\tan\alpha\tan\gamma=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=5$

99.
$\angle DCG=\theta$ $(0<\theta<\pi)$, $\angle BCE=\pi-\theta$
$\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{25}{36}$
코사인법칙에 의하여
$\overline{DG}^2=3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\cos\theta=25-24\cos\theta$
$\overline{BE}^2=3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\cos(\pi-\theta)$
$=25-24\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$
따라서 $\overline{DG}\times\overline{BE}=\sqrt{25^2-24^2\times\cos^2\theta}=\sqrt{25^2-24^2\times\frac{25}{36}}$
$=5\sqrt{25-16}=15$

100.
$0\leq x<2^{n+1}$일 때, $0\leq\frac{\pi}{2^n}x<2\pi$이므로
부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\leq-\frac{1}{2}$의 해는
$\frac{2}{3}\pi\leq\frac{\pi}{2^n}x\leq\frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3}\leq x\leq\frac{2^{n+2}}{3}$
a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3}\leq x\leq\frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든
자연수 x의 개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로
$\sum_{n=1}^{7}a_n$은 $\frac{2^2}{3}\leq x\leq\frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.
$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots$, $\frac{2^9}{3}=170.666\cdots$
따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=170-1=169$

101.
$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$, $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{6}$
주어진 조건을 만족하기 위해서는
$f(\alpha)=g(\alpha)=a$이고 $f(\beta)=a$라면
$g(\beta)=a$이어야 한다.
(i) $\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi}{6}$ 즉 $k=12$인 경우

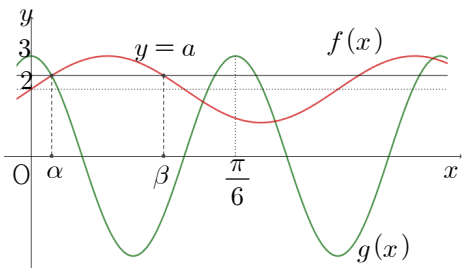


꿈을 현실로!
희망 부산교육

그림과 같은 $f(\alpha)=g(\alpha)=a$이고 $f(\beta)=a$이지만 $g(\beta)\neq a$인 β가 존재하므로 $k\neq 12$

$k>12$라면 $f(x)$의 주기가 작아지므로 위 그림과 같은 β가 존재하므로 $k<12$

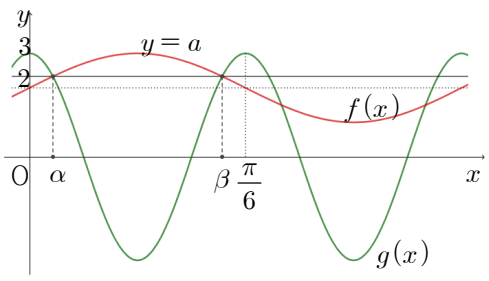
(ii) $6<k<12$인 경우



그림과 같은 $f(\alpha)=g(\alpha)=a$이고 $f(\beta)=a$이지만 $g(\beta)\neq a$인 β가 존재하므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

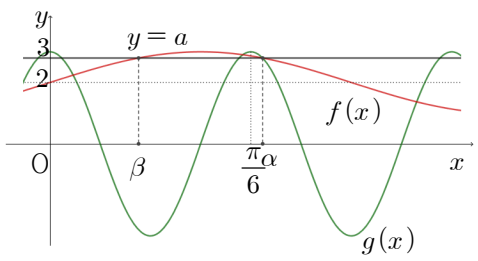
(iii) $k=6$인 경우

$f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로 그래프가 다음과 같다.



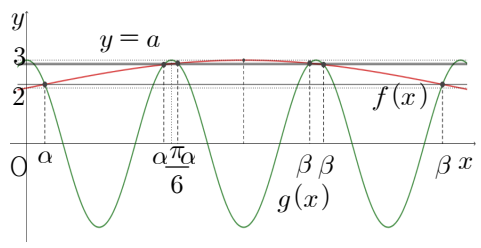
따라서 $k=6$은 주어진 조건을 만족하는 자연수이다.

(iv) $k=4$ 또는 $k=5$인 경우



그림과 같은 $f(\alpha)=g(\alpha)=a$이고 $f(\beta)=a$이지만 $g(\beta)\neq a$인 β가 존재하므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(v) $k=1,2,3$인 경우



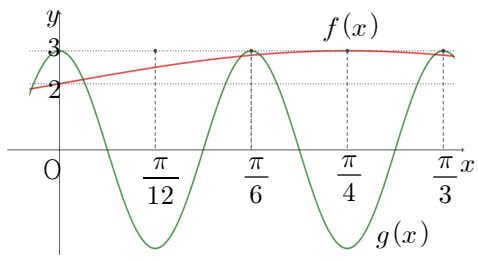
그림과 같은 $f(\alpha)=g(\alpha)=a$이고 $f(\beta)=a$라면 $g(\beta)=a$이므로 주어진 조건을 만족한다. 그러므로 $k=1,2,3$은 주어진 조건을 만족하는 자연수이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 $k=1,2,3,6$이므로 총 4개

[다른 풀이]

(i)~(iv)와 사인 함수와 코사인 함수의 대칭과 주기성을 고려해 보았을 때,

$\frac{1}{4}\times(f(x)\text{의 주기})=\frac{1}{2}\times(g(x)\text{의 주기})\times n$ (단, n은 자연수)이다.

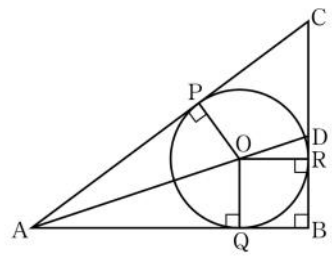


그러므로 $\frac{\pi}{2k}=\frac{\pi}{12}\times n$, 즉 $6=kn$

따라서 k는 6의 약수이므로

주어진 조건을 만족하는 자연수 개수는 4개

102.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$이므로 $\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=1$

$\overline{DO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1 : 3이므로

$\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$, $12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$

$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$이므로 $\overline{CR}=6$, 즉 $\overline{CD}=5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$\angle DAB=\angle DOR$, 즉 $\angle CAD=\angle DOR$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$

$R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{125}{2}\pi$이다.

103.

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r이므로 사인법칙에 의하여

$\overline{CD}=2r\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\overline{BC}=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}r)^2$

$=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$

이 식을 정리하면 $5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$

그러므로 $r=\frac{-\sqrt{6}\pm 6}{5}$

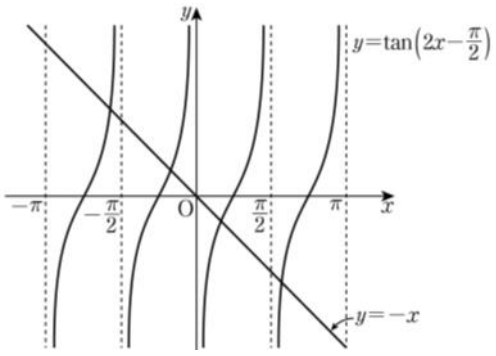
따라서 $r>0$이므로 $r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

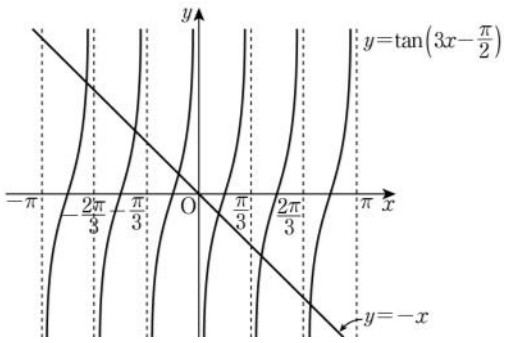
104.

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$일 때의 그래프이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육





그러므로 직선 $y=-x$ 와

$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_2=4$,

$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=4+6=10$

105.

$4\sin^2x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$

$4\sin^2x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$-1\le\sin x\le1$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ 2\pi+\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{5}{6}\pi,$

따라서 모든 해의 합은 6π

106.

$\overline{AB}=3a$, $\overline{AC}=a$라 하면

$\overline{BC}^2=9a^2+a^2-2\cdot3a\cdot a\cos\frac{\pi}{3}$

$=7a^2$

$\therefore\overline{BC}=\sqrt{7}a$

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{7}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{7}a}{\sqrt{3}}=2\times7$

$a=\sqrt{21}=\overline{AC}$

따라서 $k^2=21$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 03 수열

해 설

1. ①
[출제의도] 등비수열을 이용하여 항을 구한다.
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_7 = 4a_6 - 16$에서
$a_5 \times r^2 = 4a_5 \times r - 16$이므로 $4r^2 = 4 \times 4r - 16$, $r^2 - 4r + 4 = 0$,
$(r-2)^2 = 0$
따라서 $r = 2$
$a_8 = a_5 \times r^3 = 4 \times 2^3 = 32$

2. [정답] ④

[출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r > 0$

$\frac{a_5}{a_3} = \frac{3r^4}{3r^2} = r^2 = 4$, $r = 2$

따라서 $a_4 = 3r^3 = 24$

3.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $r = \frac{a_3}{a_2} = 2$이므로 $a_5 = a_3 \times r^2 = 4$

4.
첫 항을 a, 공비를 r이라 할 때,

$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = 30$, $a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5 = \frac{15}{2}$

$\frac{ar^3 + ar^5}{ar + ar^3} = \frac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = r^2 = \frac{\frac{15}{2}}{30} = \frac{1}{4}$

공비가 양수이므로 $r = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{8}a = \frac{5}{8}a = 30$, $a = 48$

5.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_n = a + (n-1)d$
그러므로 $a_4 = a_1 + (4-1) \times 3 = a_1 + 9$
즉, $a_1 + 9 = 100$
따라서 $a_1 = 91$

6.
$a_5 - a_2 = 3 \times 2 = 6$

7.
$a_2 = 2 \times 5 = 10$

8.
공비를 $r\,(r > 0)$라 하면 $a_n = r^{n-1}$이므로
$a_3 = a_2 + 6$에서 $r^2 = r + 6$
$r = 3$이므로 $a_4 = 3^3 = 27$

9.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_1 + a_3 = 20$에서
$a_1 + (a_1 + 2d) = 20$, $2(a_1 + d) = 20$
$a_1 + d = 10$이다.
따라서 $a_2 = a_1 + d = 10$

10.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2 = ar = 3$, $a_3 = ar^2 = 6$이므로 $r = 2$

따라서 $\frac{a_2}{a_1} = r = 2$

11.

$\frac{a_3}{a_2} = 2$이므로 공비는 2이다.

$a_5 = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$

12. 정답 ⑤
$a_n = ar^{n-1}$이라 할 때, $a_3 = ar^2$, $a_8 = ar^7$, $a_6 = ar^5$, $a_7 = ar$
$\frac{ar^2 \times ar^7}{ar^5} = ar^4 = 12$, $ar^4 + ar^6 = ar^4(1+r^2) = 12(1+r^2) = 36$
$r^2 = 2$, $ar^4 = 4a = 12$, $a = 3$
$a_{11} = ar^{10} = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$

13. 427
[출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.
$x^2 - 5nx + 4n^2 = (x-n)(x-4n) = 0$에서 $x = n$ 또는 $x = 4n$
$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n) = \sum_{n=1}^{7}(1-n)(1-4n) = \sum_{n=1}^{7}(1-5n+4n^2)$
$= 7 - 5 \times \frac{7 \times 8}{2} + 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = 427$

14. 정답 ②
[해설]
수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}3$
$= 2\sum_{k=1}^{10}a_k + 10 \times 3 = 60$
이므로 $2\sum_{k=1}^{10}a_k = 30$
$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k = 15$

15. [정답] ④
[해설]
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.
$a_n = ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)
$a_3^2 = a_6$이므로 $(ar^2)^2 = ar^5$, $ar^4(a-r) = 0$
$a = r$, $a_n = r^n$
$a_2 - a_1 = 2$이므로 $r^2 - r = 2$
$(r-2)(r+1) = 0$
$r = 2$ 또는 $r = -1$
모든 항이 양수이므로 $r = 2$따라서 $a_5 = r^5 = 32$

16. [정답] 65
[해설]
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}3 = 40$, $\sum_{k=1}^{10}a_k = 5$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=-10$

$\sum_{k=1}^{10}b_k=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)=\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}5=65$

17. **정답** 24

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=20-\sum_{k=1}^{10}b_k=34,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=-14$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=10-(-14)=24$

18. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 항을 구한다.

$a_2=b_2$에서 $a_1+3=b_1\times2$

즉 $a_1-2b_1=-3$ …… ㉠

$a_4=b_4$에서 $a_1+3\times3=b_1\times2^3$

즉 $a_1-8b_1=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-1,\ b_1=1$

따라서 $a_1+b_1=0$

19. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

$S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=0$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_5=a_6-d,\ a_7=a_6+d$에서

$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)=3a_6=0$, 즉 $a_6=0$

$S_6=30$이므로

$S_6=\frac{6(a_1+a_6)}{2}=3a_1=30$

$a_1=10$

$a_6=10+5d=0$이므로 $d=-2$

따라서 $a_2=a_1+d=10-2=8$

20. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=30$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=70,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=40$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=110$

21. **정답** ④

$a_n=ar^{n-1}$이라 할 때, $S_4-S_2=a_4+a_3=3a_4,\ 2a_4=a_3$

$2ar^3=ar^2,\ 2r=1,\ r=\frac{1}{2},\ a_5=ar^4=\frac{a}{16}=\frac{3}{4},\ a=12$

$a_1+a_2=a+ar=a(1+r)=12\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=18$

22. **정답** 9

$\sum_{k=1}^{10}a_k=x,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=y$라 할 때, $x=2y-10,\ 3x+y=33$

$6y-30+y=33,\ y=9,\ x=8,\ \therefore\ \sum_{k=1}^{10}b_k=y=9$

23.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=6$에서

$a_1+3d=6$ …… ㉠

$2a_7=a_{19}$에서

$2(a_1+6d)=a_1+18d,\ a_1-6d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=4$

24.

$\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=\frac{2^5-1}{2-1}=31$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{k-1})=\frac{2\times(3^5-1)}{3-1}=242$

이므로 주어진 부등식에서 $31<n^2<242$이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7, 8, …, 15이고

그 합은 $\frac{10\times(6+15)}{2}=105$이다.

25.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}+b_{2n}=0$이고

$a_{2n+1}+b_{2n+1}=3(a_{2n-1}+b_{2n-1})$이다.

$\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}b_n=\sum_{n=1}^{8}(a_n+b_n)$

$=\sum_{n=1}^{4}(a_{2n-1}+b_{2n-1})$

$=\frac{(a_1+b_1)(3^4-1)}{3-1}$

$=80a_1=160$

에서 $a_1=2$

따라서 $a_3+b_3=3(a_1+b_1)=12$

26.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2=1$이므로 $a\neq0$이고 $r\neq0$

$a_5=2(a_3)^2$에서 $ar^4=2a^2r^4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{2}r=1$에서 $r=2$

따라서 $a_6=\frac{1}{2}\times2^5=16$

27.

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2$

$=\frac{1}{4}r+\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{2}$

$r^2+r-6=0,\ (r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서

$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6=\frac{1}{4}\times2^5+\frac{1}{4}\times2^6=24$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

28.

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=4\sum_{k=1}^{10}k+10a$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+10a$

$=220+10a$

즉, $220+10a=250$이므로

$10a=30$

따라서

$a=3$

29.

$a_1=\frac{1}{2}$이므로

$a_2=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$a_3=-2\times0+1=1$

$a_4=-2\times1+1=-1$

$a_5=-1+1=0$

$\vdots$

이때, $a_{n+3}=a_n\ (n\geq2)$이므로

$a_{10}=a_7=a_4=-1$

$a_{20}=a_{17}=a_{14}=\cdots=a_2=0$

따라서 $a_{10}+a_{20}=-1+0=-1$

30.

$a_1=a$, 공차를 d라 할 때, $a_1=2a_5$이므로 $a=2(a+4d)$, $a+8d=0$

$a_8+a_{12}=a+7d+a+11d=2a+18d=-6$, $a+9d=-3$

$\begin{cases}a+9d=-3\\a+8d=0\end{cases}$, $d=-3$, $a=24$, $\therefore\ a_2=a+d=24-3=21$

31.

$\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=\left(1-\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{10\times11}$

$=\frac{10}{11}-\frac{1}{10\times11}=\frac{99}{110}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\frac{9}{10}$

32.

$c\times10=65+5c$, $c=13$

33.

$a\times ar^2=a^2r^2=4$, $ar^2\times ar^4=a^2r^6=64$

$\frac{a^2r^6}{a^2r^2}=\frac{64}{4}=16=r^4$, 양수인 $r=2$, $a^2r^2=4a^2=4$, $a=1$

$a_6=ar^5=1\times32=32$

34.

$20,\ 18,\ 16,\ \cdots,\ a_{10}=2,\ 0,\ -2,\ 0,\ -2,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -2$

$\frac{10\times(2+20)}{2}-2\times10=90$

35.

$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{6}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}=\sum_{k=1}^{6}4k$

$=4\times\frac{6\times7}{2}=84$

36.

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$=\frac{-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}-\ \cdots\ -\sqrt{a_{15}}+\sqrt{a_{16}}}{a_{k+1}-a_k}$

$=\frac{-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{16}}}{a}=2$

공차와 첫 항을 a라 할 때, $a_1=a$, $a_{16}=16a$

$-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{16}}=-\sqrt{a}+4\sqrt{a}=3\sqrt{a}=2a$, $4a^2=9a$

$\therefore\ a=\frac{9}{4}$, $\therefore\ a_4=4a=9$

37.

$\sum_{k=1}^{5}a_k=x$, $\sum_{k=1}^{5}b_k=y$이라 할 때, $3x+25=55$, $x+y=32$

$\begin{cases}x=10\\x+y=32\end{cases}$이므로 $y=\sum_{k=1}^{5}b_k=22$

38.

자연수 k에 대하여

$n=2k-1$일 때, $a_n=a_{2k-1}=\frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2}=2k^2$

$n=2k$일 때, $a_n=a_{2k}=\frac{(2k)^2}{2}+2k+1=2k^2+2k+1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{5}2k^2+\sum_{k=1}^{5}(2k^2+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(2k^2+2k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+2k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+1\times5$

$=255$

39.

$S_{n+1}=a_{n+1}+S_n$이므로 $a_{n+1}S_n=a_n(a_{n+1}+S_n)$,

$(S_n-a_n)a_{n+1}=a_nS_n$

즉, $S_{n-1}a_{n+1}=a_nS_n\ (n\geq2)$ …… ㉠

$a_1=S_1=2$, $a_2=4$이므로 $S_2=a_1+a_2=6$

㉠에서 $a_{n+1}=\frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ …… ㉡

㉡에 $n=2$, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3=\frac{a_2S_2}{S_1}=\frac{4\times6}{2}=12$에서 $S_3=S_2+a_3=6+12=18$

$a_4=\frac{a_3S_3}{S_2}=\frac{12\times18}{6}=36$에서 $S_4=S_3+a_4=18+36=54$

$a_5=\frac{a_4S_4}{S_3}=\frac{36\times54}{18}=108$

따라서 $S_5=S_4+a_5=162$

40.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하자.

$a_3+a_5=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$에서

$a_3+a_5=\frac{a_3+a_5}{a_3a_5}$, $a_3a_5=1$이므로

$\frac{1}{4}r^2\times\frac{1}{4}r^4=1$, $r^6=16$, $r^3=4$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $a_{10}=\frac{1}{4}r^9=\frac{1}{4}(r^3)^3=16$

41.

$S_3-S_2=a_3$이므로

$a_6=2a_3$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2+5d=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$에서

$d=2$

따라서 $a_{10}=2+9\times2=20$이므로

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}$$
$$=\frac{10\times(2+20)}{2}$$
$$=110$$

42.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, $a_1=a$라 하면 $a_2=36$에서

$ar=36$ ····· ㉠

또, $a_7=\frac{1}{3}a_5$에서

$ar^6=\frac{1}{3}ar^4$

$r^2=\frac{1}{3}$ ····· ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$$a_6=ar^5$$
$$=ar\times r^4$$
$$=36\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=4$$

43.

$a_1=10$이므로

$a_2=5-\frac{10}{10}=4$

$a_3=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$a_4=-2\times\frac{5}{2}+3=-2$

$a_5=5-\frac{10}{-2}=5+5=10$

⋮

$a_9=a_5=a_1=10$, $a_{12}=a_8=a_4=-2$

따라서 $a_9+a_{12}=8$

44.

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$

$2a=S_2+S_3$이므로

$2a=(a+ar)+(a+ar+ar^2)$

$ar(2+r)=0$

$r^2=64a^2\,(a>0)$에 의하여

$r\neq0$이므로 $r=-2$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_5=\frac{1}{4}\times(-2)^4=4$

45.

$a_n=ar^{n-1}$이라 할 때, $a=2$, $a_2=2r$, $a_4=2r^3$

$a_2a_4=2r\times2r^3=4r^4=36$에서 $r^4=9$

$\therefore\ \frac{a^7}{a^3}=\frac{2r^6}{2r^2}=r^4=9$

46.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ \cdots\ -\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

$n=12$일 때, $-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{13}=-3$

47.

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)-\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}3b_k=45-3=42$$

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=14,\ \sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}b_k-10\times\frac{1}{2}=14-5=9$$

48. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_1=1^2-5\times1=-4$, $S_2=2^2-5\times2=-6$

그러므로 $a_2=S_2-S_1=-6-(-4)=-2$

따라서 $a_1+d=a_2=-2$

49. 조건 (가)에서 $a_3=a_1-3$, $a_4=a_2+3$,

$a_5=a_3-3=a_1-6$, $a_6=a_4+3=a_2+6$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6)$$
$$=3(a_1+a_2)$$

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{32}a_k=5\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2=16(a_1+a_2)$

따라서 $16(a_1+a_2)=112$이므로 $a_1+a_2=7$

50. 수열의 공차를 d라 할 때,

$a_2=a_1+d=6$,

$a_4=a_1+3d$, $a_6=a_1+5d$, $a_4+a_6=2a_1+8d=36$

$\begin{cases}a_1+d=6\\a_1+4d=18\end{cases}$을 연립하면, $d=4$, $a_1=2$

$\therefore\ a_{10}=a_1+9d=2+36=38$

51. $a_2=2a_1=2$, $a_3=2a_2=4$, $a_4=2a_3=8$

$a_5=a_4-7=1$, $a_6=2a_5=2$, $a_7=2a_6=4$, $a_8=2a_7=8$

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=1+2+4+8+1+2+4+8=30$$

52. $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$의 양변에 2를 곱하면 $\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=112$

$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{8}a_k-a_8$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{10}2a_k-\left(\sum_{k=1}^{8}a_k-a_8\right)=112$$

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k+a_8=112$, $100+a_8=112$이므로 $a_8=12$

53.

수열의 귀납적 정의에 따라 각 항을 구하면

$a_1=7$, $a_2=\frac{7+3}{2}=5$, $a_3=\frac{5+3}{2}=4$,

$a_4=4+3=7$, $a_5=\frac{7+3}{2}=5$, $a_6=\frac{5+3}{2}=4$,

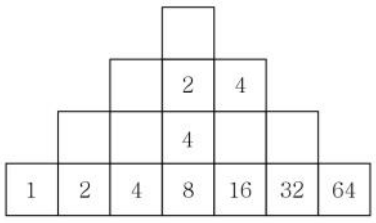
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$a_7 = 4+6 = 10$, $a_8 = 10+7 = 17$

54.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.
조건 (가)에서 $ar^2 \times ar^4 \times ar^6 = 125$
$(ar^4)^3 = 5^3$, 즉 $ar^4 = 5$
조건 (나)에서 $\frac{ar^3+ar^7}{ar^5} = \frac{13}{6}$, $\frac{1}{r^2}+r^2 = \frac{13}{6}$
$r^2 = X$로 치환하면 $X+\frac{1}{X} = \frac{13}{6}$에서
$6X^2-13X+6 = 0$, $(2X-3)(3X-2) = 0$
$X = \frac{3}{2}$ 또는 $X = \frac{2}{3}$에서 $r^2 = \frac{3}{2}$ 또는 $r^2 = \frac{2}{3}$
공비가 1보다 커야 하므로 $r^2 = \frac{3}{2}$
따라서 $a_9 = ar^8 = ar^4 \times r^4 = 5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

55.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2 = a+d$, $a_3 = a+2d$
이를 주어진 등식에 대입하면
$(a+d)+(a+2d) = 2(a+12)$, $3d = 24$
따라서 $d = 8$

56.
문제에서 제시된 세 번째 줄의 4와 인접한 아래쪽 칸의 수는 주어진 규칙에 의해 4의 2배인 8이다.
규칙으로부터 네 번째 줄의 8과 인접한 왼쪽 칸의 수는 그 수를 2배하여 8이 되어야 하므로 4이다.
이와 같은 방식으로 네 번째 줄에 있는 수를 모두
구하여 왼쪽부터 차례대로 나열하면 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.



그러므로 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이다.
따라서 구하는 값은 $\frac{1\times(2^7-1)}{2-1} = 127$

57.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_n = 3+(n-1)d$, $b_n = 3r^{n-1}$
$b_3 = -a_2$를 $a_2+b_2 = a_3+b_3$에 대입하면
$a_2+b_2 = a_3-a_2 = d$
그러므로 $3+d+3r = d$, $3r = -3$에서 $r = -1$ …… ㉠
$b_3 = -a_2$에서 $3r^2 = -(3+d)$ …… ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면 $3\times(-1)^2 = -3-d$에서 $d = -6$
따라서 $a_3 = 3+2\times(-6) = -9$

58.
$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5\times6\times11}{6} = 55$

59.
$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2 = \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 + 4\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}4$
$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2 = 67$, $\sum_{k=1}^{10}a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{10}4 = 40$
이므로 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 = 11$

60.
$\sum_{n=1}^{20}(-1)^n n^2 = -1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-19^2+20^2$
$= \sum_{n=1}^{10}(2n)^2 - \sum_{n=1}^{10}(2n-1)^2$
$= \sum_{n=1}^{10}(4n-1) = 4\times\frac{10\times11}{2} - 10 = 210$

61.
$a_1 = 6$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3+a_6 = (6+2d)+(6+5d) = 12+7d$, $a_{11} = 6+10d$
$a_3+a_6 = a_{11}$이므로 $12+7d = 6+10d$에서 $d = 2$
따라서 $a_4 = 6+3\times2 = 12$

62.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$2a_4 = a_{10}$이므로
$2(6+3d) = 6+9d$
$d = 2$
$a_9 = 6+8\times2 = 22$

63.
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k - \sum_{k=1}^{10}b_k = 2\times10-3 = 17$

64.
$a_{n+2} = a_{n+1}-a_n$에서
$a_3 = -6$, $a_4 = -9$, $a_5 = -3$, $a_6 = 6$, $a_7 = 9, a_8 = 3$, … 이 므 로
$a_n = a_{n+6}$이 성립한다.
$a_k = 3$을 만족하는 $k = 6n-4$이므로
$1 \le 6n-4 \le 100$에서 $\frac{5}{6} \le n \le \frac{52}{3}$,
$a_k = -3$을 만족하는 $k = 6m-2$이므로
$1 \le 6m-1 \le 100$에서 $\frac{1}{3} \le m \le \frac{101}{6}$이다.
따라서 n, m의 개수는 각각 17, 16이므로
자연수 k의 개수는 33이다.

65.
$a_1 = 1$이고 등비수열의 합 $S_n = \frac{(r^n-1)}{r-1}$이므로 $S_3 = \frac{r^3-1}{r-1}$이고
$S_6 = \frac{r^6-1}{r-1} = \frac{(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = S_3(r^3+1)$
이다. 따라서 $\frac{S_6}{S_3} = r^3+1$이고 $a_4 = r^3$이므로 $r^3+1 = 2r^3-7$에서
$r^3 = 8$이므로 $r = 2$이다.
따라서 $a^7 = r^7 = 2^7 = 128$

66.
$\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{12}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$= \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = \frac{4}{27}$$

67.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2^1 = 2$

$a_3 = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

$a_4 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$a_5 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$

$\vdots$

$a_{12} = a_8 = a_4 = \sqrt{2}$, $a_{13} = a_9 = a_5 = a_1 = 1$

따라서 $a_{12} \times a_{13} = \sqrt{2}$

68.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5 = a_2 \times r^3$이므로 $r^3 = 8$에서 $r = 2$

따라서 $a_6 = a_5 \times 2 = 96$

69.

$a_2 + a_1 = 1$에서 $a_2 = -11$

$a_3 + a_2 = -2$에서 $a_3 = 9$

$a_4 + a_3 = 3$에서 $a_4 = -6$

$a_5 + a_4 = -4$에서 $a_5 = 2$

$a_6 + a_5 = 5$에서 $a_6 = 3$

$a_7 + a_6 = -6$에서 $a_7 = -9$

$a_8 + a_7 = 7$에서 $a_8 = 16$

이므로 $a_k > a_1 = 12$인 자연수 k의

최솟값은 8

70.

$a_3 a_7$

$= (a_1 + (3-1)\cdot(-3)) \times (a_1 + (7-1)\cdot(-3)) = (a_1 - 6)(a_1 - 18) = 64$

정리하면 $a_1^2 - 24a_1 + 108 = 64$

$(a_1 - 2)(a_1 - 22) = 0$이고 $a_8 > 0$이므로

$a_1 = 22$이다.

$\therefore a_2 = a_1 + (-3) = 19$

71.

$(n^2+6n+5)x^2 - (n+5)x - 1 = 0$의 두 근을 각각 α, β라 하면

$a_n = \alpha + \beta = \frac{n+5}{(n+1)(n+5)} = \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{10} (k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$$
$$= \frac{10(1+11)}{2} + 10 = 65$$

72.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_2 + 2d$, $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + 6d$

즉, $6d = (a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3) = 39 - 15 = 24$

따라서 $d = 4$

73.

$\frac{5 \times (3 + a_5)}{2} = 55$에서 $a_5 = 19$이고 $d = 4$

$a_n = 4n - 1$

$$\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3) = \sum_{k=1}^{5} (4k^2 - 4k)$$
$$= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 11}{6} - 2 \times 5 \times 6 = 220 - 60 = 160$$

74.

$$\sum_{k=1}^{5} (2a_k - b_k + 4) = 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k + \sum_{k=1}^{5} 4 = 16 - 9 + 20 = 27$$

75.

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{10} - a_{11}$$
$$= a_1 - a_{11} = -10^2 + 10 = -90$$

따라서 $a_{11} = 91$

76. ②

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{9} a_k \frac{9(2a+8d)}{2} = 27$$

$a + 4d = 3$ 즉, $a_5 = 3$ … ㉠

$a_5 > 0$이고 $d > 0$이므로 $a_6 > 0$

(ⅰ) $a_4 \geq 0$인 경우

$|a_4| + |a_6| = (a+3d) + (a+5d) = 2a + 8d = 8$

$a + 4d = 4$이므로 ㉠에 모순이다.

(ⅱ) $a_4 < 0$인 경우

$|a_4| + |a_6| = -(a+3d) + a + 5d = 2d = 8$, $d = 4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d = 4$이므로

$a_{10} = a_5 + 5d = 3 + 5 \times 4 = 23$

77. ③

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

$a_5 + a_4$가 홀수이면 a_6이 홀수이므로 $a_6 = 34$에 모순이다. 따라서 $a_5 + a_4$는 짝수이고 a_4, a_5는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

a_4, a_5가 모두 짝수이면 a_3도 짝수이고 마찬가지로 a_2, a_1도 모두 짝수이다. 이는 $a_1 = 1$에 모순이므로 a_4, a_5는 모두 홀수이다.

따라서 a_1, a_4는 모두 홀수이므로 가능한 a_2, a_3의 값은 다음과 같다.

(ⅰ) a_2, a_3이 모두 홀수인 경우

$a_2 = 2l - 1$ (l양 은 자연수)라 하자.

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = l$

$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) = \frac{3}{2}l - \frac{1}{2}$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = \frac{5}{4}l - \frac{1}{4}$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{11}{8}l - \frac{3}{8} = 34$이므로 $l = 25$이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 25 - 1 = 49$

(ⅱ) a_2는 짝수, a_3은 홀수인 경우

$a_2 = 2m$ (m은 자연수)라 하자.

$a_3 a_2 + a_1 = 2m + 1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$a_4 = a_3 + a_2 = 4m + 1$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = 3m + 1$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}m + 1 = 34$이므로 m은 자연수가 아니다.

(iii) a_2는 홀수, a_3은 짝수인 경우

$a_2 = 2n - 1$ (n은 자연수)라 하자.

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = n$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3n - 1$

$a_5 = a_4 + a_3 = 4n - 1$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}n - 1 = 34$이므로 $n = 10$이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 10 - 1 = 19$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a_2의 값의 합은 $49 + 19 = 68$

78. [정답] ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 자연수 n에 대하여

$a_n < 1$이면 $a_{n+1} = 2^{n-2} > 0$이고

$a_n \geq 1$이면 $a_{n+1} = \log_2 a_n \geq 0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이다.

조건 (가), (나)에서

a_5, a_6의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_5 < 1$일 때

$a_6 = 2^{5-2}$에서 $a_5 + a_6 \geq 8$이므로

$a_5 + a_6 = 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5 \geq 1$일 때

$a_6 = \log_2 a_5 \geq 0$에서 $a_5 + a_6 \geq 1$

$a_5 + a_6 = 1$을 만족시키려면 $a_5 = 1$, $a_6 = 0$

그러므로 $a_5 = 1$, $a_6 = 0$

a_4의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_4 < 1$일 때

$a_5 = 2^{4-2} = 4$이므로 $a_5 = 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 \geq 1$일 때

$a_5 = \log_2 a_4 = 1$이므로 $a_4 = 2$

그러므로 $a_4 = 2$

a_1, a_2, a_3의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_3 < 1$일 때

$a_4 = 2^{3-2} = 2$이므로 $0 \leq a_3 < 1$

(a) $0 \leq a_2 < 1$일 때

$a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로 $0 \leq a_3 < 1$을 만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \geq 1$일 때

$a_3 = \log_2 a_2$에서 $1 \leq a_2 < 2$

$a_1 < 1$이면 $a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$이므로 $1 \leq a_2 < 2$를 만족시키지 않는다.

$a_1 \geq 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서 $2 \leq a_1 < 4$

(ii) $a_3 \geq 1$일 때

$a_4 = \log_2 a_3$에서 $a_3 = 2^2 = 4$

(a) $0 \leq a_2 < 1$일 때

$a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로 $a_3 = 4$를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \geq 1$일 때

$a_3 = \log_2 a_2$에서 $a_2 = 2^4 = 16$

$a_1 < 1$이면 $a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$이므로 $a_2 = 16$을 만족시키지 않는다.

$a_1 \geq 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서 $a_1 = 2^{16}$

따라서 a_1의 값은 $2 \leq a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$이므로

$M = 2^{16}$, $m = 2$이고 $\log_2 \frac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$

79. [정답] 30

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 추론하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8 = S_8 - S_7 = 0$이므로

$a_8 = a_1 + 7d = 0$에서 $a_1 = -7d$

S_n의 값은 $n = 8$에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$a_9 = a_8 + d = d \geq 0$

$d = 0$이면 $a_1 = 0$에서 모든 자연수 n에 대하여

$S_n = 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$

$n \geq 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이므로

$m > 8$일 때 $S_{2m} > S_m$

조건 (나)에 의하여 $-S_m = S_{2m} = 162$

$$-\frac{m\{2a_1 + (m-1)d\}}{2} = \frac{2m\{2a_1 + (2m-1)d\}}{2}$$

$14d - (m-1)d = -28d + 2(2m-1)d$

$-m + 15 = 4m - 30$에서 $m = 9$

$S_9 = \frac{9(-14d + 8d)}{2} = -162$에서

$d = 6$, $a_1 = -42$

따라서 $a_{13} = a_1 + 12d = -42 + 12 \times 6 = 30$

80. [정답] ①

[해설]

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$에 대하여

(i) $n = 1$일 때,

$\frac{1}{a_1} = 1^2 + 2 \times 1 = 3$

(ii) $n \geq 2$일 때,

$$\frac{1}{(2n-1)a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k}$$

$= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1$ …… ㉠

이때 $\frac{1}{a_1} = 3$은 ㉠에 $n = 1$을 대입한 것과 같으므로

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n + 1$ $\quad \therefore \ a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\therefore \ \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$= \frac{10}{21}$

81. 정답 ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_2=-4$이므로

$a_1+d=-4\,(d\neq 0)$ …… ㉠

또한 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\geq 1)$이라 하면 두 집합 A, B를

$A=\{a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ a_1+4d\}$

$B=\{2a_1+d,\ 2a_1+3d,\ 2a_1+5d,\ 2a_1+7d,\ 2a_1+9d\}$

로 놓을 수 있고 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $2a_1+d$, 공차가 $2d$인 등차수열이다. 이때 $n(A\cap B)=3$이 되려면 다음과 같이 세 경우를 생각해 볼 수 있다.

(i) $a_1=b_1$일 때

즉, $a_1=2a_1+d$에서 $a_1=-d$이므로 조건 ㉠에 위배된다.

(ii) $a_1=b_2$일 때

즉, $a_1=2a_1+3d$에서 $a_1=-3d$

㉠과 연립하면 $a_1=-6$, $d=2$

$\therefore\ a_{20}=-6+19\times 2=32$

(iii) $a_1=b_3$일 때

즉, $a_1=2a_1+5d$에서 $a_1=-5d$

㉠과 연립하면 $a_1=-5$, $d=1$

$\therefore\ a_{20}=-5+19\times 1=14$

이상에서 조건을 만족하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

82. 정답 ②

[해설]

주어진 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 k는 자연수이므로

$a_1=k>0$

$a_2=a_1-2\times 1-k=-2<0$

$a_3=a_2+2\times 2-k=2-k$

(i) $k=1$일 때,

$a_3=1$이므로

$a_4=a_3-2\times 3-1=-6<0$

$a_5=a_4+2\times 4-1=1>0$

$a_6=a_5+2\times 5-1=-10>0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$일 때,

$a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k\geq 3$일 때,

$a_3=2-k<0$이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

(1) $k=3$일 때,

$a_3=-1$, $a_4=2$이므로

$a_5=a_4-8-3=-9<0$

$a_6=a_5+2\times 5-3=-2<0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(2) $k=4$일 때,

$a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $k\geq 5$일 때,

$a_4=8-2k<0$이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

(a) $k=5$일 때,

$a_3=-3$, $a_4=-2$, $a_5=1>0$이므로

$a_6=a_5-10-5=-14$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(b) $k\geq 6$일 때,

$a_5=16-3k<0$이므로

$a_6=a_5+10-k=26-4k$

$a_3<0$, $a_4<0$, $a_5<0$이므로 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족시키기 위해서는

$26-4k>0,\quad k<\frac{13}{2}$

$k\geq 6$이므로 $\quad 6\leq k<\frac{13}{2}$

따라서 자연수 k는 6이다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$3+5+6=14$

83. [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}$

$=(2m+1)(a+5m)<0$

$2m+1>0$이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$이므로

$a_{m+6}=24$, $a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$인 a_{21}이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1}\leq -3$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|\geq 13$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

84. [정답] ④

[해설]

(i) $4\leq n\leq 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5=a_4+6$, $a_6=a_5+6=a_4+12$,

$a_7=a_6+6=a_4+18$이므로

$\sum_{k=4}^{7} a_k=4a_4+36=40$, $a_4=1$

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은 $(27,\ 9,\ 3)$

그러므로 $a_1=27$

(ii) $4\leq n\leq 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재

꿈을 현실로! 희망 부산교육

하는 경우

$a_n = 3^m$ (m은 자연수)인 n ($4 \le n \le 7$)이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m ($m \ge 4$)가 존재하면

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m ($m \ge 4$)가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n=4$, 5, 6, 7에 대하여 $\sum_{k=4}^{7} a_k < 40$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면 $\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 $a_4 = 27$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$

그러므로 $a_4 = 27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1 < 300$을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은

(69, 75, 81), (237, 243, 81)이므로

$a_1 = 69$ 또는 $a_1 = 237$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은 $27 + 69 + 237 = 333$

85. **정답** ①

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $a_1 = 2k-1$이라 할 때, $a_2 = 2k$, $a_3 = k$,

k가 홀수일 때, $a_4 = k+1$,

$a_2 + a_4 = 2k + k + 1 = 40$, $k = 13$, $a_1 = 25$

k가 짝수일 때, $a_4 = \frac{k}{2}$,

$a_2 + a_4 = 2k + \frac{k}{2} = 40$, $k = 16$, $a_1 = 31$

(ⅱ) $a_1 = 2k$이라 할 때, $a_2 = k$

↳ $k = 4m$일 때, $a_3 = 2m$, $a_4 = m$,

$a_2 + a_4 = 4m + m = 40$, $m = 8$, $k = 32$, $a_1 = 64$

↳ $k = 4m-3$일 때, $a_3 = 4m-2$, $a_4 = 2m-1$

$a_2 + a_4 = 4m - 3 + 2m - 1 = 40$, $m = \frac{22}{3}$(모순)

↳ $k = 4m-2$일 때, $a_3 = 2m-1$, $a_4 = 2m$

$a_2 + a_4 = 4m - 2 + 2m = 6m - 2 = 40$, $m = 7$, $a_1 = 2k = 8m - 4 = 52$

↳ $k = 4m-1$일 때, $a_3 = 4m$, $a_4 = 2m$

$a_2 + a_4 = 4m - 1 + 2m = 40$, $m = \frac{41}{6}$(모순)

$\therefore\ 25 + 31 + 64 + 52 = 172$

86. **정답** 19

$S_n = An^2 + Bn$이라 할 때, $a_n = 2An - A + B$

$n = 7$이면, $14A - A + B = 13A + B$가 13의 배수이므로 B는 13의 배수 $B = 13C$

$S_n = An^2 + 13Cn$

$\sum_{k=1}^{7} (An^2 + 13Cn) = \frac{A}{6} \times 7 \times 8 \times 15 + 13C \times \frac{7 \times 8}{2} = 644$

$A \times 56 \times 15 + 3 \times 13C \times 56 = 644 \times 6 = 15A + 39C = 92 \times \frac{6}{8} = 69$

$5A + 13C = 23$, $A = 2$, $C = 1$, $B = 13$

$a_n = 4n + 11$, $a_2 = 19$

87. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

조건 (나)에서 $a_3 > a_5$이므로 a_3이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) a_3이 4의 배수인 경우

$a_3 = 4k$ (k는 자연수)라 하면 $a_4 = 2k+6$

k가 홀수일 때 a_4는 4의 배수이고

$a_5 = k + 11$, $a_4 + a_5 = 3k + 17$이므로

$50 < 3k + 17 < 60$, $a_3 > a_5$에서 $k > \frac{11}{3}$

k는 홀수이므로 $k = 13$이고 $a_3 = 52$

k가 짝수일 때 a_4는 4의 배수가 아니고

$a_5 = 2k + 14$, $a_4 + a_5 = 4k + 20$이므로

$50 < 4k + 20 < 60$, $a_3 > a_5$에서 $k > 7$

k는 짝수이므로 $k = 8$이고 $a_3 = 32$

따라서 $a_3 = 52$ 또는 $a_3 = 32$

$a_3 = 52$인 경우 $a_2 = 96$이고

$a_1 = 94$ 또는 $a_1 = 188$

$a_3 = 32$인 경우 $a_2 = 56$이고

$a_1 = 54$ 또는 $a_1 = 108$

(ⅱ) a_3이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3 = 4k-1$ 또는 $a_3 = 4k-3$ (k는 자연수)일 때

a_3, a_4, a_5는 모두 홀수이고

$a_5 = a_4 + 8 = a_3 + 14 > a_3$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3 = 4k-2$ (k는 자연수)일 때

$a_4 = 4k + 4$, $a_5 = 2k + 10$이고

$a_4 + a_5 = 6k + 14$이므로 $50 < 6k + 14 < 60$

$a_3 > a_5$에서 $k > 6$, 이때 $k = 7$이므로 $a_3 = 26$

따라서 $a_2 = 22$ 또는 $a_2 = 44$이다.

$a_2 = 22$인 경우 $a_1 = 40$

$a_2 = 44$인 경우 $a_1 = 42$ 또는 $a_1 = 84$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M = 188$, $m = 40$이고 $M + m = 228$

88. **정답** ①

$a_6 + a_8 = 0$, $a_n = An + B$라 할 때, $a_n = An - 7A$

$a_k = Ak - 7A$, $a_{k+1} = Ak - 6A$

$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{Ak-7A} - \frac{1}{Ak-6A}\right)$,

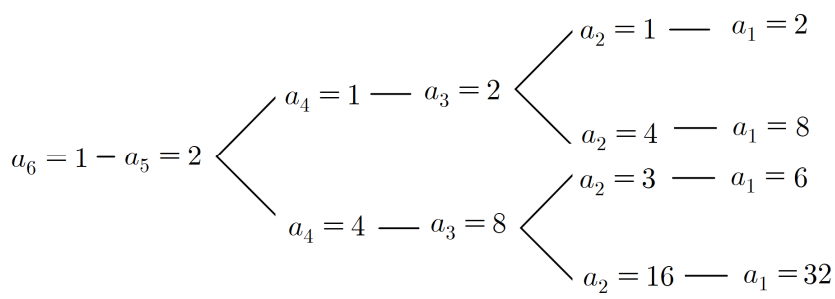
$\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{-6A} - \frac{1}{-A}\right) = \frac{1}{A} \times \frac{5}{6A} = \frac{5}{96}$, $A = 4$

$a_n = 4n - 28$, $\sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15(-24+32)}{2} = 60$

89. **정답** ③

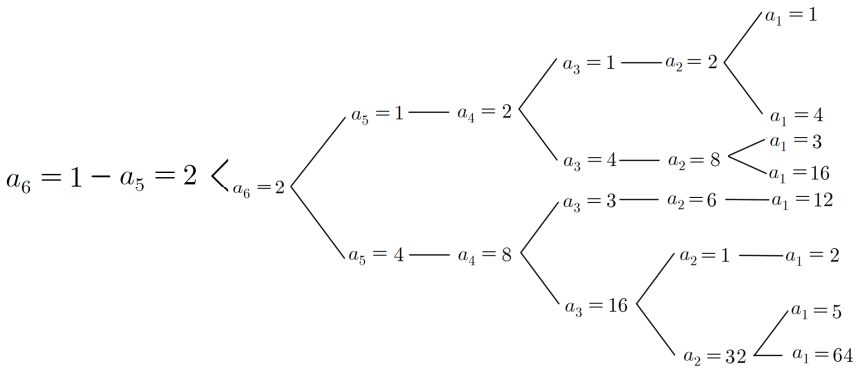
a_1은 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이고, $a_6 + a_7 = 3$에서 $a_6 = 1$, $a_7 = 2$ 또는 $a_6 = 2$, $a_7 = 1$

(ⅰ) $a_6 = 1$일 때,



(ⅱ) $a_6 = 2$일 때,

꿈을 현실로!
희망 부산교육



중복을 제외하면

$2+8+6+32+1+4+3+16+12+5+64=153$

90.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d\geq 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d<0$이어야 한다.

(ⅰ) $S_3=S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1+2d)}{2}=\frac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1=-4d$이므로

$S_3=S_6=-9d>0$,

$S_{11}=\frac{11(2a_1+10d)}{2}=11d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$에서

$-9d=-11d-3,\ d=-\frac{3}{2}$

$a_1=-4d=6$

(ⅱ) $S_3=-S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1+2d)}{2}=-\frac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1=-2d$이므로

$S_3=-S_6=-3d>0$

$S_{11}=\frac{11(2a_1+10d)}{2}=33d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$에서

$-3d=-33d-3,\ d=-\frac{1}{10}$

$a_1=-2d=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은 $6+\frac{1}{5}=\frac{31}{5}$이다.

91.

$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}$ …… ㉠

이고 $1<a_1<2$에서 $a_1\geq 0$이므로

$a_2=a_1-2<0$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-2)>0$

$a_4=a_3-2=-2(a_1-2)-2=-2(a_1-1)<0$

$a_5=-2a_4=4(a_1-1)>0$

$a_6=a_5-2=4(a_1-1)-2=4a_1-6$

이때 ㉠에서 $a_6<0$이면 $a_7=-2a_6>0$이므로

$a_7=-1\leq 0$에서 $a_6\geq 0$이다.

$a_7=a_6-2=(4a_1-6)-2=4a_1-8=-1$

$a_1=\frac{7}{4}$

따라서

$40\times a_1=40\times\frac{7}{4}=70$

92.

조건 (가)에 의하여

$\sum_{n=1}^{8}a_n=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$

$=15\times 4=60$

$\sum_{n=1}^{4}a_n=6$이므로 $\sum_{n=5}^{8}a_n=54$

조건 (나)에 의하여

$a_6=a_5+5$,

$a_7=a_6+6=a_5+11$,

$a_8=a_7+7=a_5+18$

따라서 $\sum_{n=5}^{8}a_n=4a_5+34=54$에서 $a_5=5$

93.

$a_{2m}=-a_m$에서 $a_m+md=-a_m$

$2a_m=-md$이므로

m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m이 짝수, 즉 $m=2p$(p는 자연수)라 하면

$a_{2m}+a_m=a_{4p}+a_{2p}$

$=\{a_1+(4p-1)d\}+\{a_1+(2p-1)d\}$

$=2\{a_1+(3p-1)d\}$

$=2a_{3p}=0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.

$m=2l-1$(l은 자연수)라 하면

$a_{4l-2}=-a_{2l-1}$에서

$a_{3l-1}=a_{4l-2}-(l-1)d$

$=-a_{2l-1}-(l-1)d$

$=-a_{3l-2}$

이고 $d>0$이므로

$1\leq n\leq 3l-2$일 때 $a_n<0$,

$n\geq 3l-1$일 때 $a_n>0$이다.

$\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=\sum_{k=2l-1}^{4l-2}|a_k|$

$=-a_{2l-1}-a_{2l}-a_{2l+1}-\cdots-a_{3l-2}$

$+a_{3l-1}+a_{3l}+a_{3l+1}+\cdots+a_{4l-2}$

$=-a_{2l-1}-(a_{2l-1}+d)-(a_{2l-1}+2d)-\cdots-\{a_{2l-1}+(l-1)d\}$

$+(a_{2l-1}+ld)+\{a_{2l-1}+(l+1)d\}+\cdots+\{a_{2l-1}+(2l-1)d\}$

$=-\{1+2+3+\cdots+(l-1)\}d$

$+\{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$

$=-\frac{l(l-1)}{2}d+\frac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$

$=l^2d=128$

l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 (l, d)는 $(1, 128)$, $(2, 32)$, $(4, 8)$, $(8, 2)$이다.

따라서 모든 d의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

94.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5\times a_7<0$

이므로

$a_5<0,\ a_7>0$

즉, $n\leq 5$일 때 $a_n<0$이고, $n\geq 7$일 때 $a_n>0$이다.

이때 조건 (나)에서

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

이므로

$|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$

$a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1+18)+(a_1+24)+(a_1+30)$

$=6-(a_1+3)-(a_1+9)+|a_1+15|$

$|a_1+15|=5a_1+78$ ……㉠

㉠에서 $a_1+15\geq 0$이면

$a_1+15=5a_1+78$

$4a_1=-63$

$a_1=-\frac{63}{4}<-15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1+15<0$이므로 ㉠에서

$-a_1-15=5a_1+78$

$6a_1=-93$

$a_1=-\frac{31}{2}$

따라서

$a_{10}=a_1+9\times 3=-\frac{31}{2}+27=\frac{23}{2}$

95.

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$

$a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$

(m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다.

$a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$

$a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$

(m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉,

$a_{22}\neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$

$a_7<0$이므로

$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\neq 0$이다.

$5\leq k\leq 9$이면 $a_{22}\neq 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k\geq 11$이면 $a_{22}\neq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

96.

$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$

이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\geq 2)$이다.

$S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$이므로

$3S_n=(n+2)\times a_n(n\geq 1)$ 이다.

$3a_n=3(S_n-S_{n-1})$

$=(n+2)\times a_n-(\boxed{n+1})\times a_{n-1}$ $(n\geq 2)$

$(n-1)\times a_n=(n+1)\times a_{n-1}$이고 $a_1\neq 0$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{\frac{n+1}{n-1}}$ $(n\geq 2)$

따라서

$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$

$=2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{10}{8}\times\frac{11}{9}=\boxed{110}$

$f(n)=n+1,\ g(n)=\frac{n+1}{n-1},\ p=110$

따라서 $\frac{f(p)}{g(p)}=\frac{111}{\frac{111}{109}}=109$

97.

조건 (가)에 의하여

$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k$

$=17n-17(n-1)=17$ $(n\geq 2)$

조건 (나)에 의하여

$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3$ $(n\geq 1)$

(i) $n=2$인 경우

$|a_4-a_3|=5$이고 $a_3+a_4=17$

$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$

조건 (나)에 의하여 $|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$이므로 $a_3=6,\ a_4=11$

(ii) $n=3$인 경우

$|a_6-a_5|=9$이고 $a_5+a_6=17$

$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$

조건 (나)에 의하여 $|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$이므로 $a_5=4,\ a_6=13$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면

$a_8=15,\ a_{10}=17,\ \cdots,\ a_{20}=27$이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인

등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{10\times(18+9\times 2)}{2}=180$

98.

$a_4=r$에서 $0<r<1$ 또는 $-1<r<0$이므로

$a_5=a_4+3=r+3$

$a_6=a_5+3=r+6$

$a_7=-\frac{1}{2}a_6=-\frac{r+6}{2}$

$a_8=a_7+3=3-\frac{r+6}{2}=-\frac{r}{2}$

a_{4k-2}에서 $|a_m|\geq 5$이 만족한다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$a_8 = r^2$이므로 $r^2 = -\frac{r}{2}$에서 $r = 0$ 또는 $-\frac{1}{2}$

$0 < |r| < 1$이므로 $r = -\frac{1}{2}$

$a_4 = a_3 + 3$이라 할 때, $-\frac{1}{2} = a_3 + 3$에서 $a_3 = -\frac{7}{2}$

얻어진 a_3의 절댓값이 5보다 작으므로 만족하므로 $a_3 = -\frac{7}{2}$

$a_3 = a_2 + 3$, $-\frac{7}{2} = a_2 + 3$에서 $a_2 = -\frac{13}{2} > 5$이므로

$a_3 = -\frac{1}{2}a_2$, $-\frac{7}{2} = -\frac{1}{2}a_2$이므로 $a_2 = 7$

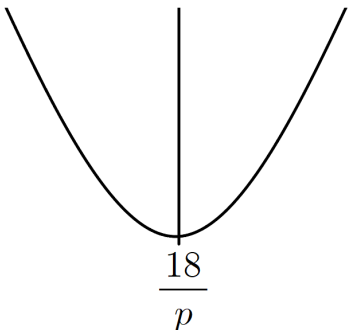
$a_2 = a_1 + 3$에서 $a_1 = 4$이므로 $a_1 < 0$을 만족하지 않는다.

$a_2 = -\frac{1}{2}a_1$, $7 = -\frac{1}{2}a_1$에서 $a_1 = -14$

$\therefore$ $4k-2$는 100이하에서 25개, $a_1 = -14$의 절댓값도 5보다 크므로 $p = 26$

$\therefore$ $p + a_1 = 26 + (-14) = 12$

99.



S_n을 이차함수로 생각하면, 위의 그림과 같이 대칭축이 $x = \frac{18}{p}$가 된다. $p = 1, 2, 3$일 때는 $\frac{18}{p}$가 자연수가 되어서 좌우에 다른 자연수에서의 함숫값이 같은 값이 된다.

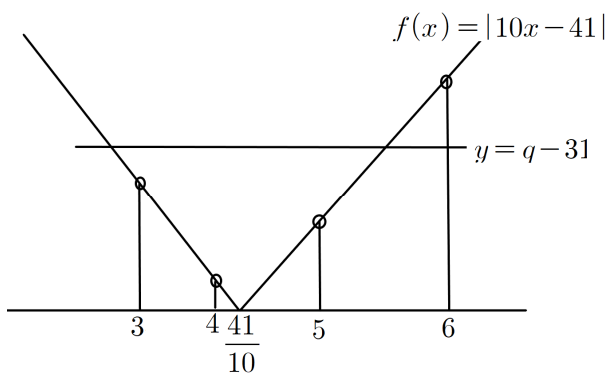
$p = 4$일 때는 축이 $\frac{18}{p} = \frac{9}{2}$가 돼서 $n = 4$일 때와 $n = 5$일 때의 값이 같아진다.

그러므로 $p_1 = 5$에서 대칭축이 $x = \frac{18}{5}$가 되어 모든 S_n의 값이 다른 값이 된다. $\therefore$ $S_n = 5n^2 - 36n + q$, $a_n = 10n - 41 (n \geq 2)$, $a_1 = q - 31$

$|a_k| < a_1$이므로 $|10n - 41| < q - 31$

$f(x) = |10x - 41|$, $y = q - 31$이라 할 때,

$f(3) = 11$, $f(4) = 1$, $f(5) = 9$, $f(6) = 19$



그림과 같이 만족하는 정수가 3개이므로 $q - 31$은 $f(3)$과 $f(6)$사이에 존재해야한다.

$11 < q - 31 \leq 19$, $\therefore$ $42 < q \leq 50$

$\therefore$ $\frac{8 \times (43 + 50)}{2} = 4 \times 93 = 372$

100.

$a_7 = 40$과의 합이 3의 배수인지 아닌지에 따라 바뀌므로 a_6을 $3k-2$ 또는 $3k-1$ 또는 $3k$일 때로 나눠 각각 구해볼 때,

(ⅰ) $a_6 = 3k$일 때,

$a_7 = \frac{3k}{3} = 40$이므로 $a_6 = 120$일 때,

$a_8 = a_7 + a_6 = 40 + 120 = 160$, $a_9 = a_8 + a_7 = 160 + 40 = 200$

$\therefore$ $a_9 = 200$

(ⅱ) $a_6 = 3k - 1$일 때,

$a_5 + a_6 = 40$, $a_5 = 40 - 3k + 1 = 41 - 3k$,

$a_4 = a_6 - a_5 = 3k - 1 - (41 - 3k) = 6k - 42$

$\frac{6k-42}{3} = 41 - 3k$, $15k = 123 + 42 = 165$, $k = 11$

$a_6 = 32$, $a_8 = 40 + 32 = 72$, $\therefore$ $a_9 = 24$

(ⅲ) $a_6 = 3k - 2$일 때,

$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 2) = 42 - 3k$

$42 - 3k$는 3의 배수이므로 $a_6 = \frac{42 - 3k}{3} = 14 - k = 3k - 2$, $k = 4$

$a_6 = 10$, $a_8 = 40 + 10 = 50$, $\therefore$ $a_9 = 90$

$\therefore$ $M = 200$, $m = 24$, $M + m = 224$

101.

점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y = nx$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{n}$이므로 직선의 방정식은

$y - n^2 = -\frac{1}{n}(x - n)$, $y = \boxed{-\frac{1}{n}} \times x + n^2 + 1$

즉, $\boxed{\text{(가)}} = -\frac{1}{n}$

점 B_n의 좌표는 $-\frac{1}{n}x + n^2 + 1 = 0$에서 $(n^3 + n, 0)$

점 A_n의 좌표는 (n, n^2)이므로

$S_n = \frac{1}{2} \times (n^3 + n) \times n^2 = \boxed{\frac{n^5 + n^3}{2}}$

즉, $\boxed{\text{(나)}} = \frac{n^5 + n^3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{n^3} = \sum_{n=1}^{8} \frac{n^5 + n^3}{2n^3} = \sum_{n=1}^{8} \frac{n^2 + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8} n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8} 1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{1}{2} \times 1 \times 8$$

$$= 102 + 4 = \boxed{106}$$

즉, $\boxed{\text{(다)}} = 106$

따라서 $f(n) = -\frac{1}{n}$, $g(n) = \frac{n^5 + n^3}{2}$, $r = 106$이므로

$f(1) + g(2) + r = -1 + 20 + 106 = 125$

102.

(ⅰ) $a_1 = 1$일 때

$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 = -1$

$a_2 < 0$이므로 $a_3 = a_2 + 5 = 4$

$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = a_3 - 2 = 2$

$a_4 \geq 0$이므로 $a_5 = a_4 - 2 = 0$

$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = a_5 - 2 = -2$

$a_6 < 0$이므로 $a_7 = a_6 + 5 = 3$

$a_7 \geq 0$이므로 $a_8 = a_7 - 2 = 1 = a_1$

$a_8 \geq 0$이므로 $a_9 = a_8 - 2 = -1 = a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고 $a_{15} = a_8 = a_1 = 1$

(ⅱ) $a_1 = 2$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$a_{15}=a_8=a_1=2$

(iii) $a_1=3$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=3$

(iv) $a_1=4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=4$

(ⅴ) $a_1=5$일 때

$a_1\ge 0$이므로 $a_2=a_1-2=3$

$a_2\ge 0$이므로 $a_3=a_2-2=1$

$a_3\ge 0$이므로 $a_4=a_3-2=-1$

$a_4<0$이므로 $a_5=a_4+5=4$

$a_5\ge 0$이므로 $a_6=a_5-2=2$

$a_6\ge 0$이므로 $a_7=a_6-2=-2$

$a_7\ge 0$이므로 $a_8=a_7-2=-2$

$a_8<0$이므로 $a_9=a_8+5=3=a_2$

$a_9\ge 0$이므로 $a_{10}=a_9-2=1=a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=-2<0$

따라서 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

103.

점 A$(a,\ b)$에 대하여 점 B$(c,\ d)$가

$\overline{OA}\perp\overline{AB}$, $\overline{OA}=\overline{AB}$를 만족시키려면

$c=a-b,\ d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n이하의 자연수이므로

$b<\frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수

a의 개수는 $n-2k$이다.

2이상의 자연수 m에 대하여

(ⅰ) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는

1부터 $\boxed{m-1}$까지이므로

$$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{m-1}}(2m-2k)$$

$$=2m(m-1)-m(m-1)$$

$$=\boxed{m^2-m}$$

(ⅱ) $n=2m+1$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 m까지이므로

$$T_{2m+1}=\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$$

$$=m(2m+1)-m(m+1)$$

$$=\boxed{m^2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\sum_{n=4}^{20}T_m=614$

따라서 $f(m)=m-1,\ g(m)=m^2-m,\ h(m)=m^2$

이므로 $f(5)+g(6)+h(7)=4+30+49=83$

104.

$a_{12}=\frac{1}{2}$이고 $a_{12}=\frac{1}{a_{11}}$이므로 $a_{11}=2$

또, $a_{11}=8a_{10}$이므로 $a_{10}=\frac{1}{4}$

또, $a_{10}=\frac{1}{a_9}$이므로 $a_9=4$

또, $a_9=8a_8$이므로 $a_8=\frac{1}{2}$

또, $a_8=\frac{1}{a_7}$이므로 $a_7=2$

또, $a_7=8a_6$이므로 $a_6=\frac{1}{4}$

또, $a_6=\frac{1}{a_5}$이므로 $a_5=4$

또, $a_5=8a_4$이므로 $a_4=\frac{1}{2}$

또, $a_4=\frac{1}{a_3}$이므로 $a_3=2$

또, $a_3=8a_2$이므로 $a_2=\frac{1}{4}$

또, $a_2=\frac{1}{a_1}$이므로 $a_1=4$

따라서 $a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

105.

주어진 식 (*)에 의하여

$$nS_n=\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\ge 2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$(n+1)S_{n+1}-nS_n$$

$$=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\ge 2)$$

이므로

$$(\boxed{(n+1)})\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}\ (n\ge 2)$$

이다.

$a_1=1=\log_2 2$이고,

$2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로

$2a_2=\log_2\frac{3}{2}$

모든 자연수 n에 대하여

$na_n=\boxed{\log_2\frac{n+1}{n}}$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}$$

$$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\ \cdots\ +\log_2\frac{n+1}{n}$$

$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ \cdots\ \times\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\boxed{\log_2(n+1)}$$

이다.

$f(n)=n+1,\ g(n)=\log_2\frac{n+1}{n},\ h(n)=\log_2(n+1)$

따라서

$f(8)-g(8)+h(8)=9-\log_2\frac{9}{8}+\log_2 9=12$

106.

(ⅰ) $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ⅱ) $k\ne 1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서

$\sum_{k=1}^{20} k = 210$이고, $1+4+9+16=30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \left\{ k\times \frac{f(\sqrt{k})}{3} \right\}$$

$$= 30\times\frac{1}{3} + (210-30)\times\frac{3}{3}$$

$$= 10+180 = 190$$

107.

$a_1 = a$라 하면

조건 (나)에 의하여

$$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$$

$$d\{k^2-5k+3\} = a(k+1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

모든 항이 자연수이므로

조건 (가)에서 $0 < a \le d$

$a(k+1) \le d(k+1)$

$k^2-5k+3 \le k+1$

$k^2-6k+2 \le 0$

$3-\sqrt{7} \le k \le 3+\sqrt{7}$

$k \ge 3$이므로 자연수 $k=3,\ 4,\ 5$

㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로 $k=5,\ d=2a$

$90 \le a_{16} \le 10,\ a_{16} = a+15d = 31a$

이므로 $a=3,\ d=6$

따라서 $a_{20} = a+19d = 117$

108.

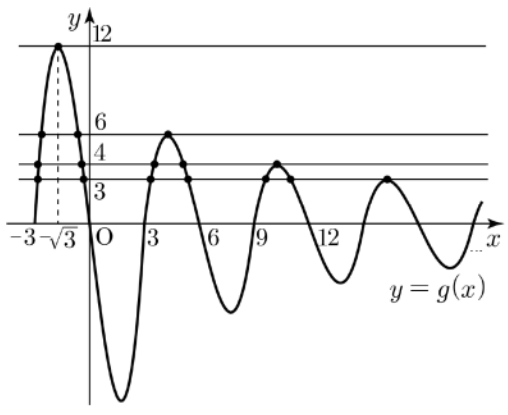
$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$$

$f'(x) = 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	−12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여

$6k-3 \le x < 6k+3$일 때

함수 $g(x) = \frac{1}{k+1} f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로

$k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1 = 2\times11+1 = 23$

$a_2 = 2\times5+1 = 11$

$a_3 = 2\times3+1 = 7$

$a_4 = 2\times2+1 = 5$

$a_5 = 2\times2 = 4$

$a_6 = 2\times1+1 = 3$

$7 \le n \le 11$일 때, $a_n = 2\times1 = 2$

$a_{12} = 1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{12} a_n = 23+11+7+5+4+3+2\times5+1 = 64$$

109.

(가) 조건에서 a_n이 등차수열 이므로 $a_m \ne a_{m+3}$

$\therefore\ a_m = -a_{m+3}$, a_n의 첫 항이 -45이므로

$a_m = -45+(m-1)d,\ a_{m+3} = -45+(m+2)d$

$-90+(2m+1)d = 0,\ (2m+1)d = 90$

$m,\ d$의 순서쌍은

$(1,\ 30),\ (2,\ 18),\ (4,\ 10),\ (7,\ 6),\ (22,\ 2)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\{-90+(n-1)d\}}{2} > -100,$$

$dn^2-(d+90)n+200>0$이 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로

판별식 $(d+90)^2-800d<0$를 만족해야 한다.

$\therefore$ d는 30 또는 18

110.

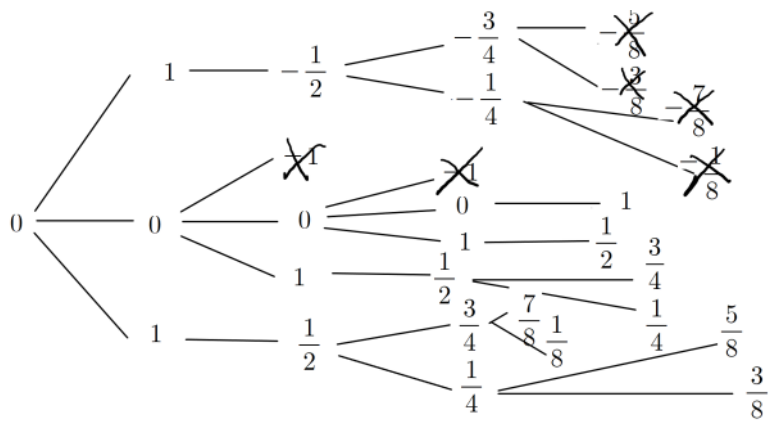
$$a_6 = \begin{cases} -2a_5-2\text{이라면},\ a_5 = -2 \\ 2a_5\text{라면},\ a_5 = 0 \\ -2a_5+2\text{이라면},\ a_5 = 2 \end{cases}$$

주어진 구간에 맞는 $a_5 = 0$

아래 그림은 역으로 $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$을 구하는 수형도이다.

$a_1 > 0$크고, 각각의 구해진 값이 구간에 맞는지 확인해서 안 맞는 값을 제거하면, 결국 남은 값은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{8} = 4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$



111. 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1}+a_{2k} = 2(2k-1) = 4k-2$

이므로 $\sum_{n=1}^{22} a_n = \sum_{k=1}^{11}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum_{k=1}^{11}(4k-2)$

$$= 4\times\frac{11\times12}{2} - 2\times11 = 242$$

(ⅱ) $n=2k$일 때, $a_{2k}+a_{2k+1} = 2\times2k = 4k$

이므로 $\sum_{n=2}^{21} a_n = \sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{10} 4k$

$$= 4\times\frac{10\times11}{2} = 220$$

따라서 $a_1+a_{22} = \sum_{n=1}^{22} a_n - \sum_{n=2}^{21} a_n = 242-220 = 22$

[다른 풀이]

자연수 k에 대하여 $a_{2k}+a_{2k+1} = 4k$, $a_{2k-1}+a_{2k} = 4k-2$이므로

$a_{2k+1}-a_{2k-1} = 2$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times 2$ …… ㉠

㉠에 $k=11$을 대입하면 $a_{21}=a_1+20$ …… ㉡

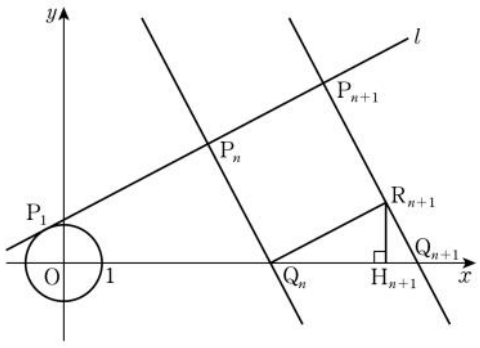
모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}=2n$이므로

$n=21$을 대입하면 $a_{21}+a_{22}=42$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $(a_1+20)+a_{22}=42$

따라서 $a_1+a_{22}=22$

112.



점 R_{n+1}에서 x축에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하면 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 Q_nR_{n+1}의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 즉, $\overline{Q_nH_{n+1}}:\overline{H_{n+1}R_{n+1}}=2:1$

직각삼각형 $Q_nR_{n+1}Q_{n+1}$과 직각삼각형 $Q_nH_{n+1}R_{n+1}$은 서로 닮음이므로 $\overline{Q_nR_{n+1}}:\overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=2:1$에서

$\overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=\frac{1}{2}\times\overline{Q_nR_{n+1}}$

$\overline{Q_nR_{n+1}}=\overline{P_nP_{n+1}}$이므로 $\boxed{\text{(가)}}=\frac{1}{2}$

$\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\left(1+\boxed{\text{(가)}}\right)\times\overline{P_nQ_n}=\frac{3}{2}\times\overline{P_nQ_n}$이고

$\overline{P_1Q_1}=1$이므로 선분 P_nQ_n의 길이는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다. 즉, $\overline{P_nQ_n}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

그러므로 $\boxed{\text{(나)}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_nQ_n}$이므로

$$\overline{P_1P_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kP_{k+1}}=\frac{1\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

그러므로 $\boxed{\text{(다)}}=2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $f(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $g(n)=2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$

이므로 $f(6p)+g(8p)=f(3)+g(4)=\frac{9}{4}+\frac{19}{4}=7$

113. a_1, …, a_{10}중에 양수인 항들의 합을 x
음수인 항들의 합을 y라 할 때,

$x-y=2+4+8+\ \cdots\ +1024=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2=2046$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=x+y=-14$

$\begin{cases}x+y=-14\\x-y=2046\end{cases}$을 연립하면, $x=1016$, $y=-1030$

$1016=512+256+128+64+32+16+8$

$=2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3=a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3$

$1030=1024+4+2=2^{10}+2^2+2^1=-(a_{10}+a_2+a_1)$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2+8+32+128+512=678$

114.
직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$

자연수 a에 대하여 $x=a$일 때

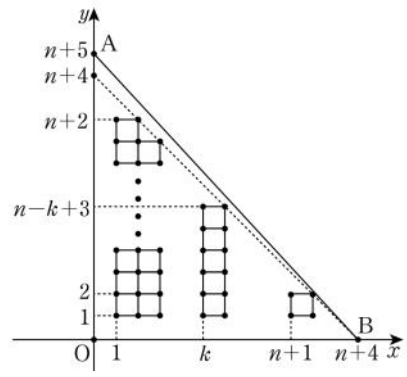
$y=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5$

$=n+5-\left(1+\frac{1}{n+4}\right)a$

$=n+5-a-\frac{a}{n+4}$

$0<a<n+4$일 때, $0<\frac{a}{n+4}<1$이므로

$x=a$일 때, y좌표가 자연수인 점의 개수는 $n+4-a$이다.



두 자연수 a, b에 대하여 삼각형 AOB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각
(a, b), $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, $(a, b+1)$
이라 하면
$a=1$일 때, $1\le b\le n+1$이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$이다.
$a=2$일 때, $1\le b\le n$이므로 정사각형의 개수는 n이다.
$a=3$일 때, $1\le b\le n-1$이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$이다.
⋮
$a=n+1$일 때, $b=1$이므로 정사각형의 개수는 1이다.
따라서
$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\ \cdots\ +1$

$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$

$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+3n+2)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8\right)$

$=164$

115.

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에서 $n=1$을 대입하면

$a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$이므로 $a_2=2$

$n\ge2$일 때 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$

$=na_n$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge2$)

위 식에 $n=50$을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$이고 $a_{50}>0$이므로 $\frac{a_{51}}{a_{50}}=51$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

따라서 $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ …… (*)

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$이고 $n\geq 2$일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$이므로

(i) $n=2$일 때

$a_2=2>0$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) 2 이상의 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면 $a_k>0$

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

116.

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_{k-2}는 a_{k-3}과 a_{k-1}의 등차중항이다. 즉,

$a_{k-2}=\frac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=\frac{-24}{2}=-12$

$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$

$=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$

따라서 $k^2=15k$이고 $k\neq 0$이므로 $k=15$

[다른 풀이 1]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$ …… ㉠

$a_{k-2}=\frac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}$,

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq 0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉢

㉢에서 ㉠을 빼면 $a+(k-3)d=2k-42$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $2k-42=-12$이므로 $k=15$

[다른 풀이 2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$, $a=42-2d$ …… ㉠

$a_{k-3}+a_{k-1}=a+(k-4)d+a+(k-2)d=-24$이므로

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$42-2d+kd-3d=-12$, $kd-5d=-54$ …… ㉢

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq 0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

$84-4d+kd-d=2k$, $kd-5d=2k-84$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $2k-84=-54$이므로 $k=15$

117.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\frac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a=\frac{63}{2}$이므로 $r\neq 1$

$\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$

$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$

$=ar\times ar^4\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$

$=a^2r^5\times\frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}$

$=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$

$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^4-1}$

$=\frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}=\frac{r^4+r^2+1}{r^2+1}=\frac{189}{45}$

이므로

$5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

$5r^4-16r^2-16=0$, $(5r^2+4)(r^2-4)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=15a=45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3=3\times 2^2=12$

118.

두 조건 (가)와 (나)로부터 $a_{2n}+a_{2n+1}=2b_n+1$

두 조건 (다)와 (라)로부터 $b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+1$

$\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(a_{2n}+a_{2n+1})-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(2b_n+1)-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}b_n+31$

$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(b_{2n}+b_{2n+1})+31$

$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(2a_n+1)+31$

$=a_1+b_1+2\sum_{n=1}^{15}a_n+15+31$

$=a_1+b_1+2a_1+2\sum_{n=1}^{7}(2b_n+1)+46$

$=a_1+b_1+2a_1+4\sum_{n=1}^{7}b_n+14+46$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+4\sum_{n=1}^{3}(2a_n+1)+60$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8\sum_{n=1}^{3}a_n+12+60$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+8(2b_1+1)+72$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+16b_1+8+72$

$=11a_1+21b_1+80=155$

그러므로 $11a_1+21b_1=75$ … ㉠

조건 (가)와 (다)에서

$a_{4n}=b_{2n}+2=(3a_n-2)+2=3a_n$,

$b_{4n}=3a_{2n}-2=3(b_n+2)-2=3b_n+4$

이므로

$a_{48}=3a_{12}=9a_3=9(b_1-1)=9$, $b_1=2$

㉠에 의하여 $a_1=3$

따라서 $b_{32}=3b_8+4=9b_2+16=9(3a_1-2)+16=79$

119.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$n=1$일 때, $a_2+3a_1=-1$이므로 $a_2=-4$
$n=2$일 때, $a_3+3a_2=2$이므로 $a_3=14$
$n=3$일 때, $a_4+3a_3=-3$이므로 $a_4=-45$
$n=4$일 때, $a_5+3a_4=4$이므로 $a_5=139$

120.

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{(m+1)m}}+m\times 2^{-m-1}$$
$$=\boxed{2^{(m+1)m}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

이므로 $f(m)=2^{(m+1)m}$, $g(m)=2^{2m+2}$이다.

$$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=16$$

121.

$a_1+a_2+\cdots+a_k=S_k$이므로
$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=4$
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 $a_{k+1}=1$이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면
$a_n=a+2(n-1)$에서 $a_{k+1}=1$이므로
$a_n=2n-2k-1$이다.
$-16=S_k=\frac{k(a+a_k)}{2}=\frac{k(1-2k-1)}{2}=-k^2$에서 $k=4$이다.
따라서 $a_n=2n-9$이고 $a_{2k}=a_8=7$이다.

122.

$a_1=1$이고 $\begin{cases}a_{3n-1}=2a_n+1\\ a_{3n}=-a_n+2\\ a_{3n+1}=a_n+1\end{cases}$ 에서

$\begin{cases}a_{11}=2a_4+1\\ a_{12}=-a_4+2\\ a_{13}=a_4+1\end{cases}$ 이므로 a_4를 구하면 된다.

$a_4=a_1+1$에서 $a_4=2$이고
$a_{11}=5$, $a_{12}=0$, $a_{13}=3$이므로
$a_{11}+a_{12}+a_{13}=8$

123.

첫째항을 a라 하면 공차가 2이므로
$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)\times 2\}}{2}=n^2+(a-1)n$
이다.
$s_k=-16$, $s_{k+2}=-12$ 에서
$s_{k+2}-s_k=4k+2a+2=4$이므로
$a=1-2k$이다.
$S_k=k^2+(-2k)k=-k^2$에서 $S_k=-16$이고
k는 자연수 이므로 $k=4$이고 $a=-7$이다.
따라서 $a_{2k}=a_8=-7+7\times 2=7$

124.

$n\geq 2$에 대하여 수열의 합과 일반항 사이의 관계는 $a_n=S_n-S_{n-1}$
이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}=\frac{4n-3}{a_n}$$
$$2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}=\frac{4n-3}{a_n}$$
$$4n+5=\frac{4n-3}{a_n}\ (n\geq 2)$$

따라서 $a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$이므로
$a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$이다.
그러므로 $p+q=41+17=58$

125.

조건 (가), (나)에 의하여
$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$
$S_7=T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여
$a_n\geq 0$ … ㉠
조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$
$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$
$a_{n+1}\leq 0$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $0\leq a_7\leq 0$이므로 $a_7=0$
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서 $a=12$, $d=-2$
$a_n=14-2n$
$S_{15}=\frac{15\times(24-28)}{2}=-30$
$S_{15}+T_{15}=84$
따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

126.

조건 (가), (나)에 의하여
$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$
$S_7=T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여
$a_n\geq 0$ … ㉠
조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$
$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$
$a_{n+1}\leq 0$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $0\leq a_7\leq 0$이므로 $a_7=0$
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서 $a=12$, $d=-2$
$a_n=14-2n$
$S_{15}=\frac{15\times(24-28)}{2}=-30$
$S_{15}+T_{15}=84$
따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

127.

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.
$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$
이고 선분 P_nP_{n+1}과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및
x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은
$$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx=\frac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$$
$$=b_n+b_{n+1}$$
$a_1=1$, $a_6=11$이므로
$$\int_1^{11}f(x)dx=\int_{a_1}^{a_6}f(x)dx=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$

조건 (다)에 의하여 직선 P_nP_{n+1}의 기울기는

$\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$, $b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$

$b_1=1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$

$b_3=b_2+a_3=a_1+a_2+a_3=9$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4=16$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$

$b_6=b_5+a_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$

따라서 $\int_1^{11}f(x)dx=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=(1+4)+(4+9)+(9+16)+(16+25)+(25+36)$

$=145$

128.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a>0$, $d<-1$이므로 $n\le k$일 때 $a_n\ge 0$, $n\ge k+1$일 때 $a_n<0$인 자연수 k가 유일하게 존재한다.

$n\le k$일 때,

$a_n\ge 0$, $b_n=a_{n+1}-\dfrac{n}{2}$이므로

$b_1=a_2-\dfrac{1}{2}$, $b_2=a_3-1$, $\cdots$, $b_k=a_{k+1}-\dfrac{k}{2}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1$일 때,

$b_{n+1}-b_n=d-\dfrac{1}{2}$을 만족시킨다.

$n\ge k+1$일 때,

$a_n<0$, $b_n=a_n+\dfrac{n}{2}$이므로

$b_{k+1}=a_{k+1}+\dfrac{k+1}{2}$, $b_{k+2}=a_{k+2}+\dfrac{k+2}{2}$,

$b_{k+3}=a_{k+3}+\dfrac{k+3}{2}$, $\cdots$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots$일 때,

$b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}$을 만족시킨다.

즉, $n\le k-1$일 때, $d-\dfrac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$,

$n\ge k+1$일 때, $d+\dfrac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$,

$n=k$일 때,

$b_{k+1}-b_k=\left(a_{k+1}+\dfrac{k+1}{2}\right)-\left(a_{k+1}-\dfrac{k}{2}\right)$

$=k+\dfrac{1}{2}>0$

이므로 $b_n<b_{n+1}$

그러므로 $n=k$일 때만 $b_n<b_{n+1}$이다.

조건 (가)에서 $b_5<b_6$이므로 $k=5$이다.

그러므로 $b_n=\begin{cases}a_{n+1}-\dfrac{n}{2} & (n\le 5)\\ a_n+\dfrac{n}{2} & (n\ge 6)\end{cases}$

조건 (나)에 의하여

$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$

$=\dfrac{5(b_1+b_5)}{2}=\dfrac{5}{2}\times\left\{\left(a_2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_6-\dfrac{5}{2}\right)\right\}$

$=\dfrac{5}{2}\times(2a+6d-3)=0$

즉, $2a+6d-3=0$ $\cdots$ ㉠

$S_9-S_5=b_6+b_7+b_8+b_9$

$=\dfrac{4(b_6+b_9)}{2}=\dfrac{4}{2}\times\left\{(a_6+3)+\left(a_9+\dfrac{9}{2}\right)\right\}$

$=2\times\left(2a+13d+\dfrac{15}{2}\right)=0$

즉, $2a+13d+\dfrac{15}{2}=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=6$, $d=-\dfrac{3}{2}$이므로

$a_n=-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}$

$S_9=0$, $b_{10}=a_{10}+5=-\dfrac{15}{2}+5=-\dfrac{5}{2}$

$n\ge 6$일 때, 수열 $\{b_n\}$은 $b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}=-1$을 만족시키므로

$S_n=S_9+(b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n)$

$=0+\dfrac{(n-9)\{-5+(n-10)(-1)\}}{2}$

$=-\dfrac{(n-5)(n-9)}{2}$ $(n\ge 10)$

$S_n\le -70$을 만족시키는 n의 값의 범위는 $n\ge 19$이므로

자연수 n의 최솟값은 19

[참고]

$b_n=\begin{cases}6-2n & (n\le 5)\\ \dfrac{15}{2}-n & (n\ge 6)\end{cases}$

$S_n=\begin{cases}n(5-n) & (n\le 5)\\ -\dfrac{1}{2}(n-5)(n-9) & (n\ge 6)\end{cases}$

이므로 $n\le 9$일 때, $S_n\ge 0$

129.

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$ $\cdots$ (*)

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\sqrt{3a_n})$이므로

$a_n:\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$

$\overline{P_nP_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{3a_n})^2}{a_n}=$ 3 이다.

이때 점 P_1의 좌표가 $(1,0)$이고 (*)에 의해

a_n은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열,

즉 $a_n=3n-2$

따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$A_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{OP_{n+1}}\times\overline{P_nQ_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{a_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times($ $3n+1$ $)\times\sqrt{(9n-6)}$

이다.

따라서 $p=3$, $f(n)=3n+1$

이므로 $p+f(8)=3+25=28$

130.

자연수 n에 대하여

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$

$=a_1r^n+a_1r^{n+1}+a_1r^{n+2}$

$=a_1(1+r+r^2)r^n=13\times 3^{n-1}$

이므로 $r=3$이며

$a_1r(1+r+r^2)=13$

$a_1=\dfrac{1}{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1}$이므로 $a_4 = 9$

131.

a_3과 a_6의 값이 주어졌으므로 a_3과 a_4의 크기를 비교하자.

(1. $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = 2 + a_4$

$a_6 = 2a_4 + 2 + a_4 = 3a_4 + 2 = 19$

이므로 $a_4 = \frac{17}{3}$이다. $a_3 > a_4$에 모순이다.

(2. $a_3 \le a_4$인 경우

$a_5 = 4 + a_4$

$a_6 = 2a_4 + 4 + a_4 = 3a_4 + 4 = 19$

이므로 $a_4 = 5$이다.

가능한 a_1의 값을 찾으면 아래 표와 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4
$\frac{1}{4}$ $(a_1 \le a_2)$	$\frac{3}{2}$ $(a_2 \le a_3)$	2	5
$-\frac{1}{2}$ $(a_1 > a_2)$			
$-\frac{1}{2}$ $(a_1 \le a_2)$	3 $(a_2 > a_3)$		
-1 $(a_1 > a_2)$			

그러므로 조건에 맞는 a_1의 값은 $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$이다.

132.

(ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k} + \boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}({}_m\mathrm{C}_k + {}_m\mathrm{C}_{k-1})}{k} + \boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{\boxed{m!}}{(m-k+1)!(k-1)!} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{m+1}} \times \frac{(m+1)!}{(m-k+1)!\,k!} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$f(m) = \frac{(-1)^m}{m+1}$, $g(m) = m!$, $h(m) = m+1$이므로

$\frac{g(3)+h(3)}{f(4)} = 50$

133.

자연수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 조건 (나)에서 $a+b>c$이므로 $c \ge 4$이다.

(ⅰ) $c=2k$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$인 경우

$b=2k-1$일 때 $2 \le a \le 2k-2$

$b=2k-2$일 때 $3 \le a \le 2k-3$

⋮

$b=k+1$일 때 $a=k$

이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$(2k-3)+(2k-5)+(2k-7)+ \cdots +3+1$

$= \frac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2} = (k-1)^2$

(ⅱ) $c=2k+1$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우

$b=2k$일 때 $2 \le a \le 2k-1$

$b=2k-1$일 때 $3 \le a \le 2k-2$

⋮

$b=k+2$일 때 $k \le a \le k+1$

이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$(2k-2)+(2k-4)+(2k-6)+ \cdots +4+2$

$= \frac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2} = k(k-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$\sum_{k=2}^{10} (k-1)^2 + \sum_{k=2}^{9} k(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{9} k^2 + \sum_{k=1}^{9} (k^2-k) = \sum_{k=1}^{9} (2k^2-k)$$

$$= 2 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - \frac{9 \times 10}{2} = 525$$

134.

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$\boxed{\text{(가)}} = {}_k\mathrm{C}_2 = \frac{k(k-1)}{2}$

집합 $\{(1, k+1), (2, k+1), \cdots, (k, k+1)\}$에서

$k+1$이 k개이므로 그 합은 $k(k+1)$

즉, $\boxed{\text{(나)}} = k(k+1)$

그러므로 $f(k) = \frac{k(k-1)}{2}$, $g(k) = k(k+1)$

따라서 $f(10)+g(9) = 45+90 = 135$

135.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$a_5 = 5$이므로 $a_3 = 5-2d$, $a_4 = 5-d$, $a_6 = 5+d$

$a_7 = 5+2d$

그러므로

$$\sum_{k=3}^{7} |2a_k - 10| = |2a_3 - 10| + |2a_4 - 10| + |2a_5 - 10|$$

$$+ |2a_6 - 10| + |2a_7 - 10|$$

$$= |-4d| + |-2d| + 0 + |2d| + |4d|$$

$$= 12d = 20$$

따라서 $d = \frac{5}{3}$이므로 $a_6 = a_5 + d = \frac{20}{3}$

136.

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}(a_4 - a_3)(2^{a_4} - 2^{a_3})}{\frac{1}{2}(a_2 - a_1)(2^{a_2} - 2^{a_1})}$$

$$= \frac{2^{a_3}(2^{a_4 - a_3} - 1)}{2^{a_1}(2^{a_2 - a_1} - 1)} = 2^{a_3 - a_1} = 2^{2d} = 16$$

이므로 $d=2$ ☜ (가)

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n-1$ ☜ (나)

그러므로

$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$

$= 2^{2n+1} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1}(2^2 - 1)$

$= 3 \times 2^{2n-1}$ ☜ (다)

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{3\times 2^7}{3}=130$$

137.

$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$

$a_8 = a_2 \times a_4 + 1$

$= a_2 \times (a_2 \times a_2 + 1) + 1$

$= (a_2)^3 + a_2 + 1$

$a_{15} = a_2 a_7 - 2$

$= a_2 (a_2 \times a_3 - 2) - 2$

$= a_2 (a_2 (a_2 \times a_1 - 2) - 2) - 2$

$= a_2 (a_2 (a_2 - 3) - 2) - 2$

$= (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$에서

$(a_2)^2 + a_2 - 20 = 0$

$a_2 = -5$또는 4

$0 < a_1 < 1$을 만족하는 $a_2 = 4$이고 $a_1 = \frac{3}{4}$

$$\frac{a_8}{a_1}=\frac{69}{\frac{3}{4}}=92$$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 04 함수의 극한과 연속

해 설

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}=\frac{1+3}{1}=4$$

2.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}5=4+5=9$$

3. ①

[출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 2+}\{f(x)\}^2=\{f(2)\}^2$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-}\{f(x)\}^2=(5-2a)^2$, $\lim_{x\to 2+}\{f(x)\}^2=1$, $\{f(2)\}^2=1$에서

$(5-2a)^2=1$

따라서 $a=2$ 또는 $a=3$

모든 상수 a의 값의 합은 $2+3=5$이다.

4. [정답] ⑤

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=2+3=5$$

5. [정답] 5

[출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

6. [정답] 8

[출제의도] 함수의 극한과 연속 이해하기

$f(x)$가 다항함수이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$이므로

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$ (a는 실수)

$x\neq 0$일 때 $f(x)=2x^2+5x+a$이고

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=a=1$

따라서 $f(1)=2+5+1=8$

7. 정답 ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$에서 $f(1)=4-f(1)$

$\therefore f(1)=2$

8. [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to -1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

9. 정답 ①

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$,

$\therefore \lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=(-2)+0=-2$

10. [출제의도] 사잇값의 정리를 이용하여 함숫값을 구한다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, m, n이고

m, n은 자연수이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(1)f(3)<0$에서 $f(2)=0$

$f(3)f(5)<0$에서 $f(4)=0$

$f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로 $f(6)=6\times 4\times 2=48$

11. 정답 ①

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-a)=6-a$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+a)=4+a$

$6-a=4+a$, $\therefore a=1$

12.

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

13.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=1$$

14.

$x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이고

$x\to 1+$일 때 $f(x)\to 1$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim f(x)$

$=(-2)+1=-1$

15.

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+a|$

$=|-1+a|$

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1$

$|f(-1)|=|-1|=1$

이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3$,

$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|$

$=|3b-2|$

$|f(3)|=|3b-2|$

이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

16.

$\lim_{x\to -1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=2$

17.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-ax+3)=f(2)$

$1=7-2a$

따라서 $a=3$

18.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=0,\ f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$(a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+a)}{x-1}=2+a=3,\ a=1$

$f(x)=(x-1)(2x+1)$

따라서 $f(3)=14$

19.

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)=-a$

$a^2-6=-a,\ a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0,$

$\therefore$ a값의 합은 -1

20.

$\lim_{x\to -1+} f(x)=4,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=-2,$

$\therefore\ \lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=4-2=2$

21.

$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=2+3=5$

22.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax+b}{x-3}$의 값이 존재하고, $x\to 3-$ 일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 3-}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9+3a+b=0,\ b=-3a-9$

$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}(x+3+a)$

$=6+a$

한편, $\lim_{x\to 3+} f(x)=f(3)=7$

그러므로 $6+a=7$

따라서 $a=1,\ b=-12$이므로 $a-b=13$

23.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$

$f(2)=\lim_{x\to 2+} f(x)=b-4$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$

$\lim_{x\to 2-}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7$이므로

$b-4=7,\ b=11$

따라서 $a+b=-10+11=1$

24.

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=3+1=4$

25.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=0$

따라서

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$

$=-2+0=-2$

26.

함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$

이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$

$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$

$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$

이므로

$a^2=(-2a+6)^2$에서

$3(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

27.

$\lim_{x\to -1-} f(x)=2,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

28.

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+a}{x+1}=b$에서

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$

$\lim_{x\to -1}(x^2+4x+a)=0$이므로 $1-4+a=0,$

$a=3$

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \lim_{x \to -1} (x+3) = 2 = b$

따라서 $a+b=5$

29.

$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} (x^2-5x-a) = 1+5-a = 6-a = f(-1)$

$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} (2x+a) = -2+a$

$6-a = -2+a, \ \therefore \ a=4$

30. 함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} (x^2+ax+b)f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2+ax+b)f(x)$

그래프에서 $\lim_{x \to 1-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=3$이므로

$\lim_{x \to 1-} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b)\times 1 = 1+a+b,$

$\lim_{x \to 1+} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b)\times 3 = 3(1+a+b)$

에서 $1+a+b=3(1+a+b)$

따라서 $a+b=-1$

31. 주어진 그래프에서 $\lim_{x \to -1-} f(x)=3$, $\lim_{x \to 2} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

32.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$x \neq 1$일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 연속이므로

함수 $h(x)$도 연속이다.

그러므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \to 1-} h(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하므로

$2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$

$\lim_{x \to 1-} h(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{2x^3+ax-a-2}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} (2x^2+2x+a+2) = a+6$

$\lim_{x \to 1+} h(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{2x+1} = 0$

$\lim_{x \to 1+} h(x) = \lim_{x \to 1-} h(x) = h(1)$이므로

$a+6=0$, 즉 $a=-6$

$b=-a-2$에서 $b=4$

따라서 $b-a=10$

33.

$x \neq 1$일 때 $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x-2) = -1$

34.

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x \to 1-} g(x)=-1$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) \times \lim_{x \to 1-} g(x) = 0\times(-1) = 0$

(거짓)

ㄴ. $f(1)=0$, $g(1)=-1$이므로 $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$

(참)

ㄷ. $\lim_{x \to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1+} g(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) \times \lim_{x \to 1+} g(x) = 1\times 1 = 1$

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=0$에서

$\lim_{x \to 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)g(x)$이므로

극한값 $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

35.

$\lim_{x \to 0} (x^2+x+3) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 3 = 3$

36.

$f(-1) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 1+3=4$

37.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$a+3=5$, $a=2$

38.

$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-6x}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} 3x = 6$

39.

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 3-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 3-} f(x) = -1$

40.

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} (-2x+1) = \lim_{x \to 1+} (x^2-ax+4) = f(1)$

$-1=5-a$

따라서 $a=6$

41.

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 0+(-1) = -1$

42.

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로 $\overline{OH}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PH}^2$

$P(t, \sqrt{t})$이므로 $\overline{OP}^2 = t^2+t$

선분 PH의 길이는 점 P와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\overline{PH} = \frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$

$\overline{OH}^2 = t^2+t-\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5} = \frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$

따라서 $\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{4+\frac{4\sqrt{t}}{t}+\frac{1}{t}}{5+\frac{5}{t}} = \frac{4}{5}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

43.

$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=4$, $\lim_{x\to 0-}(x-1)=-1$ 에서

$$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} f(x)-\frac{\lim_{x\to 0-} f(x)}{\lim_{x\to 0-}(x-1)}$$

$$=2-\left(\frac{4}{-1}\right)=6$$

44.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2,2)$에서 연속이 므로 함수 $h(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

그러므로 이차함수 $g(x)$는 $g(-1)=0$, $g(1)=0$을 만족해야한다.

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$

따라서 $g(5)=5^2-1=24$

45. ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기가 1이고 y절편은 $g(t)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$ 즉, $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$ … ㉠

한편 $A(\alpha,\ \alpha+g(t))$, $B(\beta,\ \beta+g(t))$이므로

$\overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha-\beta)^2$이고

㉠에서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4g(t)$이므로

$\overline{AB}^2=2+8g(t)$에서 $4t^2=2+8g(t)$

$$g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2}=\frac{1}{2}$

46. 정답 ③

[해설]

곡선 $y=x^2$ 위의 점 P의 좌표를 (α,α^2)로 놓으면, 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선의 기울기가 직선 $y=2tx-1$의 기울기와 같아야 하므로 $y'=2x$에서

$2\alpha=2t$ $\quad\therefore\ \alpha=t$

원점과 점 $P(t,t^2)$를 지나는 직선 OP는 $y=tx$

이 직선과 직선 $y=2tx-1$의 교점 Q의 좌표를 구하면

$tx=2tx-1$에서 $x=\frac{1}{t}$ 이므로 $\quad Q\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$

$$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(t^2-1)^2}$$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{PQ}}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(t^2-1)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{(t^2-1)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to 1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$

$=2\sqrt{2}$

47. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

α, β는 이차방정식 $x^2-tx-1=tx+t+1$,

즉 $x^2-2tx-2-t=0$의 두 실근이므로

$\alpha=t-\sqrt{t^2+t+2}$, $\beta=t+\sqrt{t^2+t+2}$

$\beta-\alpha=2\sqrt{t^2+t+2}$ 이고

직선 AB의 기울기가 t이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{t^2+t+2}\sqrt{t^2+1}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{(t^2+t+2)(t^2+1)}}{t^2}$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=2$$

48.

점 $A(\alpha,\ \alpha^2)$이라 할 때,

$x^2=x+t$, $x^2-x-t=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\overline{AH}=\alpha-\beta$, $y=x^2$은 y축 대칭이므로 $C(-\alpha,\ \alpha^2)$이므로 $\overline{CH}=\beta+\alpha$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\alpha-\beta-(\alpha+\beta)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-2\beta}{t}$$

$x^2-x-t=0$의 작은 실근을 구해보면, $\beta=1-\sqrt{1+4t}$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{-2+2\sqrt{1+4t}}{2t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

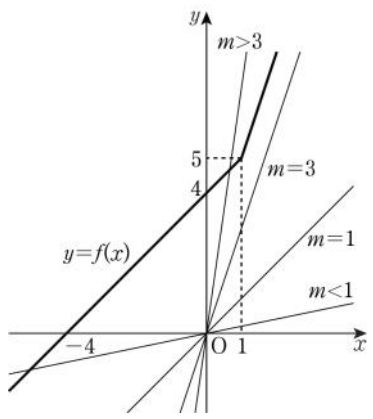
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}=2$$

49.

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로

직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ 3x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=1$일 때

$\lim_{x\to 1-} g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to 1+} g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} g(x)h(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ii) $x=3$일 때

$\lim_{x\to 3-} g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to 3+} g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\lim_{x\to 3} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to 3-} g(x)h(x) = \lim_{x\to 3+} g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times 2=8$

50.

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}$$

$$= 2$$

51.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서

(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$

$\lim_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$$

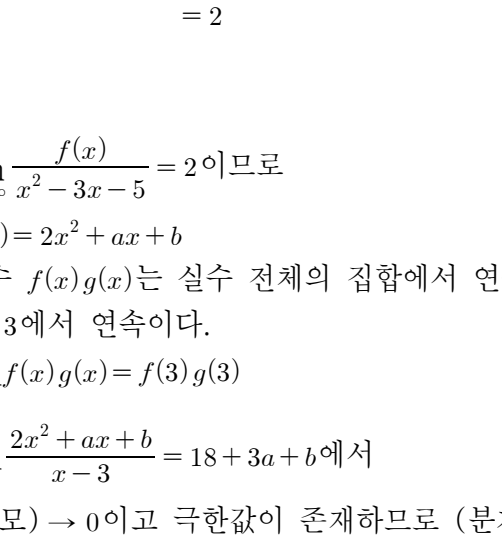
$$= \lim_{x\to 3}(2x+a+6)=0$$

이므로 $a=-12$, $b=18$

$f(x)=2x^2-12x+18$

따라서 $f(1)=8$

52.



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{OP}:\overline{OA}$이므로 넓이의 비는 $\overline{OP}^2:\overline{OA}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\dfrac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\dfrac{S(t)}{2}$이므로

$\overline{OP}^2:\overline{OA}^2=\dfrac{S(t)+T(t)}{2}:\dfrac{S(t)}{2}$

$\overline{OA}^2\times\dfrac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{OP}^2\times\dfrac{S(t)}{2}$,

$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}$

$\overline{OA}=2$, $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$이므로

$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$

따라서

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

$$= \lim_{t\to 2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$$

$$= 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

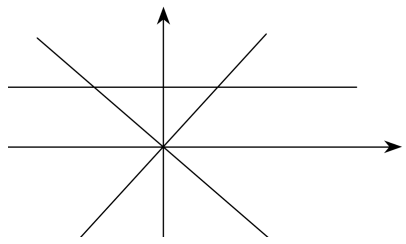
53. 주어진 조건에서 $0\le f(x)\le 1$

$f(x)=t$라 할 때,

$t^3-t^2-x^2t+x^2=t^2(t-1)-x^2(t-1)=(t-1)(t^2-x^2)$,

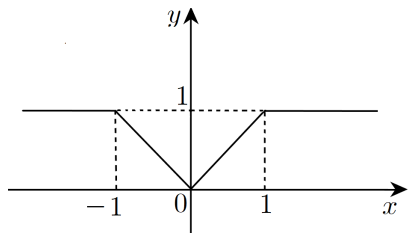
$=(t-x)(t+x)(t-1)=0$, $f(x)=\pm x$ or 1

$y=x$, $y=-x$, $y=1$의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 $y=1$,과 $y=\pm x$가 일정 구간에서 $f(x)$가 되어 최대, 최소는 1, 0을 만족하고, 연속인 함수가 되어야 한다.

그러므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같다.



$\therefore\ f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

54.

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1, 1)$을 지난다. 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+1)+1$, 즉 $y=mx+m+1$

직선 l과 y축이 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 D$(0, m+1)$

직선 l과 선분 AP가 만나는 점을 E라 하자.

직선 AP의 방정식이 $y=-\dfrac{2}{t}x+2$이므로

$mx+m+1=-\dfrac{2}{t}x+2$에서 $x=\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$

그러므로 점 E의 x좌표는 $\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$이다.

삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 AOP의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\frac{1}{2}\times(1-m)\times\frac{(1-m)t}{mt+2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times t\right)$

$t\neq0$ 이므로 $(1-m)^2=mt+2$

$m^2-(2+t)m-1=0$

$m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\times(-1)}}{2}$

$=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

직선 l의 y절편이 $m+1$이고 $0<m+1<2$이므로

$f(t)=m+1=\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

$=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

--

55.

최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2,0)$, $P(t,t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+2)(x-t+1)$

그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(0,2-2t)$

$\overline{AP}=\sqrt{\{t-(-2)\}^2+(t+2-0)^2}=|t+2|\sqrt{2}$,

$\overline{AQ}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{(2-2t)-0\}^2}=2\sqrt{t^2-2t+2}$

$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ})=\lim_{t\to\infty}(2|t+2|-2\sqrt{t^2-2t+2})$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{|t+2|^2-(t^2-2t+2)}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6t+2}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{2}{t}}{\left|1+\frac{2}{t}\right|+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$

$=2\times\frac{6+0}{1+1}$

$=6$

56.

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$이므로

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 실수)

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=6$이고 $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$

$f(2)=12+2a+b=0$, $b=-2a-12$

$f(x)=3x^2+ax+(-2a-12)$

$=(x-2)(3x+6+a)$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+6+a)}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{6+6+a}{3}=6$

$a=6$, $b=-24$

$f(x)=3x^2+6x-24$, $f(0)=-24$

57.

두 점 $A(\sqrt{2},0)$, $B(0,\sqrt{2})$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l의 방정식은

$x+y-\sqrt{2}=0$이고

원의 중심 O와 직선 l 사이의 거리는 1이다.

$\overline{AB}=2$이므로 원 위의 한 점 P와 직선 l 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 ABP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times h=h$

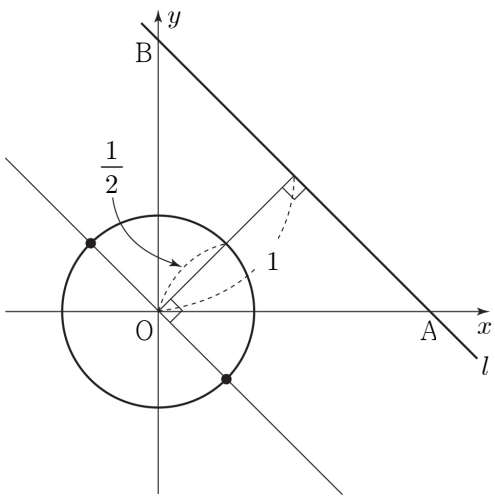
따라서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 h가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수와 같다.

ㄱ. $t=\frac{1}{2}$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우뿐이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ (참)



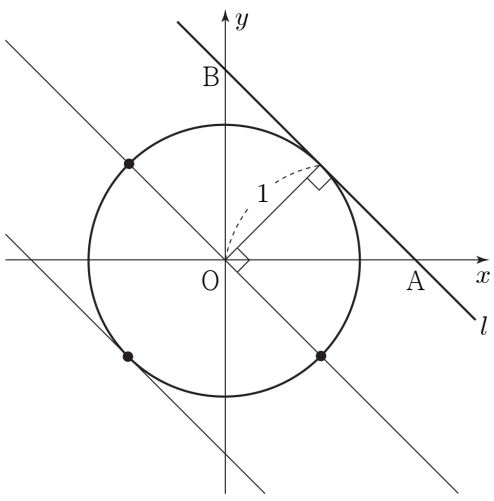
ㄴ. $t=1$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 1이므로

$f(1)=3$



$1<t<2$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

$\lim_{t\to1+}f(t)=4$

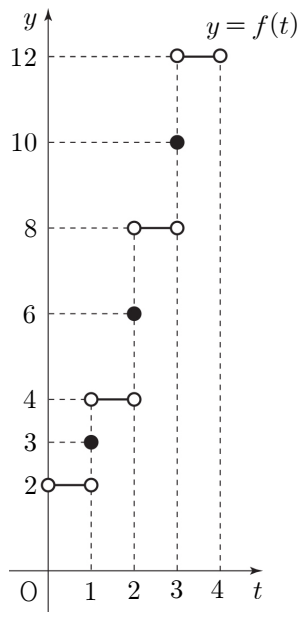
$\lim_{t\to1+}f(t)\neq f(1)$ (참)

ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로 구간 $(0,4)$에서 함수 $f(t)$를 구하면

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 4 & (1<t<2) \\ 6 & (t=2) \\ 8 & (2<t<3) \\ 10 & (t=3) \\ 12 & (3<t<4) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 1, 2, 3이므로 a의 개수는 3이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

58.

$$f(1)=-3+a=\lim_{x\to 1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=4$$

따라서 $a=7$이고 $b=-1$이므로 $a+b=6$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 05 다항함수의 미분법

해 설

1. ④
[출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.
$f'(x)=6x^2-2x$이므로 $f'(1)=6-2=4$

2. 정답 ④
[해설]
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $f'(3)=4$

3. [정답] ⑤
[해설]
$f'(x)=3x^2-7$이므로
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=5$$

4. 정답 ③
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)$이고 $f'(x)=4x-1$, $\therefore f'(1)=3$

5. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.
$f'(x)=6x^2+3$이므로
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\times 2$$
$=2f'(0)=2\times 3=6$

6. 정답 ④
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2),\ f'(x)=6x^2-10x$$
$\therefore f'(2)=24-20=4$

7.
$f'(x)=3x^2+4x+3$이므로
$f'(-1)=3-4+3=2$

8.
$f'(x)=3x^2+7$에서 $f'(1)=10$

9. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$, $f'(x)=4x$, $\therefore f'(2)=8$

10.
$f(x)=\int(3x^2-2x)dx$
$=x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)
$f(1)=1^3-1^2+C=1$에서
$C=1$
따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로
$f(2)=2^3-2^2+1=5$

11.
$f'(x)=6x^2+4$, $\therefore f(1)=6+4=10$

12. $f'(x)=3x^2+6x+1$, $f'(1)=3+6+1=10$

13.
$f(x)=x^3+9$에서
$f'(x)=3x^2$
이므로
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=3\times 2^2=12$$

14. 18
[출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.
시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
$$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt,\ x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$$
두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t>0$에서 방정식 $x_1(t)=x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
$x_1(t)-x_2(t)=t(2t^2-12t+k)=0$에서 $k>0$이고 $t>0$이므로 이차방정식 $2t^2-12t+k=0$은 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D(-12)^2-4\times 2\times k=0$
따라서 $k=18$

15. 11
[출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 상수의 값을 구한다.
직선 $y=4x+5$와 곡선 $y=2x^4-4x+k$가 점 P$(a,\ b)$에서 접한다고 하자.
$f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$
곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(a)=8a^3-4=4$, $a^3=1$ 즉, $a=1$
점 P는 직선 $y=4x+5$ 위의 점이므로 $b=4\times 1+5=9$
이때 $f(1)=2-4+k=k-2=9$
따라서 $k=11$

16. [정답] ①
[출제의도] 함수의 극대와 극소 이해하기
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	$a-4$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $a-4$를 갖는다.
따라서 $a-4=2$, $a=6$

17. [정답] ⑤
[출제의도] 평균변화율과 미분계수 이해하기
평균변화율 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$에서
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+2h+3)=3$$

18. [정답] ①
[출제의도] 곱의 미분법 이해하기
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의
접선의 방정식이 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$이므로
$f'(0)=3$, $f(0)=-1$
$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$
따라서 $g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times 3=5$

19. [정답] 6
[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기
점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하면
$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12=6(t-1)^2(t-2)$
$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$
함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

꿈을 현실로!
희망 부산교육

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$v(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$		↘	$-\frac{7}{2}$	↘	-4	↗

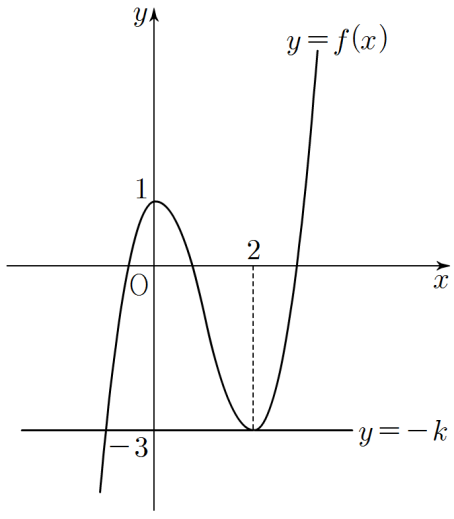
점 P는 $0<t<2$에서 운동 방향이 음의 방향이고
$t>2$에서 운동 방향이 양의 방향이므로
점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.
점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면
$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$
따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간
점 P의 가속도는
$a(2)=18\times2^2-48\times2+30=6$

20. 정답 ①
[해설]
함수 $g(x)=(x^3+1)f(x)$를 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$
이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로
$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=12$

21. 정답 ③
[해설]
두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2이므로 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$에서
$x^3-3x^2+1=-k$
이때 $f(x)=x^3-3x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고 양수 k에 대하여 직선 $y=-k$와 서로 다른 두 점에서 만나려면
$-k=-3$ $\therefore$ $k=3$



22. 정답 6
[해설]
함수 $f(x)=ax^3+bx+a$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로
$f(1)=-2$, $f'(1)=0$
$f(1)=a+b+a=2a+b=-2$ …… ㉠
$f'(x)=3ax^2+b$에서 $f'(1)=3a+b=0$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=-6$
$\therefore$ $f(x)=2x^3-6x+2$, $f'(x)=6x^2-6$
$f'(x)=6x^2-6=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로
$f(-1)=-2+6+2=6$

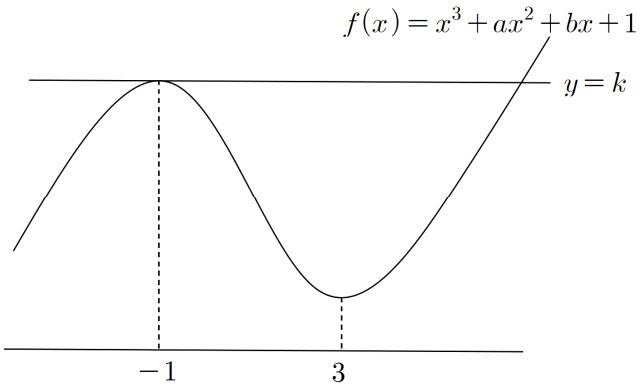
23. [정답] ②
[해설]
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+a)=a+3$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x^3+bx+1)=b+3$
$f(1)=a+3$
$a+3=b+3$, $a=b$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{3x+a-(a+3)}{x-1}=3$
$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(2x^3+ax+1)-(a+3)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$
$=a+6$
$3=a+6$, $a=-3$, $b=-3$
따라서 $a+b=-6$

24. [정답] ①
[해설]
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=0$
$f'(x)=3x^2+2ax-9$에서
$f'(1)=3+2a-9=0$이므로 $a=3$
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$
함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 $f(-3)=-27+27+27+4=31$

25. [정답] 22
[해설]
$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.
$f'(x)=3x^2$이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(-2,-18)$에서의
접선의 기울기는 $f'(-2)=12$
접선의 방정식은
$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$
점 Q의 좌표를 (α,α^3+k)라 하자. (단, α는 상수)
$g'(x)=3x^2$이므로
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 Q(α,α^3+k)에서의
접선의 기울기는 $g'(\alpha)=3\alpha^2$
접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,
$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$
두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$
$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$
$k>0$이므로 $k=22$

26. 정답 ③
$f(x)$의 극댓값을 k라 할 때,

꿈을 현실로!
희망 부산교육



그래프의 모양에 따라 $f(x)=(x+1)^2(x-a)+k$
삼차함수의 비율관계에 따라 -1과 a의 $2:1$ 내분점이 3
$a=5,\ \therefore\ f(x)=(x+1)^2(x-5)+k$
주어진 삼차식의 상수항이 1이므로 $-5+k=1,\ k=6$
$\therefore$ 극댓값 $f(-1)=6$

27. **정답** 5
$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$
$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)=4a+12=32,\ a=5$

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.
$f(x)\le g(x)$에서 $g(x)-f(x)\ge 0$
즉 $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a\ge 0$
$h(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$라 하면 $h(x)\ge 0$
$h'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x-1)(x+2)$
$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-\frac{32}{3}$	↗	a	↘	$a-\frac{5}{3}$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-\frac{32}{3}$를 갖는다.
$a-\frac{32}{3}\ge 0$에서 $a\ge\frac{32}{3}$
따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

29. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구한다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,2)$에서의
접선의 기울기가 4이므로 $f(3)=2,\ f'(3)=4$
$g(x)=(x+2)f(x)$에서
$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$이므로
$g'(3)=f(3)+5f'(3)=2+5\times 4=22$

30. **정답** ⑤
$f'(x)=x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$이므로 $x=-2$에서 극대, $x=6$에서 극소, $\therefore\ \beta-\alpha=6-(-2)=8$

31. **정답** 8
$f'(x)=x^2+3+2x(x+1),\ \therefore\ f'(1)=1+3+2\times 2=8$

32.
$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.
한편 $f'(x)=4x-3$이므로
$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$
$=2f'(a)$
$=2f'(2)=10$

33.
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$
$=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=2$에서 극소, $x=0$에서 극대이다.
이때 $f(-1)=-5+k,\ f(2)=-32+k$이므로
$f(-1)>f(2)$
모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면
$f(2)=-32+k\ge 0$ 즉, $k\ge 32$이어야 한다.
따라서 실수 k의 최솟값은 32이다.

34.
$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로
$\lim_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$
$f(x),\ g(x)$가 모두 다항함수이므로 $f(3)=g(3)$이고
$f(3)=2$이므로 $g(3)=2$
$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$
$=f'(3)-g'(3)=1$
$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$
$g(x)=x^2+ax+b$($a,\ b$는 상수)라 하면
$g'(x)=2x+a$
$g(3)=9+3a+b=2,\ g'(3)=6+a=0$
에서 $a=-6,\ b=11$
따라서 $g(1)=1-6+11=6$

35.
곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
$S=\int_0^2|-x^2+4x-4|dx$
$=\int_0^2(x^2-4x+4)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{3}$
따라서 $12S=32$

36.
$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$
$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$
$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$
$f(x)=\int(3x-6)dx$
$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)
$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$
따라서 $f(2)=6-12+15=9$

37.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-11$	↗	$a+16$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^4-4x^3+16x+a\geq 0$이 항상 성립하기 위해서는
$a-11\geq 0,\ a\geq 11$
따라서 a의 최솟값은 11

38.
$f(x)=\int(8x^3+6x^2)dx$
$=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)
이므로
$f(0)=C=-1$
따라서
$f(x)=2x^4+2x^3-1$
그러므로
$f(-2)=32-16-1=15$

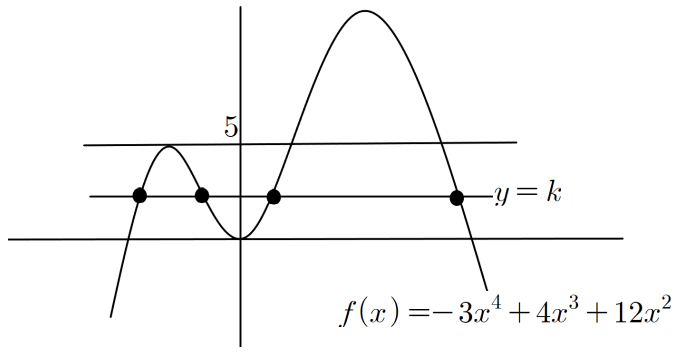
39.
$f(x)=x^4+ax^2+b$에서
$f'(x)=4x^3+2ax$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=4+2a=0$
에서
$a=-2$
그러므로
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$
이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로
$f(0)=b=4$
따라서 $a+b=(-2)+4=2$

40.
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,5]$에서 연속이
고 열린구간 $(1,5)$에서 미분가능하므로
평균값의 정리에 의하여
$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\cdots$㉠
를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,5)$에 적어도 하나 존재한다.
이때, 조건 (나)에 의하여
$f'(c)\geq 5$
이므로 ㉠에서
$\frac{f(5)-3}{4}\geq 5$
$f(5)\geq 23$
따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

41.
$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=5$

42.
$y'=3x^2-4$에 $x=1$을 대입하면, -1
접선 방정식은 $y=-(x-1)+2=-x+3$이 $y=x^4+3x+a$에 접하므로 $f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$
$\begin{cases}4\alpha^3+3=-1\\-\alpha+3=\alpha^4+3\alpha+a\end{cases}$, , $\alpha=-1$이므로 $1+3=1-3+a,\ a=6$

43.
$y=f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$과 $y=k$의 교점 개수가 실근의 개수
$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x^2-x-2)$
$=-12x(x+1)(x-2)$
$f(0)=0,\ f(-1)=5,\ f(2)=-48+32+48=32$
얻어진 극점으로 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



$\therefore\ 0<k<5$이므로 4개

44.
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2),\ x=0$에서 극댓값을 가지므로
$f(0)=k=9$, 극솟값은 $x=2$에서 가지므로 $f(2)=8-12+9=5$

45.
$f'(x)=3x^2-4x+2,\ f'(1)=1$이므로 접선은 $y=x+n$
$\overline{PQ}=n\sqrt{2}=6,\ \therefore\ n=3\sqrt{2}$
$y=x+3\sqrt{2}$는 점$(1,\ f(1))$을 지나므로 접점은 $(1,\ 3\sqrt{2}+1)$
$1-2+2+a=3\sqrt{2}+1,\ \therefore\ a=3\sqrt{2}$

46.
$f'(x)=3x^2-6x+a$에서 $f'(3)=0$이므로 $27-18+a=0,\ a=-9$
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이므로 극댓값은 $f(-1)$
$f(-1)=-1-3-a+10=6-a=6+9=15$

47.
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로 $g'(2)=4f(2)+4f'(2)=4+12=16$

48.
$f'(x)=6x^2-18x+a,\ f'(1)=0$이므로 $f'(1)=6-18+a=0,\ a=12$
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),\ x=2$에서 극소 $x=b=2$
$\therefore\ a+b=12+2=14$

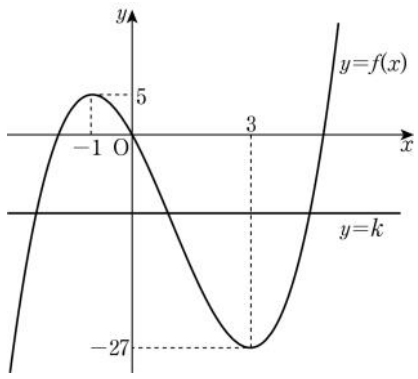
49.
접점을 $(t,\ t^3-t+2)$라 할 때,
접선 방정식은 $y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$ 간단히 하면
$y=(3t^2-1)x-2t^3+2$ 점 $(0,\ 4)$을 대입하면 $4=-2t^3+2,\ t^3=-1$
$\therefore\ t=-1$, 접선은 $y=2x+4$, 접선의 x절편은 -2

50.
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



직선 $y=k$는 x축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$
그러므로 정수 k의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$
따라서 $M-m=4-(-26)=30$

51.
곱의 미분법에 의해 함수 $f(x)g(x)$의 도함수는
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f'(x)=4x+5$, $g'(x)=3x^2$이므로
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\times2+3\times0=10$

52.
$f'(x)=2x+4$에서
$f(x)=\int(2x+4)dx$
$=x^2+4x+C$ (C는 적분상수)
$f(-1)+f(1)=0$에서
$(-3+C)+(5+C)=2C+2=0$
$C=-1$이므로 $f(x)=x^2+4x-1$
따라서 $f(2)=11$

53.
함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은
$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(64-12)-(1-3)}{3}=18$
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 기울기는 $f'(k)=3k^2-3$이므로
$3k^2-3=18$, $k^2=7$
$k>0$이므로 $k=\sqrt{7}$

54.
$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$
$f'(1)=2+a=4$에서 $a=2$

55.
다항함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로
$f(3)=2$, $f'(3)=0$
$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로
$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=8$

56.
$g(x)=(x^2+3)f(x)$에서
$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$
따라서
$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$
$=2\times2+4\times1$
$=8$

57.
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
따라서 $a=1$

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$
이므로
$a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

58.
$f'(x)=2x-a$
$f'(1)=2-a=0$
따라서 $a=2$

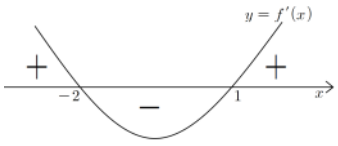
59.
$f(x)=\int(3x^2+6x-4)dx$
$=x^3+3x^2-4x+C$
(단, C는 적분상수이다.)
$f(1)=1+3-4+C=5$, $C=5$
$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$
따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

60.
$f'(x)=3x^2+a$
x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같으므로
$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(a)$
$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2}=3a^2+a$
따라서 $3a^2=13$

61.
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서
(분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$
$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$
$=\frac{1}{4}f'(2)=2$
$f'(2)=8$
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$에서
(분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$
$\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

62.
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

꿈을 현실로!
희망 부산교육



$x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=-16+12+24+1=21=M$
$x=1$에서 극솟값 $f(1)=2+3-12+1=-6=m$
$\therefore\ M+m=15$

63.
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0,\ f'(0)=1$
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $f(1)=0,\ f'(1)=1$
$f'(0)=1,\ f'(1)=1$이므로 $f'(x)-1=mx(x-1)$
$f(x)=\int f'(x)dx=m\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)+x+C$
$f(0)=0$이므로 $C=0,\ f(1)=-\frac{1}{6}m+1=0,\ m=6$
$\therefore\ f(2)=6\times\left(\frac{8}{3}-2\right)+2=6$

64.
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(8x^3-12x^2+7)dx=2x^4-4x^3+7x+C$
$f(0)=C=3,\ f(1)=2-4+7+C=C+5=3+5=8$

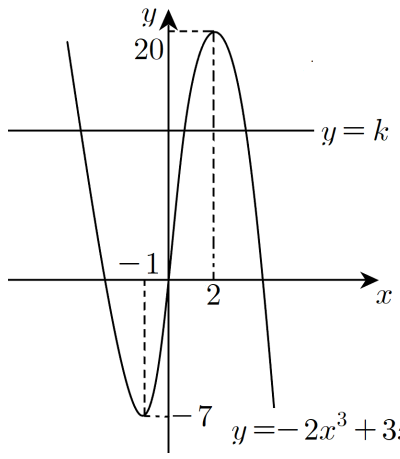
65.
$f(0)=0,\ f(4)=64-96+20=-12$이므로
평균변화율은 $\frac{-12-0}{4-0}=-3,\ f'(a)=3a^2-12a+5$
$3a^2-12a+5=-3,\ 3a^2-12a+8=0$
$f'(4)=48-48+8>0,\ f'(0)>0$이므로 얻어진 방정식의 두 근은 모두 $0<a<4$을 만족한다. 그러므로 두 실근의 곱은 $\frac{8}{3}$
$\therefore\ p+q=11$

66. $f(x)g(x)=\begin{cases}-(x+3)(2x+a) & (x<-3)\\ (x+3)(2x+a) & (x\geq -3)\end{cases}$
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$에서 미분가능하다. 즉,
$\lim_{x\to -3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$,
$\lim_{x\to -3-}(-2x-a)=\lim_{x\to -3+}(2x+a)$
따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

67. $f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=8+a=18$에서 $a=10$

68. $0\leq t\leq 3$일 때 $v(t)\geq 0$, $3\leq t\leq 4$일 때 $v(t)\leq 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는
$\int_0^4|v(t)|dt=\int_0^3|v(t)|dt+\int_3^4|v(t)|dt$
$=\int_0^3(12-4t)dt+\int_3^4(4t-12)dt=18+2=20$

69. 주어진 방정식의 실근개수는
$y=-2x^3+3x^2+12x$와 $y=k$의 교점개수와 같다.
$y'=-6x^2+6x+12=-6(x-2)(x+1)$이므로
$x=-1$에서 극솟값 -7, $x=2$에서 극댓값 20을 갖는다.



그래프를 그리면 위의 그림과 같다.
주어진 방정식이 세 실근을 가지기 위해 $-7<k<20$임을 알 수 있다.
$k=-6,\ -5,\ \cdots,\ 19$이므로 26개

70. $f'(x)=3x^2+2ax-a^2+8a$
실수 전체에서 $3x^2+2ax-a^2+8a\geq 0$을 만족해야 하므로
$f'(x)$의 판별식 $D/4=a^2-3(-a^2+8a)\leq 0$
$4a^2-24a=4a(a-6)\leq 0,\ \therefore\ 0\leq a\leq 6$
$\therefore$ a의 최댓값은 6

71.
$f'(x)=(2x+3)'\times(x^2+5)+(2x+3)\times(x^2+5)'$
$=2(x^2+5)+(2x+3)\times 2x$
$=6x^2+6x+10$
$f'(1)=6+6+10=22$

72.
한편, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$에서 $f'(2)=9$
$f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x+a$
그러므로 $f'(2)=3\times 2^2-4\times 2+a=a+4$
따라서 $a+4=9$에서 $a=5$

73.
이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고
함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하므로
$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)
$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로
$f'(x)=2(x-a)$
$g(x)=(x-3)f'(x)=2(x-a)(x-3)$
$=2x^2-2(a+3)x+6a$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로
x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$
따라서 $f(x)=(x+3)^2$에서 $f(0)=3^2=9$

74.
$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$이고 $\lim_{h\to 0}2h=0$이므로
$\lim_{h\to 0}\{f(3+h)-4\}=0,\ f(3)=4$
$\frac{1}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{f'(3)}{2}=1$
$f'(3)=2$
따라서 $f(3)+f'(3)=6$

75.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f'(x)=4x^3+6x+7$이므로
$f'(1)=4+6+7=17$

76.

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대이므로
$f'(3)=0$이다.
$f'(x)=-x^2+4x+m$이므로
$f'(3)=-9+12+m=0$에서
$m=-3$

77.

$f(x)=x^3-6x^2+6$라고 두자.
$f'(x)=3x^2-12x$에서 $f'(1)=3-12=-9$이다.
따라서 접선의 방정식은
$y-1=-9(x-1)$이고 점 $(0,a)$를 지나므로
$a-1=9$에서 $a=10$

78.

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로
$f(-1)=-1+6-9+a=-6$
따라서 $a=-2$

79.

$f(x)=4x^3-5x+9$라 하면
$f'(x)=12x^2-5,\ f'(1)=7$

80.

점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의
속도 v는 $v=6t^2-2kt$
가속도 a는 $a=12t-2k$
$t=1$일 때, $v=6-2k=0$이므로 $k=3$
따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는 $12\times 3-2\times 3=30$

81.

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하므로 $x=1$에서 미분계수가 존재한다.
(i) $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-}(x^3+ax+b)=1+a+b$

$\lim_{x\to 1+}(bx+4)=b+4,\ f(1)=b+4$이므로

$1+a+b=b+4$에서 $a=3$이다.

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재한다.

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+a & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to 1+}f'(x)=3+a,\ \lim_{x\to 1-}f'(x)=b$에서

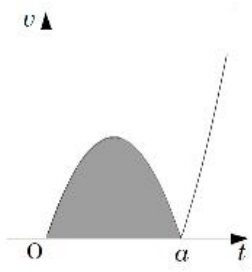
$b=3+a$이고 $a=3$이므로 $b=6$이다.

따라서 $a+b=9$이다.

82.

점 P의 속도 $v(t)=t^2-at$는 시각 t에 대한 이차함수이므로 움직이는 방향이 바뀌는 시각 $t=\alpha$라 하면 $v(\alpha)=0$, $t<\alpha$일 때 $v(t)<0$, $t>\alpha$일 때 $v(t)>0$이다.
$v(t)=t^2-at=t(t-a)=0$에서 $t=0, t=a$이고 $t\neq 0$이므로 $t=a$일 때 방향이 바뀐다.

$0\leq t\leq a$에서 $v(t)\leq 0$이므로 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는 $\int_0^a|t^2-at|dt$이고 다음 그래프의 음영 부분의 넓이와 같다.



$$\int_0^a|t^2-at|dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2\right]_0^a$$
$$=-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$$
$$=\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$$

이므로 $a^3=27$이다.
$\therefore\ a=3$

83.

미분계수의 정의에 의하여
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로 $f'(2)=3$
따라서
$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$
$=f'(2)+f'(2)$
$=2f'(2)$
$=6$

84.

시각 t에서의 속도를 v라 하면
$x=t^3+kt^2+kt$에서 $v=3t^2+2kt+k$
$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서 $v=0$
그러므로 $3+2k+k=0$에서 $k=-1$
시각 t에서의 가속도를 a라 하면
$a=6t+2k=6t-2$
따라서 $t=2$에서 점 P의 가속도는 $6\times 2-2=10$

85.

$f'(x)=4x^3+3$이므로 $f'(2)=35$

86.

$y'=3x^2-6x+2$
점 A에서의 접선의 기울기가 2이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+2$이므로 x절편은 4이다.

87. 729

[출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.
$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재할 때, $\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이다.
$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k-}\left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\frac{x-k}{|x-k|}\right)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \lim_{x\to k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times (-1)$ … ㉠

$\lim_{x\to k+} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} = \lim_{x\to k+} \left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times \frac{x-k}{|x-k|} \right)$

$= \lim_{x\to k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times (1)$ … ㉡

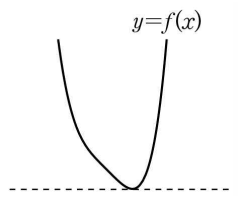
㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim_{x\to k} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} = 0$이거나

$\lim_{x\to k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}$와 $\lim_{x\to k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}$의 절댓값이 같고 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $g'(k)=0$ 즉, $f'(k)=0$이거나 $g(k)=0$ 즉, $f(k)=0$이다.

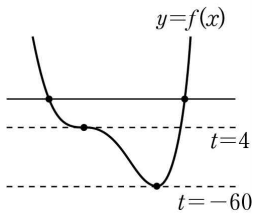
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



함수 $h(t)$가 불연속이 되는 실수 t가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

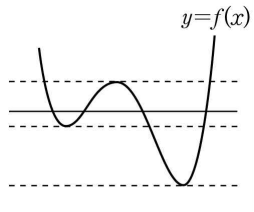
(ii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



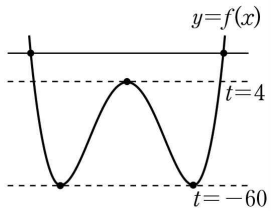
함수 $h(t)$가 $t=-60$과 $t=4$에서 불연속이므로 $f'(\alpha)=0$일 때 $f(\alpha)$의 값은 -60과 4이다.

이때 $\lim_{t\to 4+} h(t)=4$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이면 $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

이때 $h(4)=5$

(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60, 극댓값은 4이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$이므로 방정식 $f(x)=4$의 가장 큰 실근이 2가 된다.

함수 $f(x)$의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$라 하면, $p(0)=0$이고 $p'(0)=0$이므로 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다. 또한 함수 $p(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 양수 a에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$이라 하면

$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$

$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$이므로 $p'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64$이 므 로

$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{a^4}{4}=-64$

즉, $a^4=256=4^4$이므로 $a=4$이다.

이때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$

방정식 $p(x)=0$의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.

따라서

$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$

$f(4)=724$, $h(4)=5$이므로 $f(4)+h(4)=724+5=729$

88. ②

[출제의도] 함수의 극대와 극소를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x가 2개가 되려면

$g(0)=p>0$, $g(2)=p-4<0$ 즉, $0<p<4$

$f(0)=|p|=p$, $f(2)=|p-4|=4-p$

$f(0)=f(2)$이므로 $p=4-p$, 즉, $p=2$

89. [정답] ③

[출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=-t$ 또는 $x=t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	…	$-t$	…	t	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

$t=2$일 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값은 모두

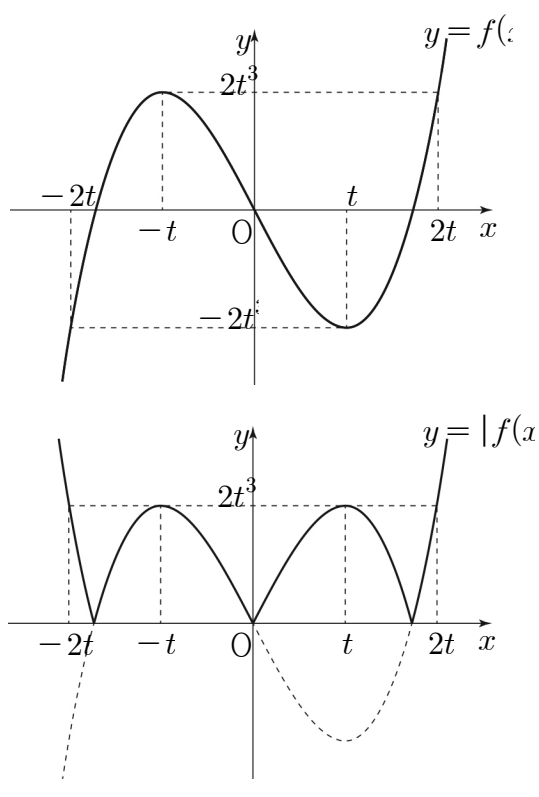
$f(-2)=16$이므로 $M_1(2)=M_2(2)=16$

$g(2)=32$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=2t^3$에서 $(x+t)^2(x-2t)=0$,

방정식 $f(x)=-2t^3$에서 $(x-t)^2(x+2t)=0$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



꿈을 현실로! 희망 부산교육

(ⅰ) $-t<-2,\ 1<t$일 때

$t>2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-2)<f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅱ) $-2t\le -2\le -t,\ 1\le t$일 때

$1\le t\le 2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-t)$

(ⅲ) $-2<-2t,\ t<1\le 2t$일 때

$\frac{1}{2}\le t<1$이고,

$M_1(t)=f(-t),\ M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(-t)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅳ) $-2<-2t,\ 2t<1$일 때

$0<t<\frac{1}{2}$이고,

$M_1(t)=f(1)>f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(1)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $\frac{1}{2}\le t<1$일 때

$g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(2h^2-3h-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

(ⅱ) $0<t<\frac{1}{2}$일 때

$g(t)=f(1)-f(-2)=-9t^2+9$이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}(-9h-9)=-9$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$=-\frac{9}{2}-(-9)=\frac{9}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

90. 정답 380

[해설]

세 점 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$에 대하여 직선 AB, 직선 BC, 직선 CA의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3라 하면, 문제의 조건으로부터 m_1, m_2, m_3중 양수와 음수가 적어도 하나씩은 각각 존재해야 한다.

x_1, x_2, x_3가 모두 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 있을 때, 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$이 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 x의 값을 포함하지 않는다면, m_1, m_2, m_3의 부호가 모두 같게 된다. 반면에 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$이 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 x의 값을 적어도 하나는 포함하면 m_1, m_2, m_3 중 부호가 다른 두 개가 반드시 존재한다.

$f(x)=x^3-2ax^2$에서 $\quad f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4a}{3}\right)$

함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=\frac{4a}{3}$에서 극값을 가지므로

$0\in\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$ 또는 $\frac{4a}{3}\in\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$이다.

$0\in\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$일 때

$k<0<k+\frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2}<k<0$

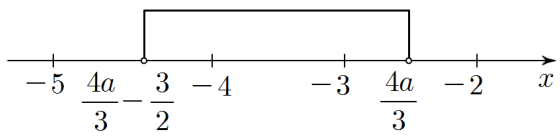
k는 정수이므로 $\quad \therefore\ k=-1$

$\frac{4a}{3}\in\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$일 때

$k<\frac{4a}{3}<k+\frac{3}{2}, \quad \frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<k<\frac{4a}{3}$

조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12이므로 부등식 $\frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<k<\frac{4a}{3}$을 만족하는 정수 k의 값의 곱은 12이다. 곱해서 12가 되는 서로 다른 연속된 정수들은 -4과 -3 또는 3과 4 뿐이다.

(ⅰ) -4와 -3이 k에 대한 부등식 $\frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<k<\frac{4a}{3}$을 만족하는 정수해일 때

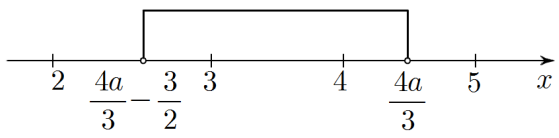


$-5\le\frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<-4,\ -3<\frac{4a}{3}\le -2$이어야 한다.

만족하는 a의 공통범위를 구하면 $\quad -\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

a는 정수이므로 $\quad a=-2$

(ⅱ) 3과 4가 k에 대한 부등식 $\frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<k<\frac{4a}{3}$을 만족하는 정수해일 때



$2\le\frac{4a}{3}-\frac{3}{2}<3,\ 4<\frac{4a}{3}\le 5$이어야 한다.

만족하는 a의 공통범위를 구하면 $\quad 3<a<\frac{27}{8}$

a는 정수이므로 이 경우에는 만족하는 a가 존재하지 않는다.

이상에서 $\quad a=-2,\ f(x)=x^3+4x^2,\ f'(x)=3x^2+8x$

$\therefore\ f'(10)=300+80=380$

91. [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 0-}g(x)g(x-3)=-f(0)\times f(-3)$

$\lim_{x\to 0+}g(x)g(x-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$

(ⅰ) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim_{x\to -3-}g(x)g(x-3)=f(-3)\times f(-6)$

$\lim_{x\to -3+}g(x)g(x-3)=-f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6)=-f(-3)\times f(-6)$이므로

$f(-3)\times f(-6)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\lim_{x\to 3-} g(x)g(x-3)=f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim_{x\to 3+} g(x)g(x-3)=f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0)=f(3)\times f(0)$이므로

$f(3)\times f(0)\neq 0$ …… ㉡

$f(-3)=f(0)$이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(i), (ii)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$이므로

$f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(-3)=f(0)$이므로

$-6(9-3a+b)=-3b,\ b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a)=-1,\ a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\frac{a}{2}\right)=-1,\ a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4)=-a,\ 3\times(-4)=6a-18$에서 $a=1$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1)=-f(-1)=-48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

92. **정답** ③

$(2,\ 3)$에서의 접선은 $(1,\ 3)$을 지나므로 $y=3$임을 알 수 있다.

$f'(2)=0,\ f(2)=3$이므로 $f(x)=(x-2)^2(x-k)+3$

$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$가 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=3f'(-2)+f(-2)$

$y=f(x)$에 $x=-2$를 대입하면, $f(-2)=16(-2-k)+3=-16k-29$

$f'(x)=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2$에 $x=-2$를 대입하면,

$f'(-2)=-8(-2-k)+16=8k+32$

$3(8k+32)-16k-29=3,\ 8k+96-29=3,\ 8k=-64,\ k=-8$

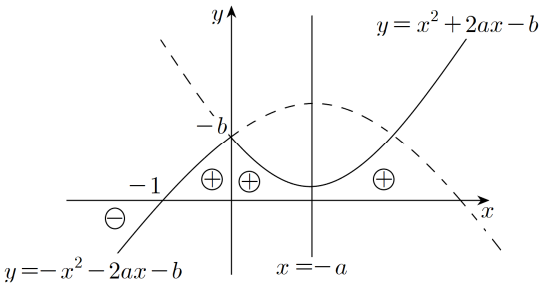
$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+8)+3,\ f(0)=4\times 8+3=35$

93. **정답** ③

$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x\geq 0)\end{cases}$

도함수의 대칭축이 $x=-a$이므로 대칭축의 위치에 따라 도함수를 생각해보면

(i) $-a>0,\ a<0$일 때,



$x>0$에서 $x^2+2ax-b=0$이 실근을 가지면 안 되므로 판별식 $D\leq 0$

점 $(-1,\ 0)$에서 증감이 바뀌어야 하므로 $-1+2a-b=0$

구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이어야 하므로 y절편 $-b>0$

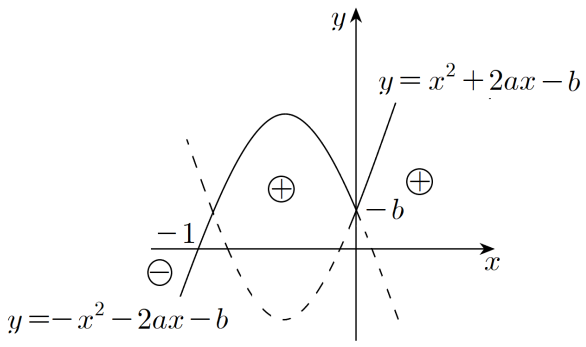
위의 세 가지 조건을 만족해야한다.

$b=2a-1,\ -b=1-2a\geq 0,\ a\leq\frac{1}{2}$

$D/4=a^2+b=a^2+2a-1\leq 0,\ -1-\sqrt{2}\leq 0\leq -1+\sqrt{2}$

얻어진 부등식의 교집합은 $-1-\sqrt{2}\leq 0<0$

(ii) $-a\leq 0,\ a\geq 0$일 때,



점 $(-1,\ 0)$에서 증감이 바뀌어야 하므로 $-1+2a-b=0$

구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이어야 하므로 y절편 $-b>0$

$x\geq 0$일 때, $x^2+2ax-b$는 $-b\geq 0$이면 자동으로 양수

$-b=1-2a\geq 0,\ a\leq\frac{1}{2}$이고 $a\geq 0$이므로 $0\leq a\leq\frac{1}{2}$

두 가지 경우의 합집합이므로 $\therefore\ -1-\sqrt{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=a+2a-1=3a-1,\ -4-3\sqrt{2}\leq a+b\leq\frac{1}{2}$

$\therefore\ M=\frac{1}{2},\ m=-4-3\sqrt{2},\ M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

94. **정답** ④

$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\lim_{x\to 3-}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=g(3)-1$

(i) $f(3)\neq 0$일 때,

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\frac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}=g(3)\neq g(3)-1$

(ii) $f(3)=0$일 때, $g(3)-1=3-1=2$

$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$f(6)\{f(3)+1\}=0,\ f(3)+1=1$이므로 $f(6)=0$

$f(6)=0$이면, $f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x-k+3)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-k+3)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}=2$

$\frac{3(6-k)}{-3(3-k)}=2,\ 18-3k=-18+6k,\ k=4$

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$f(5)\neq 0$이므로 $g(5)=\frac{f(8)\times\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$f(8)=40,\ f(5)=-2$이므로 $g(5)=\frac{40\times(-1)}{-2}=20$

95. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=x^3-12x+k$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

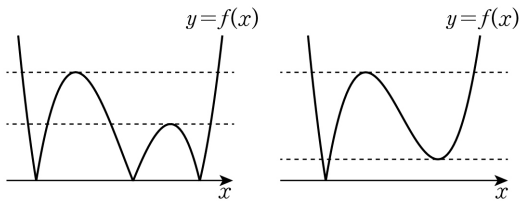
$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 $k+16$, $x=2$에서 극솟값 $k-16$을 가지므로 k의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

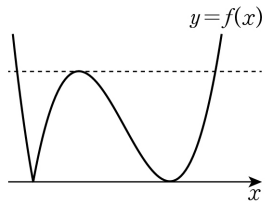
(i) $0<k<16$ 또는 $k>16$인 경우

꿈을 현실로! 희망 부산교육



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $k=16$인 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 오직 하나이다.

(ⅰ), (ii)에서 $k=16$

96. [출제의도] 접선을 활용하여 함수를 추론한다.

$0<x\le 4$에서 $g(x)=x(x-4)^2$이고

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4+} g(x)=\lim_{x\to 4-} g(x),\ \lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} x(x-4)^2$

$f(4)=0$

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

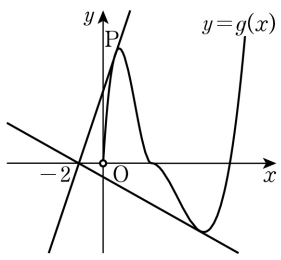
$\lim_{x\to 4+}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$

$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{x(x-4)^2}{x-4}$

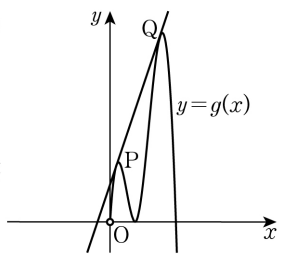
$f'(4)=0$

$f(4)=f'(4)=0$이고 $g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0$이므로

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$ $(a\neq 0)$이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$a>0$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $a<0$이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 존재한다.

조건 (나)에 의하여 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y=g(x)$에 접한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s라 하고

$0<t<4$, $s>4$라 하자.

$0<t<4$에서 $g'(t)=3t^2-16t+16$이므로

접선의 방정식은

$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$

이다. 접선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t=0$

$2t^3-2t^2-32t+32=0,\ (t-4)(t+4)(t-1)=0$

$0<t<4$에서 $t=1$이므로 접선의 방정식은

$y=3x+6$이다. 이 접선이 점 Q에서 곡선 $y=f(x)$ $(x>4)$에 접한다.

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$에서

$f'(x)=2a(3x^2-37x+100)=2a(x-4)(3x-25)$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$

이 접선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)+a(s-4)^2(2s-21)$

$a\neq 0$, $s>4$이므로

$(s-4)(2s-21)=2(s+2)(3s-25)$

$4s^2-9s-184=0,\ (4s+23)(s-8)=0,\ s=8$

$f'(8)=3$이므로 $a=-\frac{3}{8}$

$f(x)=-\frac{3}{8}(x-4)^2(2x-21)$이므로

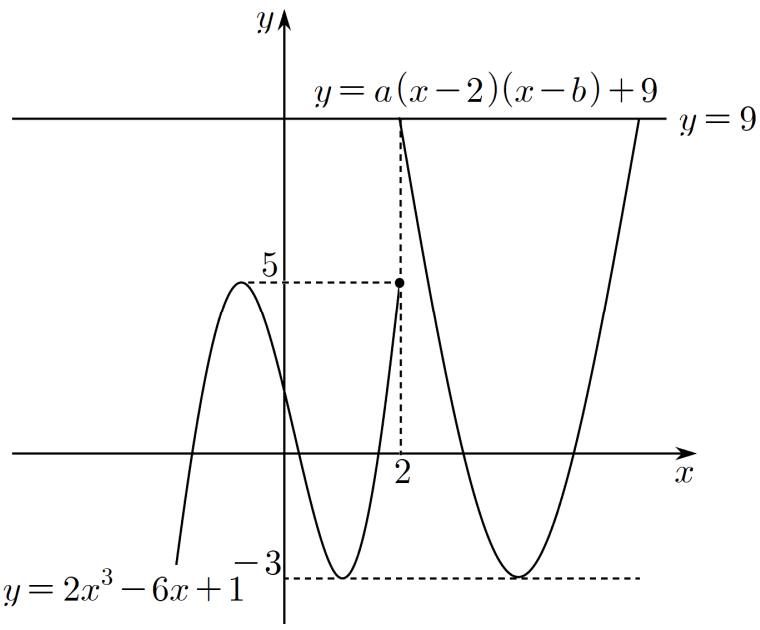
$g(10)=f(10)=\frac{27}{2}$

따라서 $p=2$, $q=27$이므로 $p+q=29$

97. 정답 ①

$y=2x^3-6x+1$, $y'=6x^2-6$이므로 극점은 $(1,\ -3)$, $(-1,\ 5)$

조건에 맞는 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



그래프에서 $k=-3$일 때, $g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$을 만족한다.

$f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3,\ a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)+9=a\times\frac{b-2}{2}\times\frac{-b+2}{2}+9$

$\frac{-a(b-2)^2}{4}+9=-3,\ a(b-2)^2=48$

$a=48$, $b=3$일 때, $a+b$가 최대이므로 $a+b\le 51$

98. 정답 25

$f'(x)=-3x^2+2ax+2,\ f'(0)=2$

O$(0,\ 0)$에서의 접선은 $y=2x$,

$-x^3+ax^2+2x=2x,\ x^3-ax^2=x^2(x-a)=0,\ \mathrm{A}(a,\ 2a)$

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 직선 OA와 점 A에서의 접선은 수직,

직선 OA의 기울기는 $\frac{2a}{a}=2$이므로 A에서의 접선 기울기는 $-\frac{1}{2}$

$f'(a)=-3a^2+2a^2+2=-a^2+2=-\frac{1}{2},$

$2(-a^2+2)=-1,\ 2a^2=5,\ a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

점A에서의 접선은 $y=(-a^2+2)(x-a)+2a,\ y=(-a^2+2)x+a^3$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\sqrt{10}$, $B\left(\frac{5}{2}\sqrt{10},\ 0\right)$, $A\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

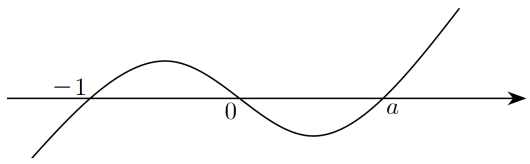
$\overline{OA}=\sqrt{\frac{10}{4}+10}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{40+10}=5\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{OA}\times\overline{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

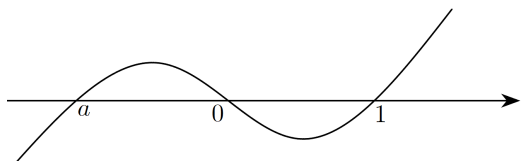
99. **정답** 483

$f(k-1)f(k+1)<0$을 만족하기 위해 $f(x)=0$을 만족하는 x절편 중 2개가 정수일 때, $f(k-1)f(k+1)=0$을 만족하기 때문에 $f(k-1)=0$, $f(k)=0$ 또는 $f(k)=0$ 또는 $f(k+1)=0$을 만족할 때, $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족하는 k값이 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$을 만족할 때,



또는



(ⅰ) $f(x)=x(x+1)(x-a)=x^3-(a-1)x^2-ax$라 할 때,

$f'(x)=3x^2-2(a-1)x-a$에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}(a-1)-a=-\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8}-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}a$, $a=-\frac{3}{4}$

주어진 그래프를 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(x)=x(x-1)(x-a)=x^3-(a+1)x^2+ax$

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+a$,

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}(a+1)+a=-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}a=-\frac{15}{16}$,

$a=-\frac{15}{16}\times\frac{2}{3}=-\frac{5}{8}$

주어진 조건을 만족하므로 $f(x)=x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$

$f(8)=8\times7\times\frac{69}{8}=483$

100.

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k-1$이다.

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\geq k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

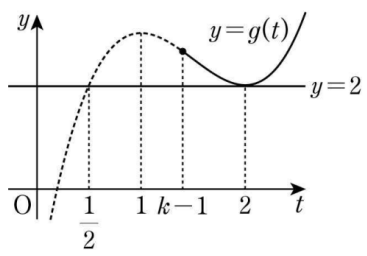
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

$g(t)=2$에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $(2t-1)(t-2)^2=0$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2}\leq k-1\leq2$, 즉 $\frac{3}{2}\leq k\leq3$이므로 조건을 만 족시키는 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

101.

함수 $f(x)$는 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고, $\lim_{x\to2-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서 $\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1)$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0$, $g(a)=0$

또, $\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}$, $\frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$이므로 $g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}$

$=\frac{1-a}{2}$

$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}$

$=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$

$h(1)=h(a)$이므로

$\frac{1-a}{2}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\frac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\leq2)\\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$

이므로

$h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$

102.

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면

$h_1'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

$h_1(0)=4>0$이므로 방정식 $h_1(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0$, $x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$에 직선 $y=kx$가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$이라 하면 $h_2'(x)=3x^2-4x$에서 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$, $a=2$

따라서 구하는 k의 값은 $h_2'(2)=4$뿐이다. (참)

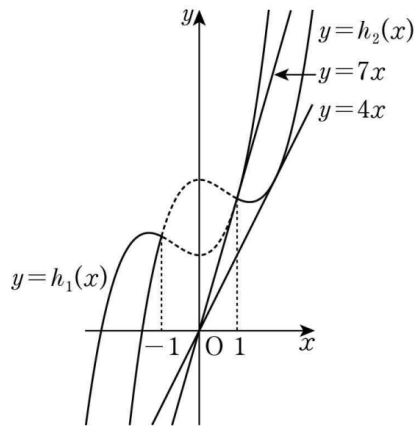
ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$에서 $2x^2-2\geq0$이므로 x의 값의 범위는 $x\leq-1$ 또는 $x\geq1$이고, 주어진 방정식은

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$, 즉 $x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$, $h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$일 때 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$일 때 직선 $y=kx$와 곡선 $y=h_2(x)$가 접하므로 $k\le 4$일 때 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$일 때, $x\le -1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$이고 접점의 좌표는 $(1, 7)$이므로

$k>4$일 때, $x\ge 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

즉, $k>4$일 때, $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

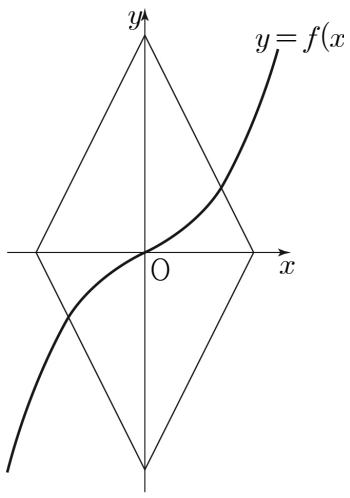
따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

103.

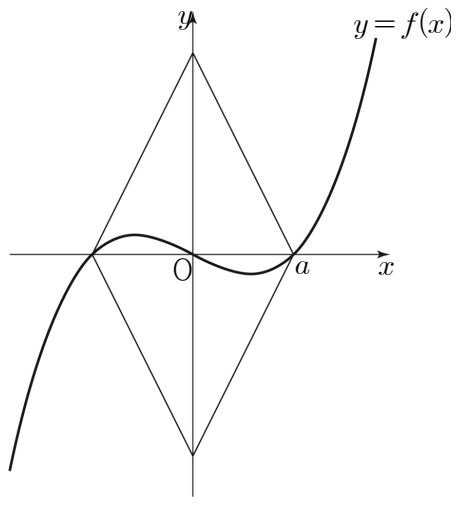
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로
곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는
1 또는 3이다.

(i) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우
모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로
함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ii) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우
$f(x)=x(x-a)(x+a)\,(a>0)$이라 하자.
두 점 $(t, 0)$, $(0, -2t)$를 지나는
직선의 기울기는 t의 값에 관계없이 2이므로
$f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서
불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

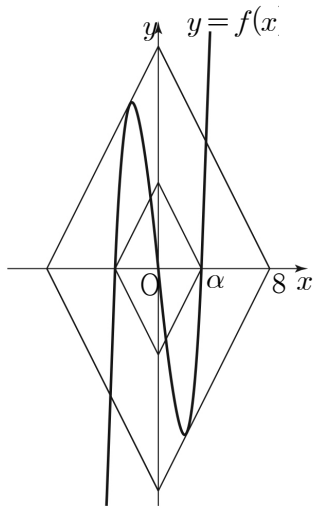
(a) $f'(a)\le 2$일 때
모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로
함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(b) $f'(a)>2$일 때
곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각 β, $-\beta\,(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

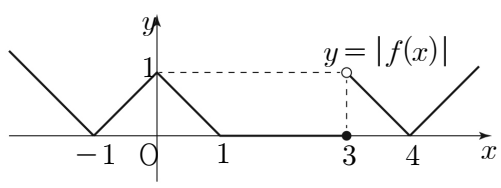
함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로
$a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로
두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은
곡선 $y=f(x)$에 접한다.
직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는
점의 x좌표를 $p\,(0<p<\alpha)$라 하면
$p^3-\alpha^2p=2p-16$ … ㉠
$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$
에서 $\alpha^2=3p^2-2$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$
에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$
따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times 4)=240$

104.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로
함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-} f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기

위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서

연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이

되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}$$

$$=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}$$

$$=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서

미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서

미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}$$

$$=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서

미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의

합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

105.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부

등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서

함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1$

$=(3x+1)(x-1)$

이므로 $h'(x)=0$ 에서

$$x=-\frac{1}{3}\ \text{또는}\ x=1$$

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를

표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을

만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a\leq 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

106.

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)\cdots$㉠

이 성립한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0)$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$3f(0)=af(-b)\cdots$㉡

한편,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$\cdots$㉢

이때 $t\neq -3$이고 $t\neq 6$인 모든 실수 t에

대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$(k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left|(x+3)^2(x+k)\right|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}\cdots$$㉣

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식

$g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

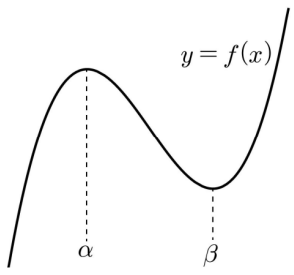
(ⅰ) $b=9$인 경우

$x<0$에서

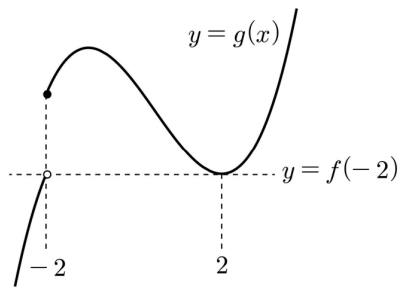
꿈을 현실로!
희망 부산교육

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때
$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3\cdots$㉤
$x\geq 0$에서
$g(x)=(x+a)f(x-9)$
$=(x+a)(x-6)(x-9+k)$
이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로
$9-k<0$ 또는 $9-k=6\cdots$㉥
㉤, ㉥에서
$k=3$
따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서
$3\times 3^2=af(-9),\ 27=36a$
$a=\frac{3}{4}$
따라서
$g(4)=(4+a)f(4-b)$
$=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$
$=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$
(ii) $k-b=-6$인 경우
$x<0$에서
$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3$
$x\geq 0$에서
$g(x)=(x+a)f(x-b)$
$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$
$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$
이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로
$b-3=6$에서 $b=9$
$k-b=-6$에서 $k=3$
따라서 (i)과 같은 결과이므로 $g(4)=19$이다.

107.
함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

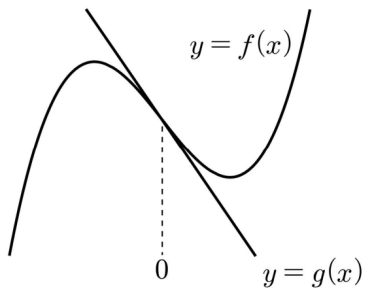


(i) $\alpha<\beta\leq -2$인 경우
$x\geq -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
$f(-2)<g(-2)<g(2)$
$g(2)\neq f(-2)$이므로 모순
(ii) $\alpha<-2<\beta$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\alpha)$에서 존재하므로 모순
(iii) $\alpha=-2$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$
$f(x)=x^3-12x+\frac{1}{2}$
$g(2)\neq f(-2)$이므로 모순
(iv) $-2<\alpha<\beta$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

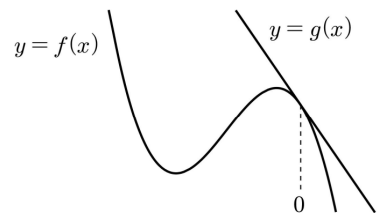


$g(2)=f(-2)$이므로 $f(2)+8=f(-2)f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$($a$, b는 상수)라 하자. $8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$
$b=-6,\ f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$
$f'(x)=3x^2+2ax-6$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=12+4a-6=0$,
$a=-\frac{3}{2}$
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이 므 로
$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

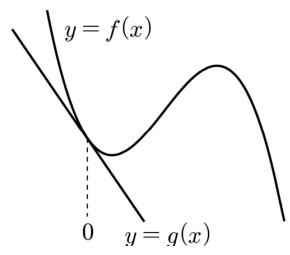
108.
$f(0)=0$이므로
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$(a, b, c는 상수)라 하면
$f'(0)=c,\ g(x)=cx$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의
접선의 기울기 c에 대하여
(i) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ii) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(iii) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



(iv) $c<0$, $a<0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ ……㉠
조건 (나)에 의하여
$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ ……㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

꿈을 현실로!
희망 부산교육

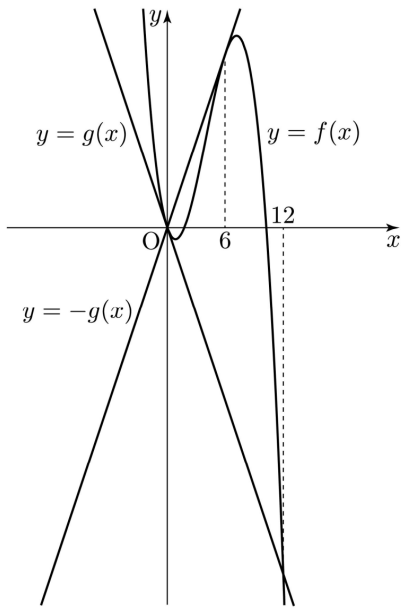
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$

$6-k=0,\ k=6$

$g(x)=18ax$

$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$

$=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=6-3\sqrt{2},\ \beta=6+3\sqrt{2}$

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}ax(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha\le x<\beta)\\ -ax^2(x-12) & (0\le x<\alpha\text{또는 } x\ge\beta)\end{cases}$$

$\alpha<3<\beta$이므로

$h(3)=a\times3\times(3-6)^2=27a=-\dfrac{9}{2}$

$a=-\dfrac{1}{6},\ c=-3$

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha\le x<\beta)\\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0\le x<\alpha\text{또는 } x\ge\beta)\end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2},\ \beta=6+3\sqrt{2}$이므로

$\alpha<6<\beta<11$

$h(6)=0,\ h(11)=\dfrac{1}{6}\times11^2\times(-1)=-\dfrac{121}{6}$

따라서

$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\}=121$

109.

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge t)\\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to t-}g(x)=\lim\limits_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$

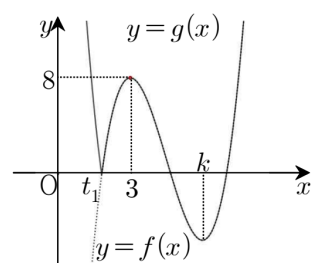
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

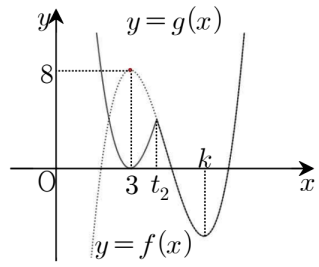
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

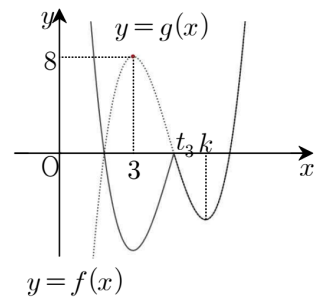
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

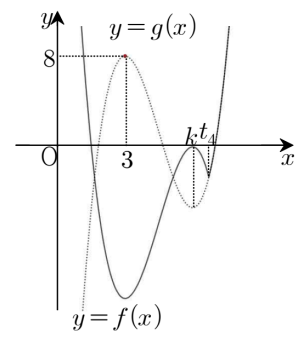
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

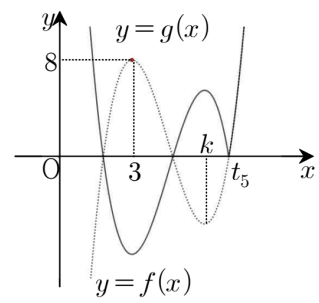
우선 $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.





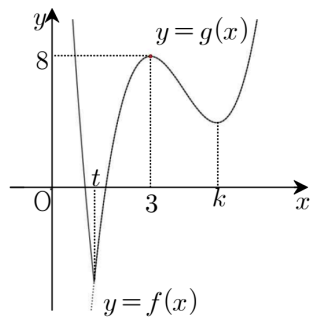




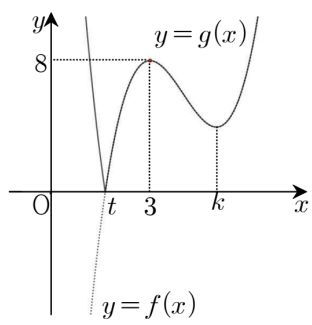


따라서 함수 $h(t)$는 $t=t_i\ (i=1,2,3,4,5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.

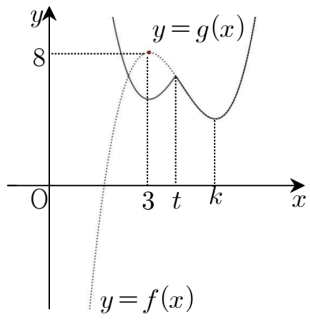
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



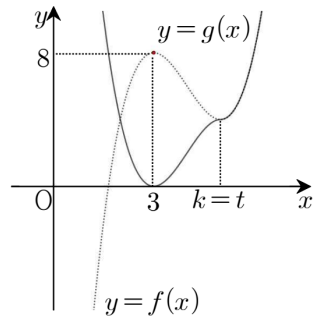
[교점 2개]



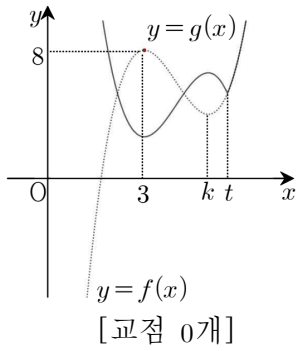
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$t=k$일 때

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$

즉 $-8+2f(k)=0$에서 $f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$f'(x)=3(x-3)(x-k)$

$=3x^2-3(3+k)x+9k$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\frac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$

$C=\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\frac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k=4,$

$-\frac{k^3}{2}+\frac{9}{2}k^2-\frac{27}{2}k+\frac{35}{2}=0,$

$k^3-9k^2+27k-35=0,$

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

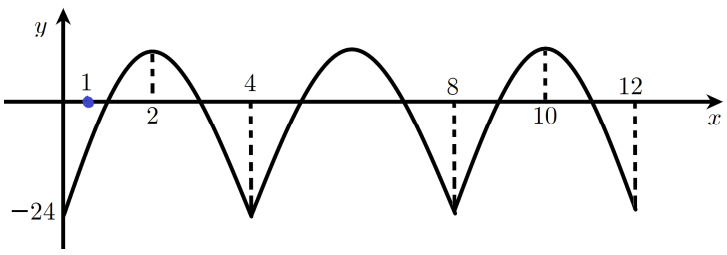
이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

110.

주어진 주기함수가 연속함수이므로 $f(0)=f(4)$

$-24=16a+4b-24,\ b=-4a,$



$f(x)=ax^2-4ax-24$에서 조건에 맞게 그래프를 그려주면 위의 그림과 같다. $f(x)=0$의 실근이 5개 일 때, $ax^2-4ax-24=0$의 근이 구간 $(1,\ 2)$사이에 존재해야하므로

$(-3a-24)(-4a-24)<0,\ -6<a<-8$, 그러므로 $a=-7,\ b=28$

$\therefore\ a+b=21$

111.

$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재하므로 $f(0)=1$

$g(x)=|f(x)-1|$이라 할 때, $g'(0)$의 값이 존재하므로

$g(x)=|f(x)-1|$이 $x=0$에서 미분 가능해야한다.

$y=f(x)$와 $y=1$이 만나는데 꺾이지 않기 위해 $f'(0)=0$이어야 한다. 그러므로 $f(x)=x^2(x-a)+1=x^3-ax^2+1$

부등식 $xf(x)\ge -4x^2+x$은 $x^4-ax^3+x\ge -4x^2+x$

$x^4-ax^3+4x^2\ge 0,\ x^2(x^2-ax+4)\ge 0$이 항상 성립하므로

$x^2\ge 0$이고 $x^2-ax+4\ge 0$이 항상 성립하면 된다.

$D=a^2-16\le 0,\ \therefore\ -4\le a\le 4$

$f(5)=125-25a+1$이므로

$-25\times 4+126\le 126-25a=f(5)\le (-25)\times(-4)+126$

$26\le f(5)\le 226$

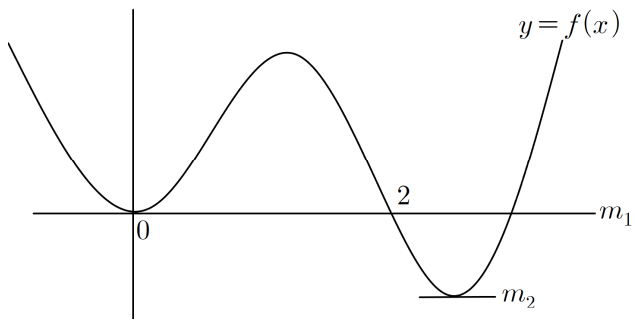
112.

우선 $x=t$를 옮겨가면 좌우의 최솟값을 관찰해보자

그때, 두 극솟값의 사이에서 최솟값이 고정됨을 알 수 있고, 조금 더

디테일에게 하게 나누면 아래 그림과 같음을 알 수 있다.

$x=t$의 좌우에서 최솟값이 고정되는 구간이 $\{t\,|\,0\le t\le 2\}$이므로 $y=m_1$과 $y=f(x)$가 아래 그림과 같이 0, 2에서 만남을 알 수 있다.



이 때, $f(x)=x^2(x-2)(x-a)+m_1$으로 설정하고

$g(4)=0$을 생각해보면 좌우의 최솟값이 같아야 하므로 $x=4$에서 극솟값이 될 때, 다시 말해 $f(4)=m_2$일 때, $g(4)=0$이 만족함을 알 수 있다.

$f'(4)=0$이어야 하고

$f'(x)=2x(x-2)(x-a)+x^2(x-a)+x^2(x-2)$이므로

$f(4)=16(4-a)+16(4-a)+32=0,\ 32(4-a)=-32$

$4-a=-1,\ \therefore\ a=5,\ f(x)=x^2(x-2)(x-5)+m_1$

$f(4)=16\times 2\times(-1)+m_1=m_2,\ k=m_1-m_2=m_1-(m_1-32)=32$

$g(-1)$은 $x=-1$좌우의 최솟값이므로 위에서 얻어진 $m_1=p,\ m_2=q$라 할 때, $m_1=f(-1)=18+p,\ m_2=p-32$

$\therefore\ g(-1)=18+p-(p-32)=50$

$\therefore\ k+g(-1)=32+50=82$

113.

ㄱ. $h(1)=\lim_{t\to 0+}g(1+t)\times\lim_{t\to 2+}g(1+t)$

$1+t=x$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}g(1+t)=\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}x=1$

$\lim_{t\to 2+}g(1+t)=\lim_{x\to 3+}g(x)=\lim_{x\to 3+}x=3$

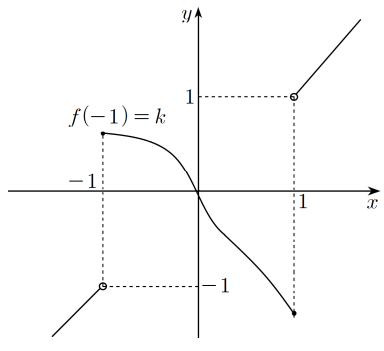
$\therefore\ h(1)=\lim_{t\to 0+}g(1+t)\times\lim_{t\to 2+}g(1+t)=1\times 3=3$(참)

ㄴ. $-1\le x\le 1$에서

$f(x)$는 알 수 없으므로 연속이라고 확정할 수 없다.

아래 그림과 같이 $y=g(x)$가 $x=-1$에서 불연속이라면

$x=-3$에서 $\lim_{t\to 2+}g(x+t)$ 불연속



ㄷ. $x=-1$일 때, $h(x)=g(x+0^+)\times g(x+2^+)$라 할 때,

$x\to -1-$에서 $h(x)$는 최솟값에 가까워지지만, 열린구간에서 최솟값을 가질 수 없다.(거짓)

114.

$f(x)=-2x^3+6x^2,\ g(x)=k$라 할 때,

$y=f(x),\ y=k$가 y축의 오른쪽에서 두 번 만나야 한다.

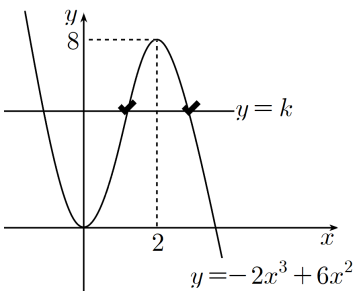
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$x=0$ 일 때, 극솟값 $f(0)=0$,

$x=2$일 때, 극솟값 $f(2)=-16+24=8$

얻어진 극점을 이용해 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.

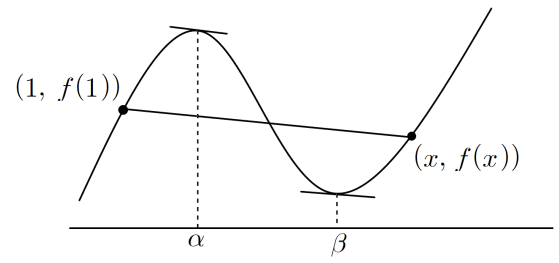


$\therefore\ 0<k<8$, 7개

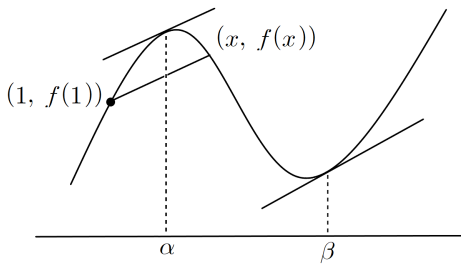
115.

(가) 조건을 변형하면, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$이고

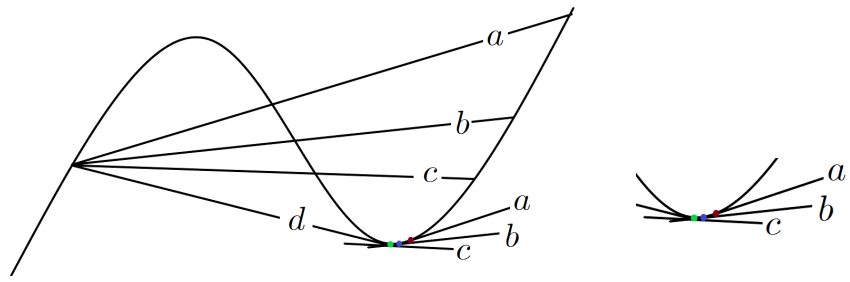
$g(x)$는 평균값 정리를 만족하는 c값을 의미함을 알 수 있다.



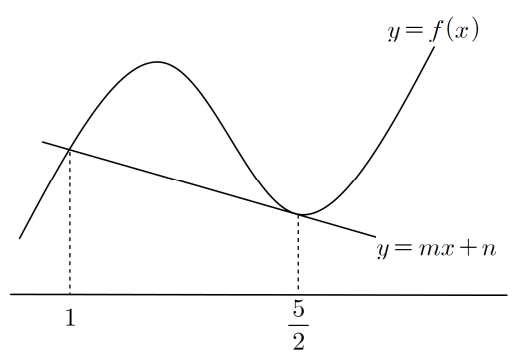
위의 그림처럼 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 가정할 때, α, β의 값이 $g(x)$의 값이 됨을 알 수 있다.



위의 그림에서 $x<\beta$일 때, $g(x)$는 연속이면서 (나)조건의 최솟값을 가져야 하므로 $g(x)$의 값은 β가 선택된다.



x의 값을 조금씩 위의 그림처럼 조금씩 변화시켜가며$g(x)$의 변화를 관찰해보면, 결국 $(1,\ f(1))$에서 그은 접선의 접점일 때, $g(x)$의 값이 최소가 됨을 알 수 있다.



최종적으로 위의 그림이 성립함을 알 수 있다. 그러므로

$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+n$

$f(0)=-3$이므로 $f(0)=-\frac{25}{4}+n=-3,\ n=\frac{13}{4}$

$f(g(1))=6$에서 $f(g(1))=6$이므로 $f'(1)=f'(g(1))$을 만족한다.

$f'(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)+m$

$f'(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(3x-\frac{9}{2}\right)=3x^2-12x+\frac{45}{4}+m$

$f''(x)=6x-12$에서 삼차함수의 대칭점이 $x=2$임을 알 수 있다.

그러므로 $f'(1)=f'(3)$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(1))=f'(1)=f'(3)$이므로 $g(1)=3$

$f(g(1))=f(3)=6$이므로 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+\frac{13}{4}$에서

$f(3)=2\times\frac{1}{4}+3m+\frac{13}{4}=6,\ 3m=6-\frac{13}{4}-\frac{1}{2}=\frac{24-13-2}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore\ m=\frac{3}{4},\ f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$

$\therefore\ f(4)=3\times\frac{9}{4}+3+\frac{13}{4}=\frac{40}{4}+3=13$

116.

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이다. 즉, $f(1)=g(1)$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=5$

즉, $f'(1)-g'(1)=5$ …… ㉡

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=7$

즉, $f'(1)+g'(1)=7$ …… ㉢

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $a=f(1)$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

㉠에서 $f(1)=g(1)$이므로 $f'(1)=b\times f(1)=ab$

㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$

따라서 $ab=6$

117.

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

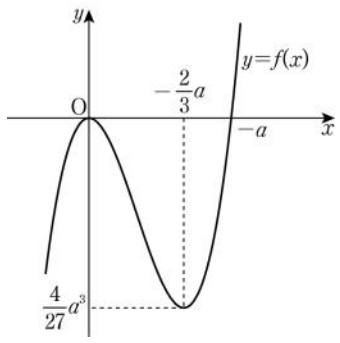
조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	…	0	…	$-\frac{2}{3}a$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{4}{27}a^3$	↗

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$ 이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$ 이고 $a^3=-27$ 에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$ 이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

118.

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와

점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은

0이다.

$$\int_1^k v(t)dt=\int_1^k(4t-10)dt$$
$$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$$
$$=(2k^2-10k)-(2-10)$$
$$=2k^2-10k+8$$
$$=2(k-1)(k-4)=0$$

따라서 $k=4$

119.

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	…	1	…	3
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

닫힌구간 [0, 3]에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

120.

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값

$f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

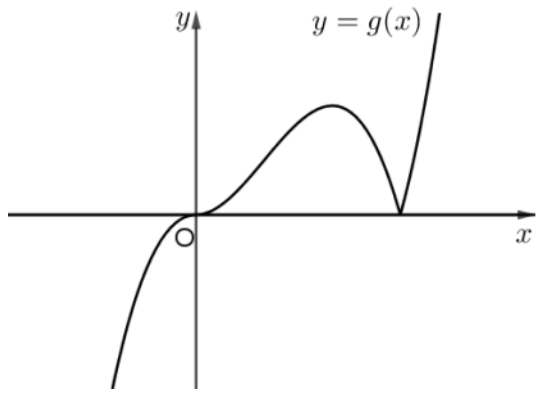
즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로

$p=1$, $q=7$이어야 한다.

따라서 $p+q=1+7=8$



121.

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

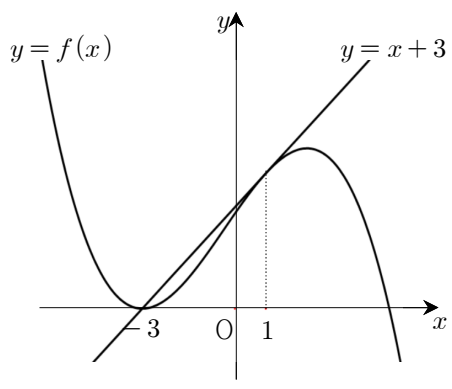
를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$ …… ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\frac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\frac{1}{16}\times 3\times 1+3=\frac{45}{16}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

122.

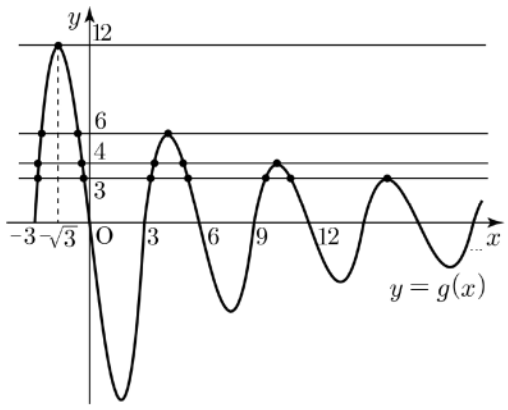
$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	−12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여

$6k-3 \le x < 6k+3$일 때

함수 $g(x)=\frac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로

$k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7 \le n \le 11$일 때, $a_n=2\times1=2$

$a_{12}=1$

따라서

$\sum_{k=1}^{12} a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$

123.

$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$에서

$x^2-9x+22$의 판별식 $D=81-88<0$이므로 항상 양수이다.

주어진 방정식은

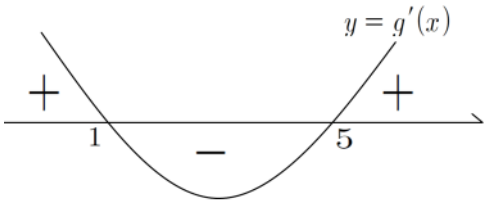
$x \ge 0$일 때, $f(x)+f(x)+x=6x+k$, $2f(x)-5x=k$

$x<0$일 때, $f(x)-f(x)-x=6x+k$, $-7x=k$

$g(x)=\begin{cases} 2f(x)-5x & (x \ge 0) \\ -7x & (x<0) \end{cases}$라 할 때,

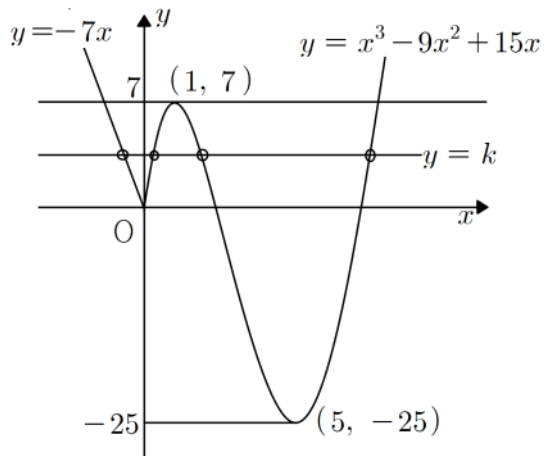
$g(x)=x^3-9x^2+20x-5x=x^3-9x^2+15x$

$g'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$



극대 점 $(1,\ 7)$, 극소 점 $(5,\ -25)$이고 $f(0)=0$

주어진 방정식의 실근의 개수는 $g(x)=k$의 실근의 개수와 같으므로 실근이 4개가 되도록 하는 $y=g(x)$와 $y=k$를 그려보면 아래 그림과 같다.



$\therefore\ 0<k<7,\ \therefore\ 1+2+3+4+5+6=21$

124.

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{h}$

$h=-t$로 치환하면,

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{h}=-\lim_{t\to0-}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{t}$이므로

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}+\lim_{h\to0-}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}$

결국, $\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$의 의미는

$y=|f(x)|$의 좌, 우 미분 계수의 합으로 해석 할 수 있다.

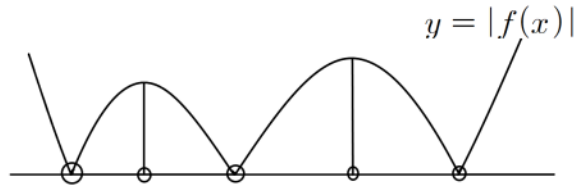
$g(x)=0$의 실근은 $f(x-3)=0$의 실근과

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$의 실근이다.

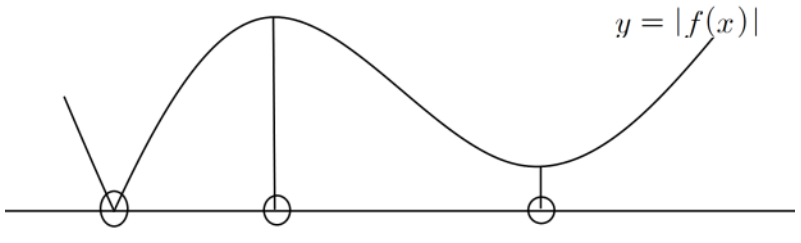
이 때,

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$을 만족하는 점은 $f'(x)=0$이 되는 극점과 x축에 꺾여서 좌우 미분 계수의 부호가 바뀌는 점, 다시 말해서 $f(x)=0$을 만족하는 점 중에서 중근이 아닌 점이다.

(1. $y=|f(x)|$의 그래프가 아래와 같을 때, 꺾이지 않은 극점 2개, x축에 꺾인 점 3개 이므로 이미 실근 개수가 5개 이므로 주어진 조건을 만족하지 못한다.



(2. $y=|f(x)|$의 그래프가 아래와 같을 때,



꺾이지 않은 극점 2개, x축에 꺾이는 점 1개,

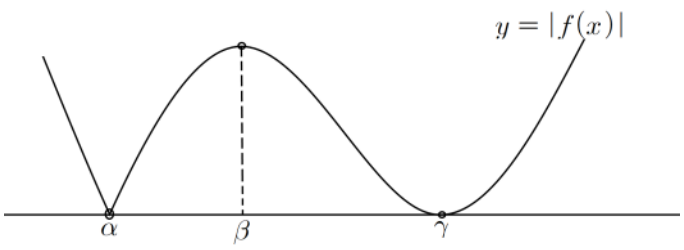
$f(x-3)=0$이 실근을 1개

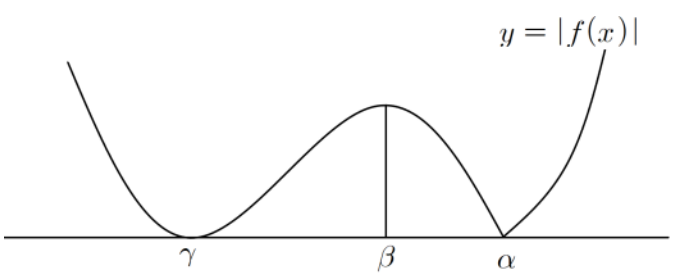
꿈을 현실로! 희망 부산교육

하지만, (가) 조건에서 $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$이 불연속인 점에서 $f(x-3)$이 0이 되어야 $y=g(x)$가 연속이 되므로 $f(x)=0$의 실근을 α라 할 때, $f(\alpha-3)=0$을 만족해야 하지만, $f(\alpha)=0$이고 실근은 1개이므로 연속조건을 만족시킬 수 없다.

(3. $y=f(x)$가 실수 전체에서 증가할 때는 대충 생각해봐도 수가 모자란다. 고려하지 않겠다.

(4. $y=|f(x)|$의 그래프가 아래의 두 그림 중 하나와 같을 때,





$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$이 되는 점 α, β, γ 3개,

$f(x)=0$이 되는 점이 α, γ이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\gamma)=0$

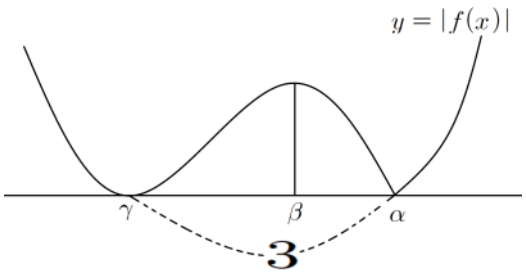
$f(x-3)=0$이 되는 점 $\alpha+3$, $\gamma+3$, 2개

이 때, $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$의 불연속점인 $x=\alpha$에서

$f(\alpha-3)=0$이 되어야 하므로 $\alpha-3\neq\alpha$이므로

$f(\alpha-3)=f(\gamma)$이고, $\alpha-3=\gamma$

그러므로



결과 적으로 $g(x)=0$의 네 근은

$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$의 실근 α, β, γ

$f(x-3)=0$의 실근은 $\alpha+3$, α

(나) 조건에서 $\alpha+\beta+\gamma+\alpha+3=7$

삼차함수의 비례관계를 고려하면, $\alpha-\beta=1$이므로

$\beta=\alpha-1$, $\gamma=\alpha-3$

$\alpha+\beta+\gamma+\alpha+3=\alpha+\alpha-1+\alpha-3+\alpha+3=4\alpha-1=7$

$\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=-1$

$f(x)=(x-2)(x+1)^2$, $f(5)=3\times 36=108$

125. 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a}$,

$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$,

$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$(k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$h\left(\frac{6+a}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right)=-4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=-32$

$\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\frac{a}{3}=2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

126. ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을

D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3b\leq 0$, $a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$

$=x^3+bx$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서 $3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq\frac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$의 실근이 존재한다.

즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

127. 조건 (가)에서 $x\neq 0$, $x\neq 2$일 때,

$g(x)=\frac{x(x-2)}{|x(x-2)|}(|f(x)|-a)$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ a-|f(x)| & (0<x<2)\end{cases}$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$에서 $|f(0)|-a=a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0)=\lim_{x\to 0+}g(x)=0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ a-|f(x)| & (0\leq x\leq 2)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}$ …… ㉠

(i) $f(0)=a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)>0$이다. 그러므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$,

$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0)$, $f'(0)=0$

(ⅱ) $f(0)=-a$ 인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)<0$이다. 그러므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0)$,

$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0)$, $f'(0)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3$, $q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times 2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times 6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a$, $f(2)=a$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

128. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선은 $y=f'(0)x$

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선은

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$

$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+f(1)$에서 $f(1)=2$이므로

$y=(2+f'(1))x-2-f'(1)+2=\{2+f'(1)\}x-f'(1)$

구해진 두 접선이 서로 같으므로

기울기가 서로 같으므로 $f'(0)=2+f'(1)$,

y절편이 서로 같으므로 $f'(1)=0$

$\therefore f'(0)=2$, $f'(1)=0$

주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(1)=2$

$f'(1)=0$, $f(1)=2$에서 $f(x)-2=m(x-1)^2(x-\alpha)$라 할 때,

$f(0)=0$에서 $-2=-m\alpha$, $m\alpha=2$

$f'(x)=2m(x-1)(x-\alpha)+m(x-1)^2$에서

$f'(0)=2$이므로 $f'(0)=2m\alpha+m=2$, $m\alpha=2$이므로 $4+m=2$

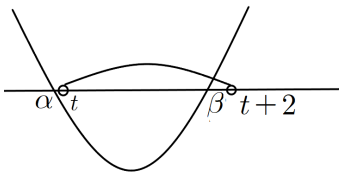
$m=-2$, $\alpha=-1$

$f(x)=-2(x-1)^2(x+1)$

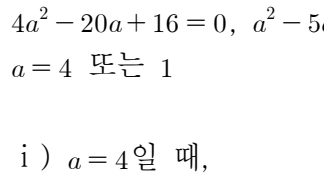
$f'(x)=-4(x-1)(x+1)-2(x-1)^2$

$\therefore f'(2)=-4\times 1\times 3-2\times 1=-12-2=-14$

129. $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $|\beta-\alpha|<2$일 때,



$\lim_{t\to\alpha+}g(t)=1$



$\lim_{t\to\alpha-}g(t)=2$,

그러므로 (가) 조건에서 $y=f'(x)$의 두 x절편 사이의 거리가 2보다 크거나 같다.

$g(f(1))=2$이므로 구간 $[f(1), f(1)+2]$에서 $f'(x)=0$의 실근이 2개다. 크기가 2인 닫힌구간에 두 개의 실근이 포함되어야 하는데 두 실근의 차가 2이상이므로 $\beta-\alpha=2$이고 $\alpha=f(1)$이어야 한다.

같은 식으로 $g(f(4))=2$이므로 $f(4)=\alpha$

$f(x)-\alpha=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)(x-a)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\{(x-1)(x-4)+(x-4)(x-a)+(x-1)(x-a)\}$

$f'(x)=\frac{1}{2}\{3x^2-(2a+10)x+5a+4\}$

얻어진 조건에서 $3x^2-(2a+10)x+5a+4=0$의 두 실근의 차가 2

근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta=\frac{2a+10}{3}$, $\alpha\beta=\frac{5a+4}{3}$이므로

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=\frac{4a^2+40a+100}{9}-4\times\frac{5a+4}{3}=4$

양변에 9를 곱해서 간단히 하면, $4a^2+40a+100-60a-48=36$

$4a^2-20a+16=0$, $a^2-5a+4=(a-4)(a-1)=0$

$a=4$ 또는 1

ⅰ) $a=4$일 때,

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-18x+24)$이고, $\alpha=2$, $\beta=4$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2+2$

$g(f(0))=1$이므로

닫힌구간 $[f(0), f(0)+2]$에 $x=2$이 포함될 때,

$2\le f(0)+2<4$, $0\le f(0)<2$

닫힌구간 $[f(0), f(0)+2]$에 $x=4$이 포함될 때, $2<f(0)\le 4$

$f(0)=\frac{1}{2}\times(-1)\times 16+2=-6$

$g(f(0))\neq 1$이므로 $a\neq 4$

ⅱ) $a=1$일 때,

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-12x+9)$이고 $\alpha=1$, $\beta=3$

$f(x)-\alpha=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)(x-a)$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$,

$g(f(0))=1$이므로

닫힌구간 $[f(0), f(0)+2]$에 $x=1$이 포함될 때, $1\le f(0)+2<3$

닫힌구간 $[f(0), f(0)+2]$에 $x=3$이 포함될 때, $1<f(0)\le 3$

$f(0)=\frac{1}{2}\times 1\times(-4)+1=-1$

$g(f(0))=1$이므로 $a=1$

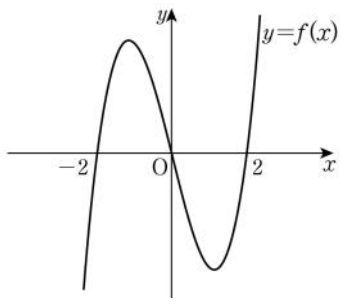
$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$

$\therefore f(5)=\frac{1}{2}\times 4^2\times 1+1=8+1=9$

130.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



ㄱ. $m=-1$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로 $h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$ (참)

ㄴ. $m=-1$ 일 때, $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\ge 0)\end{cases}$

(i) $x<0$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 기울기가 양수이고 y 절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x 좌표를 x_1 $(x_1<0)$ 이라 하면 $x<0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=x_1$ 에서만 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 일 때, $g(0)-4<0=f(0)$ 이므로
$x=0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $g(x)$ 의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x>0$ 일 때,

$f(x)-g(x)=2x^3-6x+4$

$=(x-1)^2(x+2)\ge 0$

즉, $f(x)\ge g(x)$

$x>0$ 에서 $h(x)=g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $g(x)$ 의 미분가능성과 같다.

따라서 $x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 2 이다. (참)

ㄷ. 양수 m 에 대하여

$x=0$ 일 때, $g(0)=\frac{4}{m^3}>0=f(0)$ 이므로

$x=0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $f(x)$ 의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$x>0$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 기울기가 양수이고 y 절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x 좌표를 x_2 $(x_2>0)$ 이라 하면 $x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=x_2$ 에서만 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1 이려면 $x<0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능해야 한다.

$x<0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 x 좌표를 t 라 하자.

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$ 에서

$2t^3-8t=-\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3}$ …… ㉠

$6t^2-8=-\frac{47}{m}$ …… ㉡

$t\times$㉡$-$㉠ 에서

$4t^3=-\frac{4}{m^3}$

$t=-\frac{1}{m}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$

$(8m+1)(m-6)=0$

m 은 양수이므로 $m=6$

$m=6$ 일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=-\frac{1}{6}$ 인 점에서 접한다.

(i) $m=6$ 일 때, 함수 $x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge f(x)$ 이므로 $h(x)=f(x)$ 이다.

그러므로 $x<0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능하다.

(ii) $0<m<6$ 일 때, $x<0$ 에서 m 의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $m=6$ 일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 y 절편도 커지므로 $x<0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.

그러므로 $x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge f(x)$ 이므로 $h(x)=f(x)$ 이다.

따라서 $x<0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능하다.

(iii) $m>6$ 일 때, $x<0$ 에서 m 의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $m=6$ 일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 y 절편도 작아지므로 $x<0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 x 좌표를 각각 x_3, x_4 라고 하면 함수 $h(x)$ 는 $x=x_3$, $x=x_4$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1 인 양수 m 의 최댓값은 6 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

131.

$f(x)=x(x-a)(x-6)$ 이라 하자.

$f(0)=0$ 이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이다.

원점이 아닌 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0-f(t)=f'(t)(0-t)$

$tf'(t)-f(t)=0$ …… ㉠

$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$ 에서

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

이므로 ㉠에서

$t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=0$

$2t^3-(a+6)t^2=0$, $t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$t\ne 0$ 이므로 $t=\frac{a+6}{2}$ 이다.

$f'(0)=6a$, $f'\left(\frac{a+6}{2}\right)=-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)$

이므로 $0<a<6$ 인 실수 a 에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$g(a)=-\frac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$

$g'(a)=-\frac{3}{2}(3a^2-24a+36)=-\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$0<a<6$ 이므로 $g'(a)=0$ 에서 $a=2$

$0<a<6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	…	2	…	(6)
$g'(a)$		−	0	+	
$g(a)$		↘	−48	↗	

함수 $g(a)$ 는 $a=2$ 일 때 극소이면서 최소가 된다.

따라서 $0<a<6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은

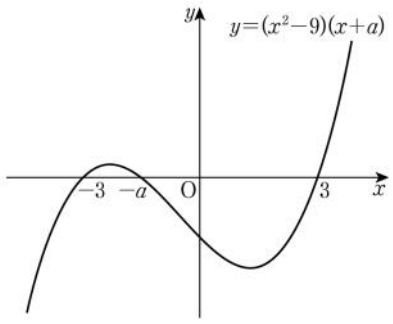
$g(2)=-48$ 이다.

132.

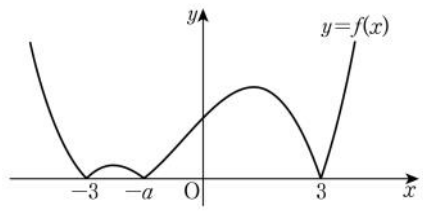
(i) $0<a<3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x 축과 세 점 $(-3, 0)$, $(-a, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



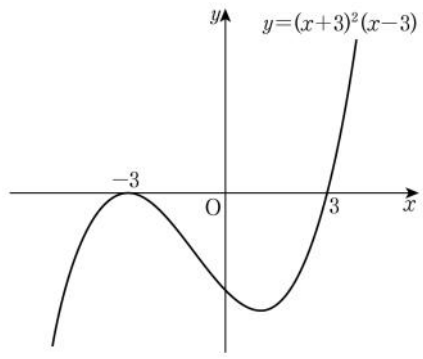
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



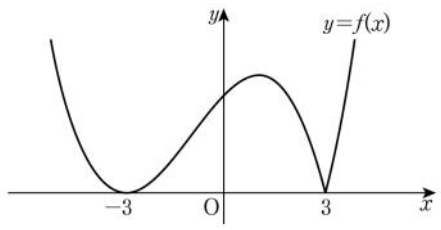
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3,0)$에서 접하고 점 $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



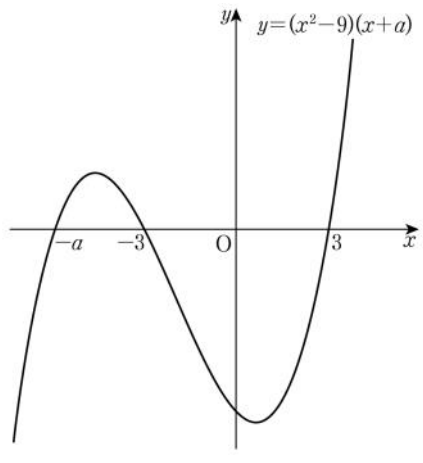
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$ 의 그래프 개형은 그림과 같다.



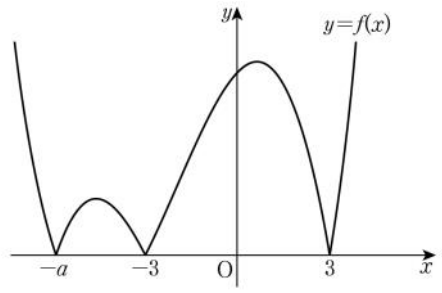
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

[보충 설명]

$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을 보이자.

$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$

$=|(x+3)^2(x-3)|$

$=\begin{cases}(x+3)^2(x-3) & (x\geq 3)\\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,3)$과 구간 $(3,\infty)$에서 각각 다항함수이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.

그런데

$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$

이므로 극한값 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.

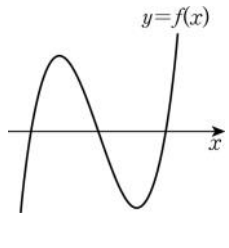
그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

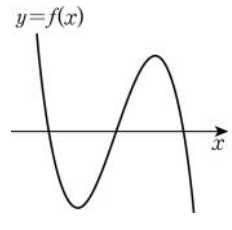
133.

함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때



$a<0$일 때



함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

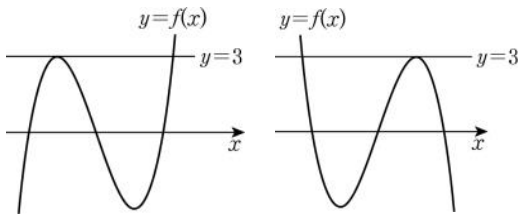
그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3

조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면

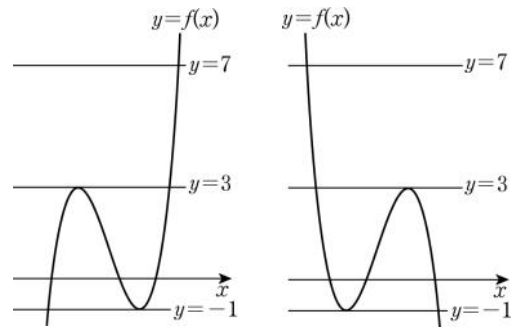
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$

조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로 그 합은 $3+(-1)=2$

134.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k\le g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x)\le 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$h(x)=f(x)-12x$라고 하면

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	20	↘

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k\ge 20$

(ii) $g(x)\ge 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

부등식 $3x^2-12x+a-k\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k)\le 0$, $k\le a-12$

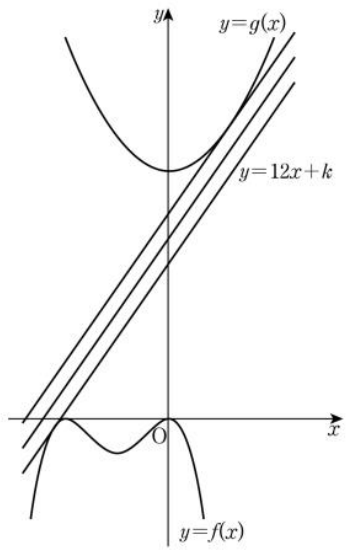
모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\le a-12$

(i), (ii)에 의해 $20\le k\le a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22\le a-12<23$

따라서 $34\le a<35$이므로 자연수 a의 값은 34

[보충 설명]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$의 관계는 그림과 같다.



135.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3+} g(x)=g(3)$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$

$=-f'(3)$

$=a-9$

$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=f'(3)$

$=-a+9$

따라서 $a=9$, $b=20$

$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge 3)\end{cases}$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\ge 3$에서

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

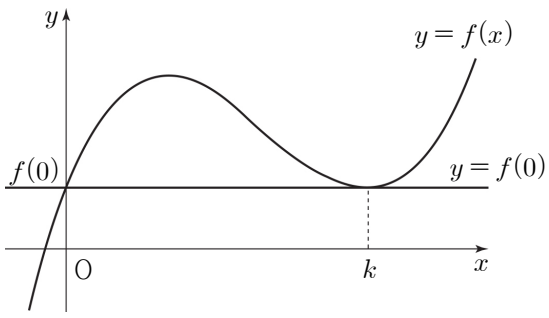
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

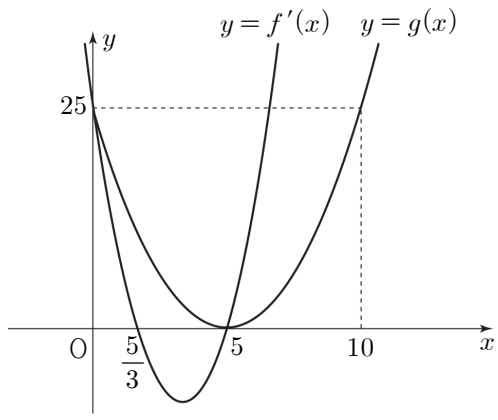
136.
조건 (가)에서
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.
$g(k)=\dfrac{f(k)-f(0)}{k}=0$
$f(k)=f(0)$
조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의
그래프는 점 $(k, f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



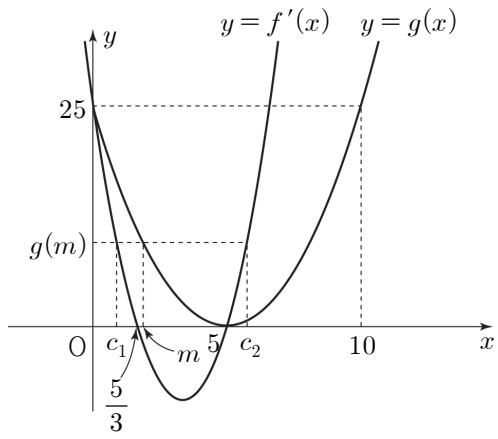
$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$
$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)$
$=(3x-k)(x-k)$ …… ㉠
$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$
조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$
$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$
$2a(a-k)=0$
$a>0$이므로 $a=k$
㉠에서 $f'(k)=0$이므로
$g(a)=0$ …… ㉡
조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고
㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$
㉠에서 $f'(x)=0$에서
$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로
$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$
조건 (나)에서 $a>\dfrac{5}{3}$이므로 $k>\dfrac{5}{3}$
따라서 $k=5$
$f'(x)=(3x-5)(x-5)$
$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서
$3x^2-20x-m^2+10m=0$
이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)$
$=12(m-5)^2+100>0$
이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은
m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 c_1, c_2 $(c_1<c_2)$라 하자.
$n(A_m)=2$이려면
$0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$c_1c_2=\dfrac{-m^2+10m}{3}>0$
$0<m<10$

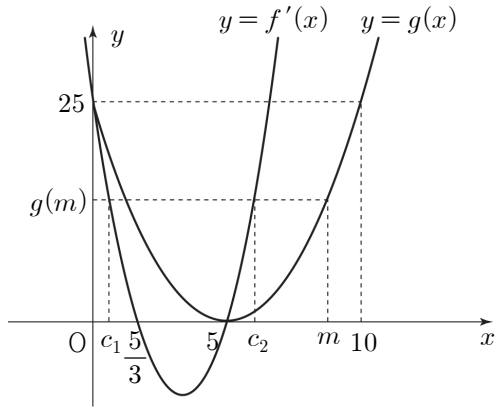
두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과
같다.



$g(m)=(m-5)^2\ge0$이므로
$f'(x)=g(m)$에서
$f'(x)=(3x-5)(x-5)\ge0$
$x\le\dfrac{5}{3}$ 또는 $x\ge5$
(ⅰ) $0<m<5$인 경우



$0<c_1<m<5<c_2$이므로
$A_m=\{c_1\}$
$n(A_m)\ne2$
(ⅱ) $m=5$인 경우
$g(5)=0$이므로
$f'(x)=g(5)=0$
$(3x-5)(x-5)=0$
$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=5$
$A_5=\left\{\dfrac{5}{3}, 5\right\}$
$n(A_5)=2$
(ⅲ) $5<m<10$인 경우

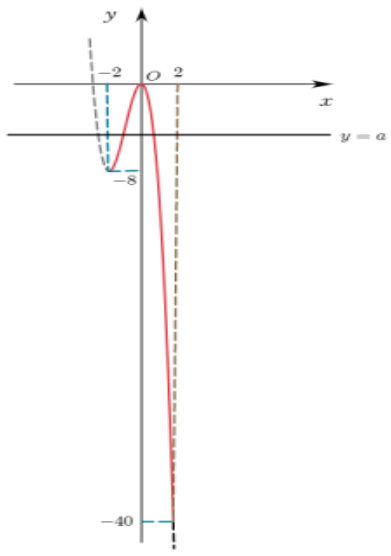


$0<c_1<c_2<m$이므로
$A_m=\{c_1, c_2\}$
$n(A_m)=2$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $n(A_m)=2$를 만족시키는
자연수 m은 5, 6, 7, 8, 9
따라서 $5+6+7+8+9=35$

137.
35. 미분을 활용한 부등식 문제 해결하기
$f(x)=-2x^3-6x^2$라 하자.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

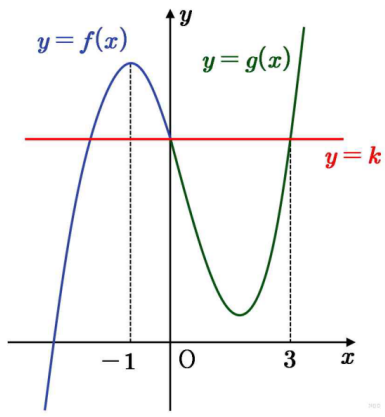
$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$ 이므로
$f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -8을 갖고
$x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
그리고 $f(2)=-40$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $-8\le a<0$일 때, 방정식 $f(x)=a$는 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 그러므로 조건을 만족하는 정수 a의 값의 개수는 8이다.

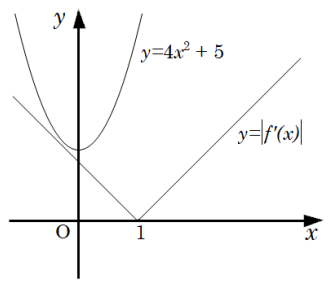
138.
함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균 변화율은
$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{a^3-3a^2+5a}{a}=a^2-3a+5$이고 $f'(x)=3x^2-6x+5$에서 $f'(2)=5$이다.
따라서 $a^2-3a+5=5$, $a(a-3)=0$에서 $a>0$이므로 $a=3$

139.
이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$을 대칭축으로 갖는다. 따라서 $f(-2)=f(0)=h(0)$이다.
$h(0)=k$ (단, k는 실수) 라고 두면 $f(x)=k$의 두 근은 $-2, 0$이다.
즉 $f(x)-k=0$의 두 근이 $-2, 0$이므로 $f(x)-k=ax(x+2)$이다.
(단, $a<0$인 실수)
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 $\lim_{x\to 0+}h(x)=\lim_{x\to 0-}h(x)=h(0)$
즉 $g(0)=f(0)=h(0)=k$이므로
삼차함수 $g(x)$의 상수항은 k이다. 그리고 삼차함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로
$g(x)-k=px^3+qx$라고 둘 수 있다.
(단, p, q는 실수)
그리고 $g(-x)-k=-\{g(x)-k\}$를 만족하므로 함수 $y=g(x)-k$의 그래프는 원점 대칭이다.
따라서 $y=g(x)$의 그래프는 $(0, k)$ 대칭이다.
그리고 조건 (가)에서 $h(x)-k=0$의 모든 실근의 합이 1이고 $f(x)=k$의 두 근은 $-2, 0$이므로 $x>0$에서 $g(x)=k$의 실근은 3이다.
그리고 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그리고 $y=g(x)$의 그래프는 $(0, k)$ 대칭이므로 $g(x)=k$의 세근은 $-3, 0, 3$이다.
따라서 $g(x)-k=px(x-3)(x+3)$
$=px^3-9px$ 이고
$g'(x)=3px^2-9p=3p(x^2-3)$
$=3p(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ 이므로
$g'(x)=0$에서 $x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$이다.
따라서 삼차함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟 값을 갖는다.
닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)=-a+k$, 함수 $h(x)$의 최솟값은 $g(\sqrt{3})=-6p\sqrt{3}+k$이므로
$-a+6p\sqrt{3}=3+4\sqrt{3}$ ……①
한편, 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 0+}h'(x)=\lim_{x\to 0-}h'(x)$에서 $f'(0)=g'(0)$이므로
$2a=-9p$ ……②
①, ②에서 $p=\dfrac{2}{3}$, $a=-3$이다. 따라서
$f(x)=-3x^2-6x+k$, $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-6x+k$
이다. 그러므로
$h'(-3)+h'(4)=f'(-3)+g'(4)$
$=12+26=38$

140.
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고 대칭축이 $x=1$이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$라 하면 $f'(x)=2ax-2a=2a(x-1)$이다. 주어진 부등식을 만족시키려면 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프와 이차함수 $y=4x^2+5$의 그래프는 아래 그림과 같은 위치 관계에 있어야 한다.



즉, $x\le -1$의 범위에서 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프와 이차함수 $y=4x^2+5$의 그래프는 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.
(ⅰ) $a>0$인 경우
$|f'(x)|\le 4x^2+5$은 $-2ax+2a\le 4x^2+5$ 이고
$4x^2+2ax-2a+5\ge 0$에서
$D/4=a^2-4(-2a+5)\le 0$
$a^2+8a-20\le 0$
$(a-2)(a+10)\le 0$
$-10\le a\le 2$이므로 $0<a\le 2$이다.
(ⅱ) $a<0$인 경우
$|f'(x)|\le 4x^2+5$에서 $2ax-2a\le 4x^2+5$이고
$4x^2-2ax+2a+5\ge 0$이다.
$D/4=a^2-4(2a-5)\le 0$
$a^2-8a+20\le 0$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$(a+2)(a-10)\le 0$$

$-2\le a\le 10$이므로 $-2\le a<0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 최댓값은 2이다.

a의 최댓값은 2 이다.

141.

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$에서

$x^3-x^2-8x=-k$

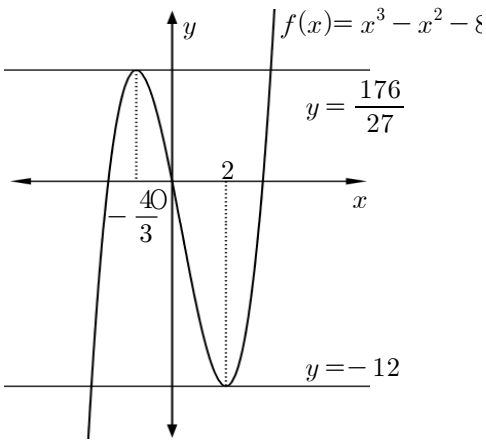
$f(x)=x^3-x^2-8x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-\frac{4}{3}$	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{176}{27}$	↘	−12	↗



주어진 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 위 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, $-k=\frac{176}{27}$ 또는 $-k=-12$

따라서 양수 k의 값은 12 이다.

142.

조건 (가)에 의해

$$f(x)=p(x-q)(x-1)(x-3)$$

이고 조건 (나)에 의해

$$q<1$$

이다.

$f(a-x)=-p(x-a+q)(x-a+1)(x-a+3)$에서

$g(x)=\left|-p^2(x-q)(x-1)(x-3)\right.$
$\left.\times(x-a+q)(x-1+a)(x-3+a)\right|$

이고 $q<1<3$, $a-3<a-1<a-q$이다. $g(x)$가 모든 실수 전체에서 미분가능하려면 $g(x)=0$을 만족하는 모든 x에 대해 $g'(x)=0$이어야 한다. 즉, $g(x)=0$는 서로 다른 3개의 중근을 가져야 한다.

그러므로 $a-3=q$, $a-1=1$, $a-q=3$에서

$a=2$, $q=-1$이고

$$g(x)=|f(x)f(2-x)|=\{f(x)\}^2$$

이다. 따라서

$$\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{\{f(8)\}^2}{f(0)\times f(8)}$$
$$=\frac{f(8)}{f(0)}$$
$$=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}=105$$

이다.

143.

(가)에서 $\lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠

$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=a$ …… ㉡

(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1$, $b=1$

㉡에서 $g'(1)=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$

따라서 $f'(1)=5$

144.

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1$,

$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 $f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$

$a^2>0$이므로 $(3a-1)(a-3)>0$

그런데 a는 자연수이므로 $a>3$

그러므로 $a_1=4$, $a_2=5$, …, $a_n=n+3$

$a=a_n$일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$이고

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

145.

$t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리는

$\int_3^k|2t-6|dt=\int_3^k(2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_3^k$

$=k^2-6k+9=25$

$k^2-6k-16=0$이므로 $k=8$

146.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서

$f(0)+g(0)=0$이고 $f'(0)+g'(0)=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $f(0)=-3$이고 $f'(0)+g'(0)=3$이므로

$g(0)=3$, $\frac{f'(0)}{g(0)}=2$, $f'(0)=6$, $g'(0)=-3$

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=6\times 3-3\times -3=27$

147.

$y'=12x^2-12=0$에서 $x=1$ 또는 -1

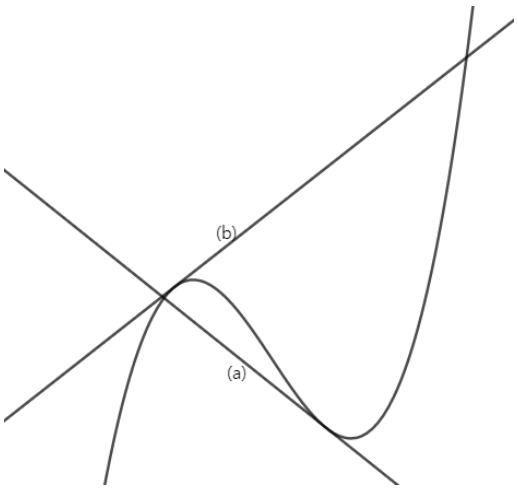
곡선은 $x=-1$에서 극댓값이 15이고 $x=1$에서 극솟값이 -1이다. 곡선과 직선 $y=k$가 $x=-1$과 $x=1$에서 접할 때 만나는 점의 개수가 2가 되는데 k가 양수가 되는 것은 $x=-1$에서 접할 때 이므로 양수 k의 값은 15이다.

148.

$h(0)=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 교점을 갖는다. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 서

꿈을 현실로!
희망 부산교육

로 접해야 한다. 아래 그림의 (a)처럼 접하면 $h(x)$는 $x<0$에서 미분가능하지 않은 경우가 생기므로 (b)처럼 접해야 한다.
$g(x)=mx+n$이라 하면



$f(x)-g(x)=f(x)-mx-n=x^2(x-k)$으로 놓을 수 있다.
(b)의 경우 $f(x)$와 $g(x)$가 접하는 점을 제외하고 만나는 점의 x 좌표를 k라 하자.
(ⅰ) $k<1$이면
$x\to 1-$일 때 $h(x)=f(x)-g(x)$
$x\to 1+$일 때 $h(x)=f(x)+g(x)$
$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이고
$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $g'(1)=0$이다.
$g'(1)=0$이면 $g(x)$는 일차함수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $k\geq 1$이면

$$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이고 미분가능하므로
$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이고
$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $f'(1)=0$이다.
따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$로 놓을 수 있다.
$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$
$g'(x)=p$
$f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서
$a=q$, $-2a+1=p$
$h(2)=f(2)+g(2)=2+a+2p+q=5$
이상에서 $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$
$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\frac{1}{2}$ 이므로
$h(4)=f(4)+g(4)=39$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 06 다항함수의 적분법

해 설

1.

$$\int_0^2 (2x^3+3x^2)dx = \left[\frac{2}{4}x^4+\frac{3}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{2}\times 16+8=16$$

2.

$$\int_0^1 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_0^1 = 1+3=4$$

3. $\int_0^3 (x+1)^2dx = \int_0^3 (x^2+2x+1)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^3 = 21$$

4. ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 곡선과 x축 사이의 넓이를 구한다.

$$\int_0^2 (|x^2-2x|+1)dx = \int_0^2 (-x^2+2x+1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

5. ②

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$\int_1^x f(t)dt = x^3-ax+1 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1-a+1=0,\ a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하고 $a=2$를 대입하면

$f(x)=3x^2-2$이므로 $f(2)=12-2=10$

6. 정답 33

[해설]

$f'(x)=8x^3-1$에서

$f(x)=2x^4-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $\quad f(0)=C=3$

$\therefore\ f(2)=32-2+3=33$

7. [정답] ②

[해설]

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

점 P가 $t=1,\ t=3$에서 운동 방향을

바꾸므로 $a=3$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지

움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|dt$$

$$= \int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 \{-v(t)\}dt$$

$$= \int_0^1 (t^2-4t+3)dt + \int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

8. [정답] 20

[해설]

$f(x)=\int (9x^2-8x+1)dx$

$= 3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=3-4+1+C=10,\ C=10$

$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$

따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

9. 정답 ④

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \{6x^2-2f(1)x\}dx=2x^3-f(1)x^2+C$

$f(0)=4$이므로 $C=4$

$x=1$을 대입하면, $f(1)=2-f(1)+4,\ f(1)=3$

$\therefore\ f(x)=2x^3-3x^2+4,\ f(2)=16-12+4=8$

10. 정답 4

$3x^3-7x^2=-x^2,\ 3x^2(x-2)=0$

넓이 공식에 따라 $\frac{3}{12}(2-0)^4=\frac{1}{4}\times 16=4$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 넓이를 구한다.

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx = \left[\frac{1}{9}x^3+x\right]_0^3 = 3+3=6$$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=k$에서의 위치는

$$\int_0^k (12t-12)dt = \left[6t^2-12t\right]_0^k = 6k^2-12k$$

원점에서 출발한 점 Q의 시각 $t=k$에서의 위치는

$$\int_0^k (3t^2+2t-12)dt = \left[t^3+t^2-12t\right]_0^k = k^3+k^2-12k$$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$6k^2-12k=k^3+k^2-12k,\ k^2(k-5)=0$

$k>0$이므로 $k=5$

시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |12t-12|dt = \int_0^1 (12-12t)dt + \int_1^5 (12t-12)dt$$

$$= \left[12t-6t^2\right]_0^1 + \left[6t^2-12t\right]_1^5 = 102$$

13. 정답 ④

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+C$

$f(1)=1-3+C=6,\ C=8,\ \therefore\ f(x)=x^3-3x^2+8$

$\therefore\ f(2)=8-12+8=4$

14. 정답 ②

$(x-1)f(x)=3x(x^3-1),\ f(x)=3x(x^2+x+1)$

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 (3x^3+3x^2+3x)dx = 2\int_0^2 3x^2dx = 2\left[x^3\right]_0^2 = 16$$

15.

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선의 기울기

가 $f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은 $y-3=2(x-3),\quad y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인

부분의 넓이는

$$\int_0^3 \{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9$

16.

$\int_{-3}^{2}(2x^3 + 6|x|)dx - \int_{-3}^{-2}(2x^3 - 6x)dx$

$= \int_{-3}^{-2}(2x^3 + 6|x|)dx + \int_{-2}^{2}(2x^3 + 6|x|)dx$

$- \int_{-3}^{-2}(2x^3 - 6x)dx$

$= \int_{-2}^{2}(2x^3 + 6|x|)dx$

$= 2\int_0^2 6x dx = 2\left[3x^2\right]_0^2 = 24$

17.

$f(x) = \int (6x^2 - 2x - 1)dx$

$= 2x^3 - x^2 - x + C$ (단, C는 적분상수)

$f(1) = 2 - 1 - 1 + C = 3,\ C = 3$

$f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 3$

따라서 $f(2) = 16 - 4 - 2 + 3 = 13$

18.

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t = 3$에서의 점 P의 위치는

$x(3) = x(0) + \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (3t^2 + 6t - a)dt$

$= \left[t^3 + 3t^2 - at\right]_0^3 = 54 - 3a = 6$

따라서 $a = 16$

19.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (6x^2 - 4x + 3)dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$

$f(1) = 5$이므로 $2 - 2 + 3 + C = 5,\ C = 2$

$f(2) = 16 - 8 + 6 + C = 14 + C = 16$

20.

$\frac{1}{6}(2-0)^3 \times 2 + \frac{1}{6}(4-0)^3 = \frac{16}{6} + \frac{64}{6} = \frac{40}{3}$

21.

가속도 $a(t) = v'(t) = 12t^2 - 48,\ t^2 - 4 = 0$에서 $t = 2 = k$

$\int_0^2 |4t^3 - 48t|dt = \int_0^2 (-4t^3 + 48t)dt = \left[-t^4 + 24t^2\right]_0^2 = -16 + 96 = 80$

22.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 - 2x)dx = x^4 - x^2 + C$

$f(0) = 3$이므로 $C = 3,\ \therefore\ f(x) = x^4 - x^2 + 3,\ f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$

23.

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

그런데 $F(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하므로 $C_1 = C_2$

즉, $F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1 & (x \geq 0) \end{cases}$

그러므로 $F(2) - F(-3) = 21$에서

$\left(\frac{4}{3}k + C_1\right) - (-9 + C_1) = 21$

따라서 $k = 9$

[다른 풀이]

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(2) - F(-3) = \left[F(x)\right]_{-3}^{2} = \int_{-3}^{2} f(x)dx$

$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$

$= \int_{-3}^{0}(-2x)dx + \int_0^2 k(2x - x^2)dx$

$= \left[-x^2\right]_{-3}^{0} + k\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= 9 + \frac{4}{3}k = 21$

따라서 $k = 9$

24.

$\int_2^{-2}(x^3 + 3x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_2^{-2} = (4 - 8) - (4 + 8) = -16$

25.

곡선 $y = 3x^2 - x$와 직선 $y = 5x$의 교점의 x좌표는

$3x^2 - x = 5x$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 2$

구간 $[0, 2]$에서 직선 $y = 5x$가 곡선 $y = 3x^2 - x$보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$S = \int_0^2 \{5x - (3x^2 - x)\}dx$

$= \int_0^2 (6x - 3x^2)dx$

$= \left[3x^2 - x^3\right]_0^2$

$= 3(4 - 0) - (8 - 0)$

$= 4$

26.

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t = 0$에서 점 P의 위치가 0이므로

$v(t) = 3t^2 - 4t + k$에서

$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$

이때 $x(1) = -3$에서

$-1 + k = -3,\ k = -2$

따라서 $x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$이고,

$x(3) = 27 - 18 - 6 = 3$이다.

그러므로 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(3) - x(1) = 3 - (-3) = 6$

27. 두 함수의 넓이를 구하는 과정에서 $f(x) - g(x) = x^2 - 6x$이므로

y축에 수직인 직선으로 이등분 할 때, 이차함수는 대칭함수이므로 $k = 3$임을 알 수 있어야 한다.

두 함수의 교점은 $x^2 - 5x = x$의 실근이므로

$x^2 - 6x = x(x - 6) = 0$에서 $x = 0,\ x = 6$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{|1|}{6}(6-0)^3=36$

$x=k$로 이등분 되는 넓이는

$\int_0^k\{x-(x^2-5x)\}dx=\int_0^k(-x^2+6x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^k$

$=-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18$

$k^3-9k^2+54=0$

방정식을 풀면

	1	−9	0	54
3		3	−18	−54
	1	−6	−18	0

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$에서 $k=3,\ 3\pm3\sqrt{3}$

얻어진 값 중에서 열린구간$(0,\ 6)$에 포함되는 값은 3

$\therefore\ k=3$

28. $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+C$

$f(0)=C=2$이므로 $f(1)=1+1+C=4$

29.

$\int_1^3(4x^3-6x+4)dx+\int_1^3(6x-1)dx$

$=\int_1^3(4x^3+3)dx=\left[x^4+3x\right]_1^3=86$

30.

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와

$y=-2x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+2=-2x$, 즉 $ax^2+2x+2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\frac{1}{2}$이므로 접점 A의 x좌표는 -2이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로

접점 B의 x좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

31.

$\int_5^2 2t\,dt-\int_5^0 2t\,dt=\int_5^2 2t\,dt+\int_0^5 2t\,dt$

$=\int_0^5 2t\,dt+\int_5^2 2t\,dt=\int_0^2 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^2=4$

32.

$\int_0^1(3x^2+2)dx=\left[x^3+2x\right]_0^1$

$=(1+2)-(0+0)=3$

33.

$f(x)=\int(4x^3+4x+1)dx$

$=x^4+2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

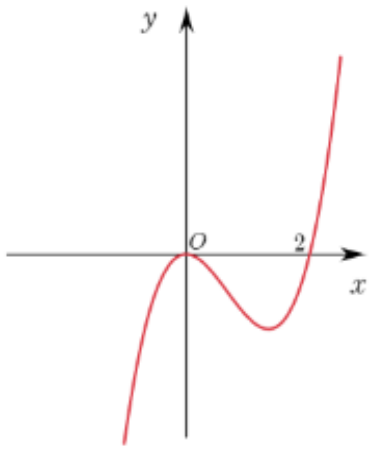
$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$

$f(2)=16+8+2+1=27$

34.

$y=x^3-2x^2=x^2(x-2)$이므로 좌표평면위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2|x^3-2x^2|\,dx$

$=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x\right]_0^2\right|$

$=\left|4-\frac{16}{3}\right|=\frac{4}{3}$

35.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3+x)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$에서

$f(2)=4+2+3=9$

36. 66

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결한다.

$g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$

$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$

$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$

$x\geq0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$\int_0^p g(x)=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}dx=\int_0^p(x^3+3px^2)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4=20$

$p>0$이므로 $p=2$이고, $f(x)=x^3-12x+1$

따라서 $f(5)=66$

37. ⑤

[출제의도] 함수의 미분가능성과 그래프를 활용하여 도형의 넓이를 추론한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로 $f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)=ak$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f'(k)=\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{ax-ak}{x-k}=a$

ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)

ㄴ. $g(x)=-x^2+4bx-3b^2$이라 하자.

직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고, 접점의 좌표는 $(k,\ g(k))$이다.

$g'(x)=-2x+4b$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(x-k)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(0-k)$

$k^2-3b^2=0$

$k>0,\ b>0$이므로 $k=\sqrt{3}b$

$k=3$이므로 $b=\sqrt{3}$이고 $a=g'(k)=-2k+4b=(4-2\sqrt{3})b$

$=-6+4\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서

$f(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})bx & (x<\sqrt{3}b)\\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\geq\sqrt{3}b)\end{cases}$이고

$f'(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})b & (x<\sqrt{3}b)\\ -2x+4b & (x\geq\sqrt{3}b)\end{cases}$

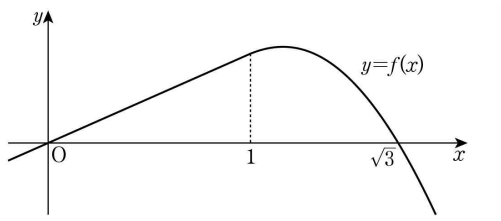
$f(k)=f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b)=f'(\sqrt{3}b)$이므로

$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2=-2\sqrt{3}b+4b$

따라서 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$f(x)=\begin{cases}\frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1)\\ -x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x\geq1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 만나므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4\sqrt{3}-6}{3}+\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$

$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\frac{4-2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38. [정답] ①

[출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (C는 적분상수)

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\int_0^x f(t)dt=\left[F(t)\right]_0^x=F(x)-F(0)$에서

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(2)=8-8+2+1=3$

39. [정답] ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=3x^2-12x+8$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로

$2k^3-6k^2=2k^2(k-3)=0$

에서 $k>0$이므로 $k=3$이고

직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$S_1=\int_0^3|f(x)-(-x+1)|dx$

$=\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx$

$S_2=\int_0^3|g(x)-(-x+1)|dx$

$=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

$S_1=S_2$에서

$\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

$\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$

$=\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$

$=-\frac{81}{4}+54-45+3=-\frac{33}{4}$

40. [정답] 32

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

조건 (나)에서 $|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+a$이고

조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서

극값을 가지므로 $g'(1)=-1+a=0$, $a=1$

$|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+1$에서 함수 $g(x)$는

$x=1$에서만 극값을 가지므로 $|b|\geq2$

함수 $g'(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속이므로

$g'(-2)=\lim_{x\to-2+}g'(x)=\lim_{x\to-2+}(-x+1)=3$ … ㉠

$g'(2)=\lim_{x\to2-}g'(x)=\lim_{x\to2-}(-x+1)=-1$ … ㉡

에서 $b\neq\pm2$이므로 $|b|>2$ … ㉢

조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$이고

$|x|\geq2$인 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=|g'(x)|\geq0$이므로

$f(x)=m(x-b)^2$ ($m>0$)

㉠, ㉡에 의하여

$f(-2)=|g'(-2)|=3$, $f(2)=|g'(2)|=1$ … ㉣

이고 $f(-2)>f(2)$에서

$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$

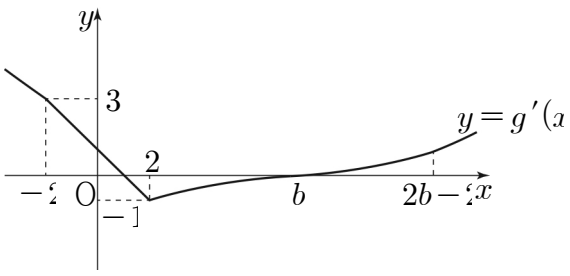
$b^2+4b+4>b^2-4b+4$에서 $b>0$

㉢에 의하여 $b>2$이고

조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$g'(x)=\begin{cases}m(x-b)^2 & (x\leq-2)\\ -x+1 & (-2<x<2)\\ -m(x-b)^2 & (2\leq x<b)\\ m(x-b)^2 & (x\geq b)\end{cases}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육



㉡에 의하여 $f(-2)=m(-2-b)^2=3$,

$f(2)=m(2-b)^2=1$

두 식을 연립하면

$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$

$b^2-8b+4=0$

에서 $b>2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$

조건 (나)에서 $g(0)=\int_0^0(-t+1)dt=0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)dt$에서

(i) $k<0$일 때

$x\le 0$에서 $g'(x)>0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)dt=-\int_k^0 g'(t)dt<0$

그러므로 $g(k)=0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$일 때

$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0$이므로

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(iii) $0<k\le 2$일 때

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^k(-t+1)dt$$

$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k$$

$$=-\frac{k^2}{2}+k=0$$

에서 $k=2$일 때 $g(k)=0$을 만족시킨다.

(iv) $k>2$일 때

$2<x<b$에서 $g'(x)<0$이므로

$\int_0^k g'(t)dt=0$이려면 $k>b$

$$\int_0^k g'(t)dt$$

$$=\int_0^2 g'(t)dt+\int_2^b g'(t)dt+\int_b^k g'(t)dt$$

$$=0-\int_2^b m(t-b)^2dt+\int_b^k m(t-b)^2dt$$

$$=-m\int_2^b(t^2-2bt+b^2)dt+m\int_b^k(t^2-2bt+b^2)dt$$

$$=-m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_2^b+m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_b^k$$

$$=-\frac{m}{3}(b^3-6b^2+12b-8)+\frac{m}{3}(k^3-3k^2b+3kb^2-b^3)$$

$$=-\frac{m}{3}(b-2)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3=0$$

에서 $(k-b)^3=(b-2)^3$

$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b=b-2$

그러므로 $k=2b-2=6+4\sqrt{3}$일 때

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(i) ~ (iv)에 의하여 $g(k)=0$을 만족시키는

모든 실수 k의 값의 합은

$0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$이므로 $p=8$, $q=4$

따라서 $p\times q=32$

41. 정답 ②

[해설]

(A의 넓이)−(B의 넓이)

$$=\int_0^2 f(x)dx-\left(-\int_2^3 f(x)dx\right)$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{9}{4}k$$

$\frac{9}{4}k=3$에서 $k=\frac{4}{3}$

42. 정답 ③

[해설]

실수 $a\,(a\ge 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도를 $v(t)$라 할 때

$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$

점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$이므로 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸며 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2(-t^4+t^3)dt=\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right]_0^2=-\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)$이므로 $t=\frac{1}{2}$에서 운동 방향을 바꾸며 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2=-\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이므로 $t=2$에서 운동 방향을 바꾸며 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2=\frac{4}{15}$$

이상에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

43. 정답 39

[해설]

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\ge g(4)$ …… ㉠

$|g(x)|\ge|g(3)|$ …… ㉡

가 성립한다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

(i) $g(4) \geq 0$일 때,
㉡에서 $x=4$일 때 $g(4) \geq |g(3)|$
㉠에서 $x=3$일 때 $g(3) \geq g(4)$
$\therefore\ |g(3)| \leq g(4) \leq g(3)$
$g(4) \geq 0,\ g(3) \geq 0$이므로 $g(3)=g(4)$
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(3)=g(4)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$과 $x=4$ 모두에서 극솟값을 가져야 한다. 그러나 $g(x)$는 삼차함수이고 극솟값은 많아야 하나이므로 모순이다.
(ii) $g(4)<0$일 때,
$x \to \infty$에 따라 $g(x) \to \infty$이므로 사잇값 정리에 의해 $x \geq 1$인 범위에서 $g(\alpha)=0$인 α가 존재한다.
㉡에서 $|g(3)| \leq |g(\alpha)|=0$이므로 $g(3)=0$이다.

$g(0)=0$이고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이므로

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-a)$ (a는 상수)

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3+a}{3}x^2+ax$

㉠에서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 $g'(4)=0$

$g'(x)=x^2-\frac{2}{3}(3+a)x+a$에서

$g'(4)=16-\frac{8}{3}(3+a)+a=8-\frac{5}{3}a=0$

$\therefore\ a=\frac{24}{5},\ g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$

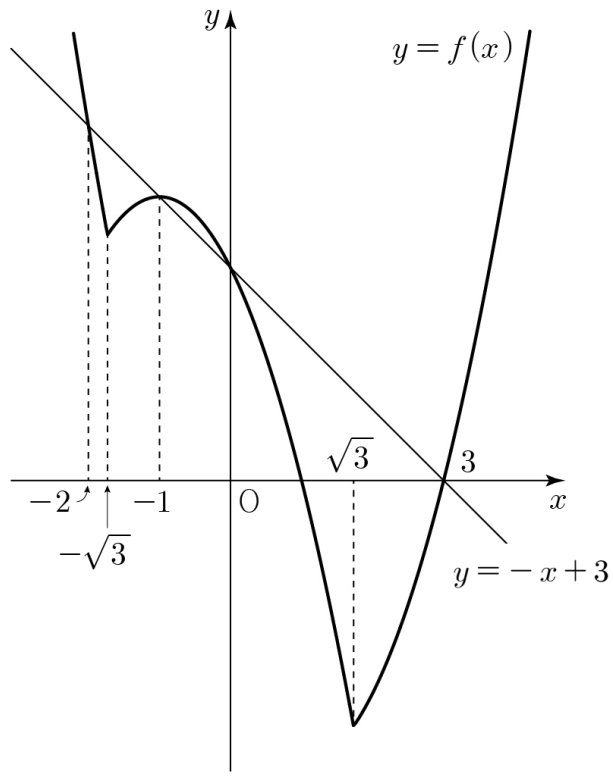
$g'(x)=\frac{1}{5}(5x-6)(x-4)$이므로

$f(9)=g'(9)=\frac{1}{5}\times 39\times 5=39$

44. [정답] 54
[해설]
$f(x)=|x^2-3|-2x$

$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x \leq -\sqrt{3} \text{ 또는 } x \geq \sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$

$x_1,\ x_4$는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여
$x_1+x_4=1,\ x_1x_4=-t-3$
$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2,\ x_4=3$
$x_1x_4=-t-3=-6,\ t=3$
$x_2,\ x_3$은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의 두 근이므로 $x_2=-1,\ x_3=0$



닫힌구간 $[0, 3]$에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}} \{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$

$+\int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}_{dx}$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$

$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$

따라서 $p\times q=\frac{27}{2}\times 4=54$

45. [정답] ①
[해설]
$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=0$
$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, $a,\ b$는 상수)
조건 (나)에서

$\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$ …… ㉠

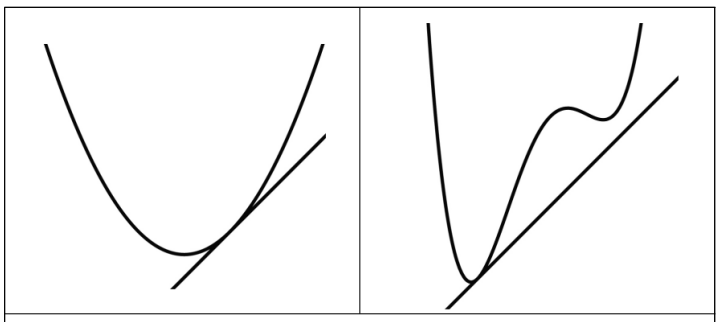
$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=2$를 대입하면
$f(3)+f(-1)=0$ …… ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$f(3)=6,\ f(-1)=-6$
$f(3)=2(9+3a+b)=6,\ 3a+b=-6$ …… ㉢
$f(-1)=-2(1-a+b)=-6,\ a-b=-2$ …… ㉣
두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2,\ b=0 f(x)=x(x-1)(x-2)$
따라서 $f(4)=24$

46. [정답] 182
[해설]
방정식 $g(x)=0$에서
$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로
$g(t)=0$
$x \neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서
$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.
그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다. 임의의

꿈을 현실로! 희망 부산교육

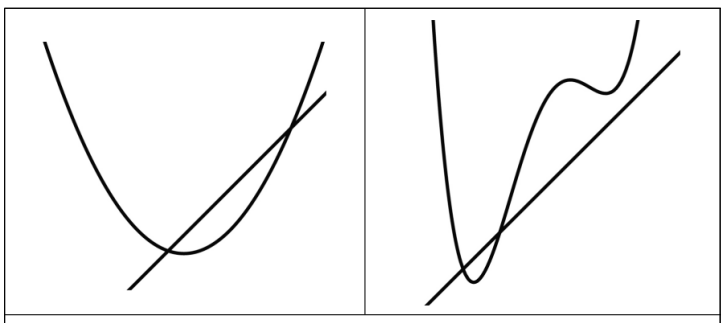
실수 s에 대하여 $h(s) \geq 1$이다.

(i) $h(s)=1$인 경우

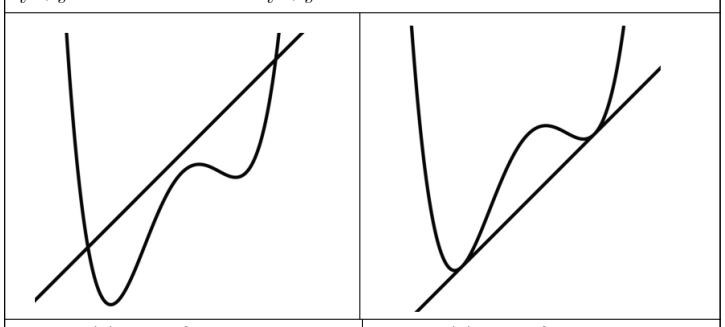


$\lim_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ii) $h(s)=2$인 경우



$\lim_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=0$



$\lim_{t \to s} h(t)=2$이므로 $\lim_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=0$

$\lim_{t \to s} h(t)=4$이 므 로 $\lim_{t \to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

(iii) $h(s) \geq 3$인 경우

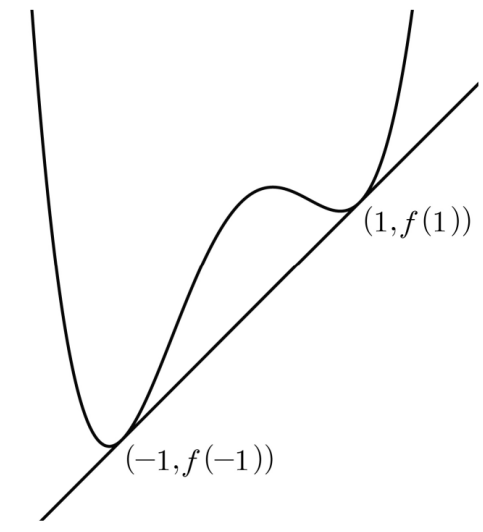
$\lim_{t \to s} h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 l이

두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$에서 접할 때

$\lim_{t \to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t \to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를 만족시킨다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a, 직선 l의 방정식을 $y=x+b$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$을

만족시키는 실수 α의 최솟값이 -1이므로

$-1 \leq x \leq 0$에서 $f(x) \geq 0$, $f(-1) \geq 0$

$f(-1)>0$이면 실수 α의 최솟값이 -1이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$\frac{d}{dx}\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx \geq 0$

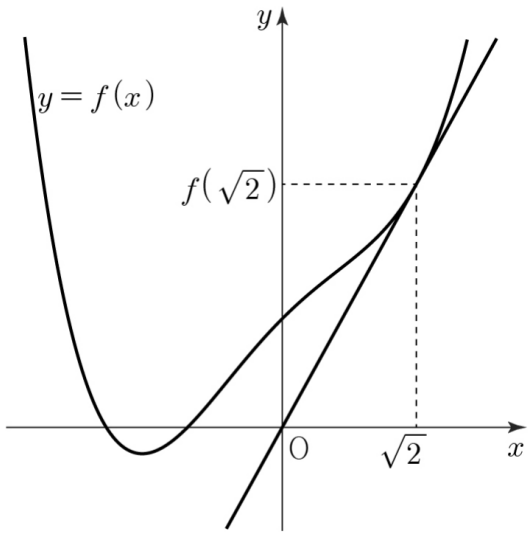
$f(x) \geq kx$이므로 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=kx$가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$이므로 그림과 같이

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$가

점 $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$=ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$

$=8a+\sqrt{2}$

$a=\frac{1}{7}$, $f(x)=\frac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\frac{1}{7}\times5^2\times7^2+6+1=182$

47. **정답** ⑤

두 점 P, Q의 위치를 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 할 때, 시작점이 1, 8이므로

$x_1(t)=\int v_1(t)dt=\int(3t^2+4t-7)dt=t^3+2t^2-7t+1$

$x_2(t)=\int v_2(t)dt=\int(2t+4)dt=t^2+4t+8$

두 점 사이의 거리는 $|x_1(t)-x_2(t)|=4$, $|t^3+2t^2-11t-7|=4$

$t^3+t^2-11t-7=4$, $t^3+t^2-11t-11=(t+1)(t^2-11)=0$

$t=\sqrt{11}$에서 거리가 4

$t^3+t^2-11t-7=-4$, $t^3+t^2-11t-3=(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t=-2\pm\sqrt{3}$은 모두 음수이므로 $t=3$에서 거리가 4

처음 거리가 4가 될 때, $t=3$

$\int_0^3|v_1(t)|dt=\int_0^3|3t^2+4t-7|dt$, $3t^2+4t-7=(3t+7)(t-1)$이므로

$\int_0^3|3t^2+4t-7|dt=\int_0^1(-3t^2-4t+7)dt+\int_1^3(3t^2+4t-7)dt$

$=\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$

$=(-1-2+7)+\{(27-1)+2(9-1)-7(3-1)\}=4+26+16-14=32$

48. **정답** 10

$x=1$을 대입하면, $\int_1^1 f(t)dt=0=f(1)-3$, $f(1)=3$

양변을 미분하면, $f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$, $f'(x)=4$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 4dx=4x+a$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$x=1$을 대입하면, $f(1)=4+C=3,\ C=-1,\ f(x)=4x-1$

$\int\{f(x)\mathrm{G}(x)+\mathrm{F}(x)g(x)\}dx=\int(8x^3+3x^2+1)dx$

$=2x^4+x^3+x+C$

$\mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x)=2x^4+x^3+x+C$

$\mathrm{F}(x)=2x^2-x+a,$

$\mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x)=2x^4+x^3+x+C$이므로 3차항과 2차항, 1차항, 상수항을 비교하면, $(2x^2-x+a)(x^2+x+b)=2x^4+x^3+x+C$

$\mathrm{G}(x)=x^2+x+b,\ \int_1^3 g(x)dx=\mathrm{G}(3)-\mathrm{G}(1)=12+b-(2+b)=10$

49. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

$f'(2)=0$이므로 실수 k에 대하여

$f(x)=x^2-4x+k$라 하자.

ㄱ. 만약 $f(2)\geq 0$이면 $x>2$일 때 $f(x)>0$이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_2^4 f(x)dx>0,$

즉 $\int_4^2 f(x)dx=-\int_2^4 f(x)dx<0$이므로 주어진

조건을 만족시키지 못한다. 즉 $f(2)<0$ (참)

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^3=-k+\frac{5}{3}$

$-k+\frac{5}{3}\geq 0$이므로 $k\leq\frac{5}{3}$

$\int_4^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^2=-2k+\frac{16}{3}$

$\int_4^3 f(x)dx-\int_4^2 f(x)dx=k-\frac{11}{3}$

$k\leq\frac{5}{3}$에서 $k-\frac{11}{3}\leq -2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)dx<\int_4^2 f(x)dx$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $k\leq\frac{5}{3}$이므로 $f(3)=k-3\leq-\frac{4}{3}<0$

$f(3)=f(1)<0$이므로 구간 $[1,3]$에서

$f(x)<0$이고, $n=1$ 또는 $n=2$일 때 곡선

$y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n,\ x=3$으로

둘러싸인 부분의 넓이가 $-\int_n^3 f(x)dx$와 같다.

즉 $\int_3^n f(x)dx=-\int_n^3 f(x)dx>0$ …… ㉠

$\int_4^5 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^5=k+\frac{7}{3}$

$k+\frac{7}{3}\geq 0$에서 $k\geq-\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=5+k\geq\frac{8}{3}>0$

구간 $[5,\infty)$에서 $f(x)>0$이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=5,\ x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\int_5^n f(x)dx$와 같다. 즉 $\int_5^n f(x)dx>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\int_4^3 f(x)dx\geq 0,\ \int_4^5 f(x)dx\geq 0$이면

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $-\frac{7}{3}\leq k\leq\frac{5}{3}$ …… ㉢

$\int_4^6 f(x)dx=2k+\frac{32}{3}$이므로 ㉢에서

$6\leq\int_4^6 f(x)dx\leq 14$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

50. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결한다.

$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$에서

$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)f(x)\,dt+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$=3f(x)\int_0^x(x-t)\,dt+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$x^2f(x)=6\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$x^2f(x)=6x\int_0^x f(t)\,dt-6\int_0^x tf(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$ …… ㉡

$f'(2)=4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1 이상이다. 함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하고, 최고차항의 계수를 $a\,(a\neq 0)$이라 하자.

㉡의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$a(2+n)=\frac{6a}{n+1}$

$(n+1)(n+2)=6,\ (n-1)(n+4)=0$

n은 자연수이므로 $n=1$

함수 $f(x)$가 일차함수이고 $f'(2)=4$이므로 $a=4$

$f(x)=4x+b$(단, b는 상수)라 하면 ㉡에서

$2x(4x+b)+4x^2=6\left[2t^2+bt\right]_0^x$

$12x^2+2bx=12x^2+6bx$ …… ㉢

모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립하므로 $b=0$

$f(x)=4x$이므로 $f(6)=24$

51. 정답 ②

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$x_1(t)=\int(t^2-6t+5)dt=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t,$

$x_2(t)=\int(2t-7)dt=t^2-7t$이므로 $f(t)=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$

$\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t=\frac{1}{3}t(t^2-12t+36)=\frac{1}{3}t(t-6)^2$

a는 극댓값이므로 $f'(x)=t^2-8t+12=(t-6)(t-2),\ a=2,\ b=6$

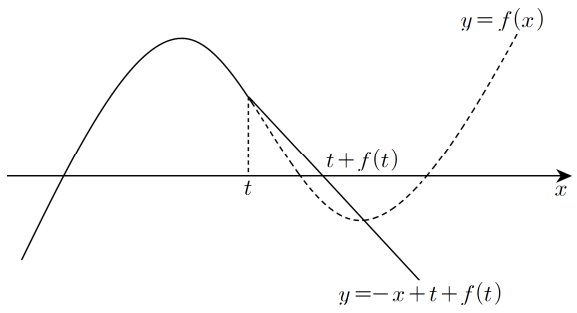
$\int_2^6|2t-7|dt=\int_2^{\frac{7}{2}}(7-2t)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$

$=\left[7t-t^2\right]_2^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6=\frac{49}{2}-\frac{49}{4}-10+36-42-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}$

$=49-16-\frac{49}{2}=\frac{66-49}{2}=\frac{17}{2}$

52. 정답 ③

꿈을 현실로!
희망 부산교육



$y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $h(t)$,

$h(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$이라 할 때,

$h'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

$f'(t)=-1$일 때, 극댓값이면서 최댓값을 갖는다.

$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x,\ f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6=-1$

$x^2-10x+21=0,\ x=3$에서 극대이므로

$\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}\times3\times18\right)^2$

$=\frac{9}{4}-15+27+18=\frac{9}{4}+30=\frac{129}{4}$

53.

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 $t(t\geq0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^6(3t^2+at)dt$

$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$

$=36\left(6+\frac{a}{2}\right)=0$

$a=-12$

$v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^6|3t^2-12t|dt$

$=\int_0^4(-3t^2+12t)dt+\int_4^6(3t^2-12t)dt$

$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6$

$=32+32=64$

54.

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\int_{2a}^x(a-t)f(t)dt$에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^x(a-t)f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분

가능하고, $\frac{d}{dx}\int_{2a}^x(a-t)f(t)dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$

$=\lim_{x\to2a+}x^2|x-b|$

$=4a^2|2a-b|$

$\lim_{x\to2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$

$=\lim_{x\to2a-}(-x^2|x-b|)$

$=-4a^2|2a-b|$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$\int_{2a}^x(a-t)f(t)dt=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\geq0)\end{cases}$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

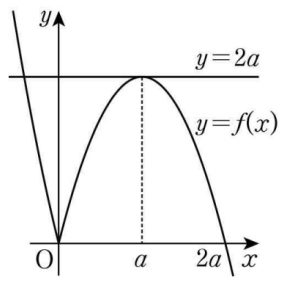
$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\geq0)\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\geq0)\end{cases}$

방정식 $g(f(x))=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$f(a)=-4a(a-2a)$

$=4a^2=2a$

$a=\frac{1}{2}$

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx=\int_{-1}^1f(x)dx$

$=\int_{-1}^0(4x^2-4x)dx+\int_0^1(-4x^2+4x)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$

$=4$

55.

점 P의 시각 $t(t\geq0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$

$=\int_0^t3(t-2)(t-a)dt$

$=\int_0^t\{3t^2-3(a+2)t+6a\}dt$

$=t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$

점 P가 $0<t<2,\ t>a$에서 양의 방향으로,

$2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고

$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이

한 번뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times6\times2=36$

56.

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$라 하자.

함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x (x-t)f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=3$에서

$G(2)=0,\ G'(2)=3$

$G(x)=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$에서

$G'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$G'(2)=\int_1^2 f(t)dt=3$

$G(2)=2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0$에서

$\int_1^2 tf(t)dt=2\int_1^2 f(t)dt=6$

따라서

$\int_1^2 (4x+1)f(x)dx=4\int_1^2 xf(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=4\times 6+3=27$

57.

$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\geq 0$

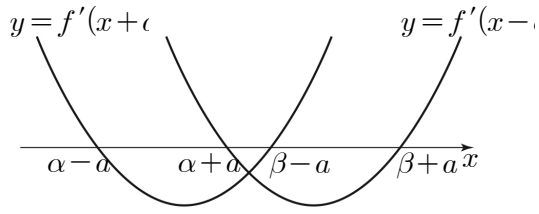
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



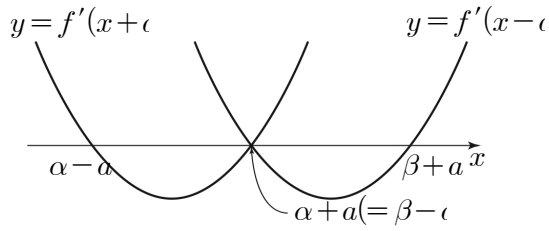
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a,\ x=\alpha+a,\ x=\beta-a,\ x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	+	0	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a,\ x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\frac{13}{2}-\frac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

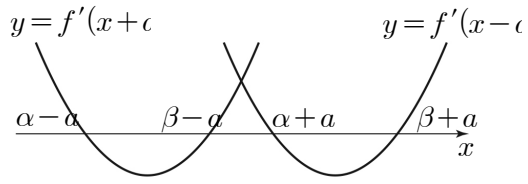
$4a=6$에서 $a=\frac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	+	0	−	0	+	+	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a,\ x=\beta-a,\ x=\alpha+a,\ x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\int(3x^2-21x+30)dx$

$=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x-\frac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{21}{2}+30-\frac{1}{2}\right)=30$

58.

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$x_1(t)=\int_0^t (2-t)dt=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t=2t-\frac{1}{2}t^2$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$2t-\frac{1}{2}t^2=0,\ t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$

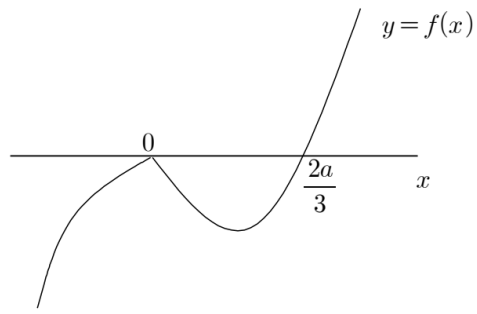
$t=4$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

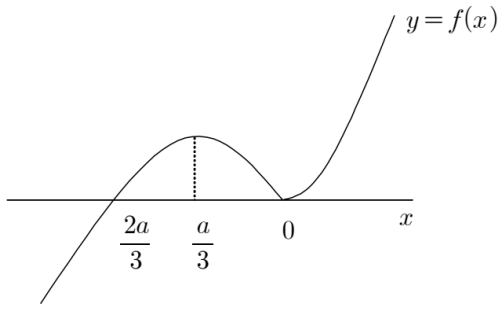
이므로
출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아
올 때까지 점 Q가 움직인 거리는
$\int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3tdt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4 = 24$

59.
ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x) = -f(x)$
$x>0$일 때 $g'(x) = f(x)$
그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\} = \lim_{x\to 0+} f(x)$
$-f(0) = f(0), \quad 2f(0) = 0$
$f(0) = 0$ (참)

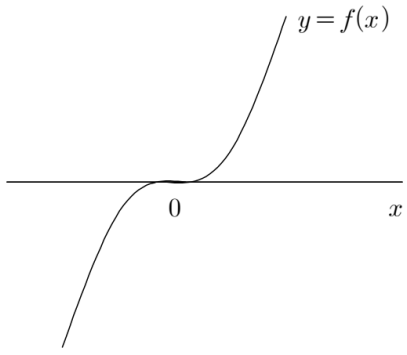
ㄴ. $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로
$g(x) = x^2(x-a)$(단, a는 상수)
로 놓으면
$g'(x) = 2x(x-a) + x^2$
$= x(3x-2a)$
(i) $a>0$일 때
$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0) \end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



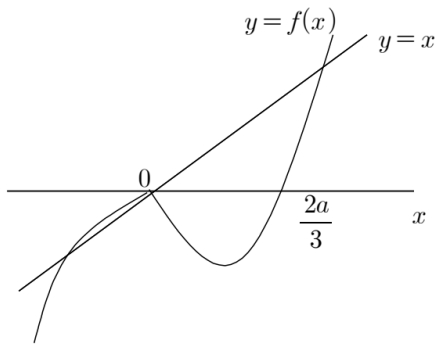
(ii) $a<0$일 때
$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0) \end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



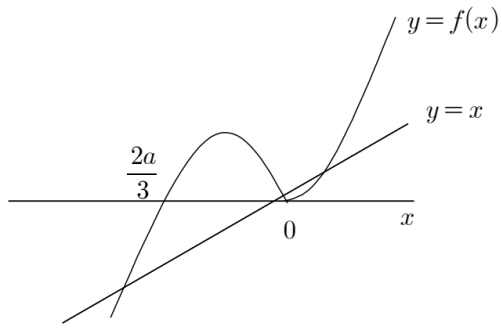
(iii) $a=0$일 때
$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



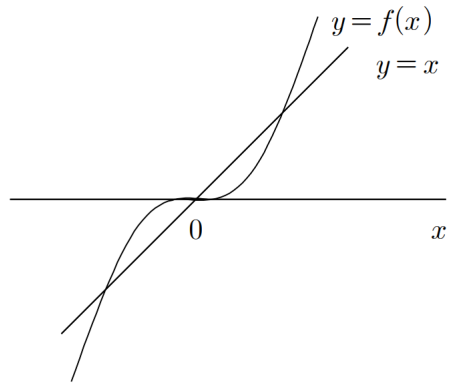
(거짓)
ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우
$f(1) = 3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서
$0<a<\frac{1}{2}$
또한, $x<0$일 때
$f'(x) = -(3x-2a) - 3x = -6x+2a$
이므로
$\lim_{x\to 0-} f'(x) = 2a$
이때 $0<2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(ii) ㄴ. (ii)의 경우
$f(1) = 3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서
$-\frac{1}{2}<a<0$
또한, $x>0$일 때
$f'(x) = (3x-2a) + 3x = 6x-2a$
이므로
$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -2a$
이때 $0<-2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(iii) ㄴ. (iii)의 경우
$f(1) = 3$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른풀이]
ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$0 < a < \frac{1}{2}$이고

① $x < 0$일 때, $-x(3x-2a) = x$

$-3x+2a = 1$, $x = \frac{2a-1}{3}$

② $x \geq 0$일 때, $x(3x-2a) = x$

$x(3x-2a-1) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = \frac{2a+1}{3}$

따라서 $2 < f(1) < 4$일 때,

방정식 $f(x) = x$은 서로 다른 실근

$\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

60.

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이면

$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)|dt$

$= \int_x^{x+1} f(t)dt$

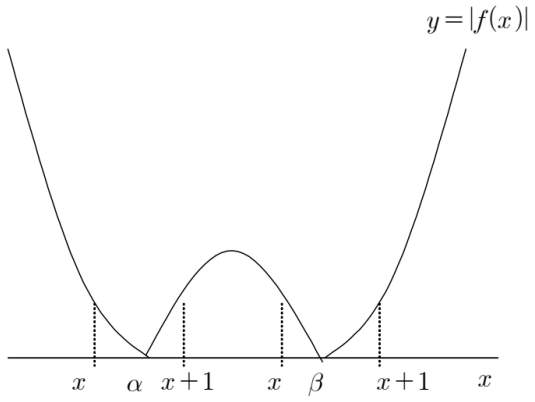
이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha < \beta)$라 하면

함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x = 1$, $x = 4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1) = 0$, $g'(4) = 0$이다.



(i) $x < \alpha < x+1$일 때

$g(x)$

$= \int_x^{x+1} |f(t)|dt$

$= \int_x^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{x+1} \{-f(t)\}dt$

$= -\int_{\alpha}^{x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt$

$= -\int_{\alpha}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt - \int_{\alpha}^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$= -\int_{\alpha}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt - \int_{\alpha-1}^{x} 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta) - 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1) = -2(1-\alpha)(1-\beta) - 2(2-\alpha)(2-\beta)$

$= -6\alpha + 6\beta - 4\alpha\beta - 10 = 0$

$3\alpha + 3\beta - 2\alpha\beta - 5 = 0 \cdots\cdots$㉠

(ii) $x < \beta < x+1$일 때

$g(x)$

$= \int_x^{x+1} |f(t)|dt$

$= \int_x^{\beta} \{-f(t)\}dt + \int_{\beta}^{x+1} f(t)dt$

$= \int_{\beta}^{x} f(t)dt + \int_{\beta}^{x+1} f(t)dt$

$= \int_{\beta}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_{\beta}^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$= \int_{\beta}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_{\beta-1}^{x} 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(4) = 2(4-\alpha)(4-\beta) + 2(5-\alpha)(5-\beta)$

$= 82 - 18\alpha - 18\beta + 4\alpha\beta = 0$

$9\alpha + 9\beta - 2\alpha\beta - 41 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha\beta = \frac{13}{2}$이므로

$f(0) = 2\alpha\beta = 2 \times \frac{13}{2} = 13$

61.

$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$

$f(1) - f(0) = f(2) - f(0) = 0$

$f(0) = f(1) = f(2) = k$(k는 상수)

$f(x) = x(x-1)(x-2) + k = x^3 - 3x^2 + 2x + k$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

따라서 $f'(1) = -1$

62.

함수 $g(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하므로 $x = 0$에서 연속이다.

$g(0) = 0$이므로 $\lim_{x \to 0-} g(x) = f(2) = 0$

$f(x) = (x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하면

$f(x+2) = x(x+2-p)$

$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 2 - p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{F(h) - F(0)}{h}$

$= F'(0) = 0$

$g'(0) = 2 - p = 0, \quad p = 2$

$f(x) = (x-2)^2$

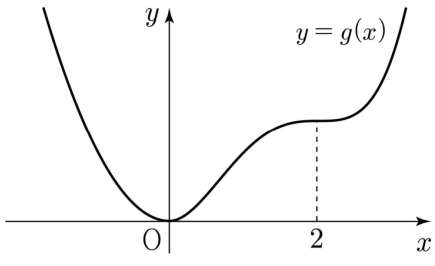
그러므로

$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \geq 0) \end{cases}$ $g'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x-2)^2 & (x > 0) \end{cases}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a) = 0$인 경우

$h(x) = g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x = k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0 < g(a) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(a)$인 경우 방정식 $h(x) = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $\lim_{x \to \alpha-} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} \neq \lim_{x \to \alpha+} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha}$

$\lim_{x \to \beta-} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta} \neq \lim_{x \to \beta+} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta}$

함수 $h(x)$는 $x = \alpha$, $x = \beta$에서 미분가능하지 않다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면

$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$ $x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

63.

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(ⅰ) $h(x)=ax^2(x-3)$(a는 상수)라 하면 $g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순

(ⅱ) $h(x)=ax(x-3)^2$(a는 상수)라 하면 $g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$g'(x)=f(x)$

$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$\int_0^3|f(x)|dx$

$=3\int_0^3|(x-1)(x-3)|dx$

$=3\int_0^1(x-1)(x-3)dx-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx$

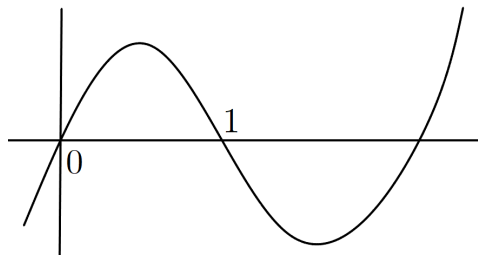
$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$

$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$

64.

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$이므로

구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)>0$이다.

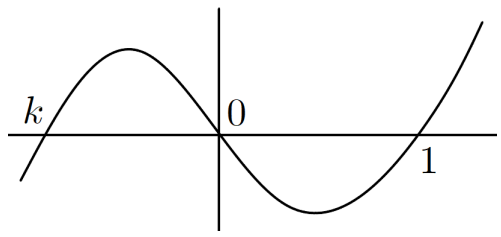


$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$ 위의 그래프에서

$\int_{-1}^0 f(x)dx<0$이므로 음수 빼기 양수는 음수 이므로

$g(-1)<0$(참)

ㄴ. $g(-1)>0$이면 ㄱ의 결과에 반대이므로 구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)<0$이다.



$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-k)dx$

$=2\int_0^1-(k+1)x^2dx$

$=-2\left[\frac{k+1}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{2(k+1)}{3}$

$\therefore\ g(-1)=-\frac{2(k+1)}{3}>0$이므로 $k<-1$을 만족한다.

(참)

ㄷ. $g(-1)$이 양수이면 ㄴ에서의 그래프와 같으므로

$g(-1)=-\frac{2(k+1)}{3}>1$에서 $k<-\frac{5}{2}$

$g(0)=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1 x(x-1)(x-k)dx$

$=2\int_0^1\{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}+\frac{k}{2}\right)=2\times\frac{3-4k-4+6k}{12}$

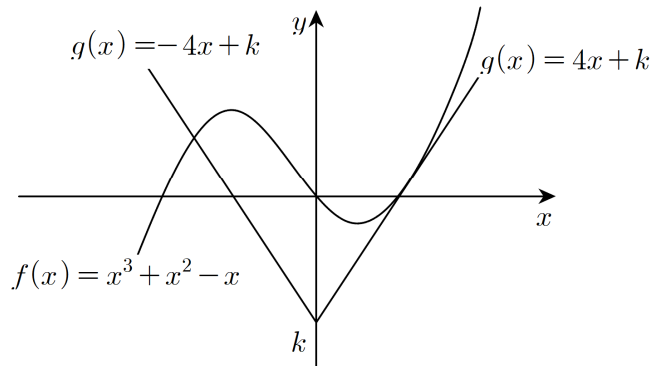
$=\frac{2k-1}{6}$

$k<-\frac{5}{2}$이므로 $\frac{2k-1}{6}<\frac{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1}{6}=-1$(참)

65. .

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1+3-9}{27}=-\frac{5}{27}$, $f(-1)=-1+1+1=1$



얻어진 극점을 이용해서 그래프를 그려보면 위의 그림과 같다.

두 점에서 만나는 경우는 위의 그림과 같이 $g(x)=4x+k$가 $f(x)=x^3+x^2-x$와 접할 때이다.

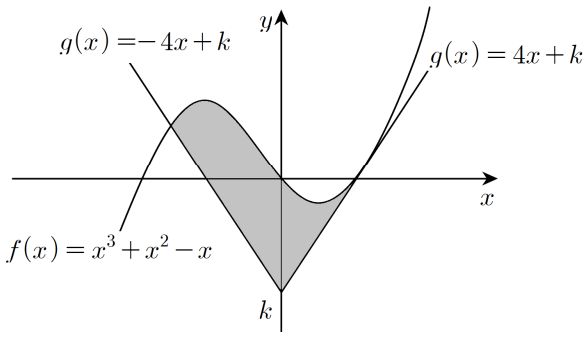
꿈을 현실로! 희망 부산교육

접점을 α라 할 때, $\begin{cases} 4\alpha+k=\alpha^3+\alpha^2-\alpha \\ 4=3\alpha^2+2\alpha-1 \end{cases}$

$3\alpha^2+2\alpha-5=(3\alpha+5)(\alpha-1)=0$에서

$\alpha>0$이므로 $\alpha=1$

$4+k=1+1-1,\ \therefore\ k=-3$



위의 그림에서 음수인 교점은 $x^3+x^2-x=-4x-3$의 실근이므로

$x^3+x^2+3x+3=(x^2+3)(x+1)=0$에서 교점의 x좌표는 $x=-1$

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2-x)-(-4x-3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-3\right)=\frac{-3+4-18+36}{12}=\frac{19}{12}$$

$$\int_{0}^{1}\{(x^3+x^2-x)-(4x-3)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3$$

$$=\frac{3+4-30+36}{12}=\frac{13}{12}$$

$\therefore\ \frac{13}{12}+\frac{19}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3},\ \therefore\ 30S=80$

66.

$f(x)=x^2+ax+b$라 할 때, $f'(x)=2x+a$

$x(2x+a)-3x^2-3ax-3b=-x^2+\ \cdots$이므로 $f(x)$는 3차

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 할 때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x(3x^2+2ax+b)-3x^3-3ax^2-3bx-3c=2x^2-8x$

$(2a-3a)x^2+(b-3b)x-3c=2x^2-8x$에서 $c=0$

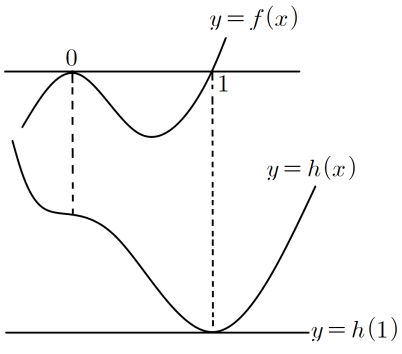
$-a=2,\ -2b=-8,\ \therefore\ a=-2,\ b=4,\ c=0$

$\therefore\ f(x)=x^3-2x^2+4x$이므로 $f(1)=3$

67.

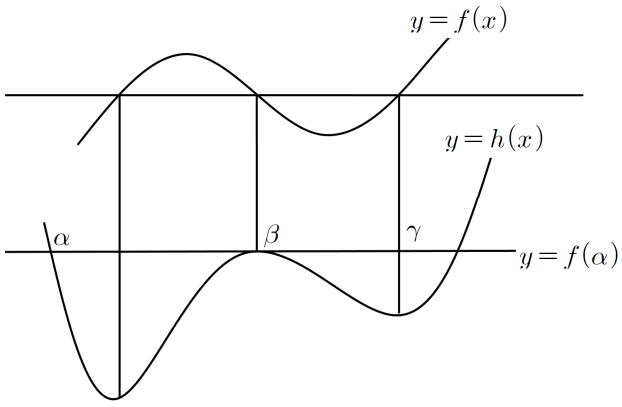
ㄱ. $h(x)=\int_t^x f(s)ds$라 할 때, $h'(x)=f(x)=x^2(x-1)$이므로

도함수에 부호에 맞게 $y=h(x)$의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



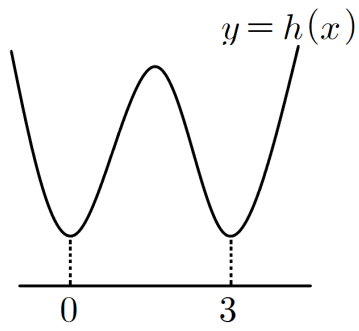
$g(1)$은 방정식 $h(x)=\int_1^x f(x)=0$, 다시 말 해 $h(x)=h(1)$의 실근의 개수이므로 그림에서처럼 $g(1)=1$(참)

ㄴ. $f(x)=0$의 그래프에 맞게 $y=h(x)$의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



그림과 같이 $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$일 때, $h(x)=0$의 실근이 3개이므로 $g(a)=3$을 만족하는 t값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$을 만족하기 위해 $t<b$ 또는 $t>b$에서 $g(t)=4,\ t=b$일 때, $g(b)=2$가 되어야 하고 이를 만족하는 그림은 아래 그림과 같다.



$h(0)=k$라 할 때, $f(x)$의 최고차항 계수가 1이므로 $h(x)$의 최고차항 계수는 $\frac{1}{4}$이고, $h(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2+k$

$f(x)=h'(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2+\frac{1}{2}x^2(x-3)$

$f(4)=\frac{1}{2}\times4\times1+\frac{1}{2}\times16\times1=2+8=10$

68.

두 부분의 넓이가 같으므로 $\int_0^2\{x^3+x^2-(-x^2+k)\}dx=0$

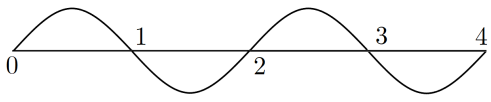
$\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2=4+\frac{16}{3}-2k=0$

$2k=\frac{28}{3},\ \therefore\ k=\frac{14}{3}$

69.

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는 $f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이므로

주어진 조건에 따라 최소가 $x=2$에서 0이 되도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



$\int_0^1 f(x)dx=\frac{6}{6}(1-0)^3=1$

$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

70.

$t\geq2$일 때, $v(t)=\int a(t)dt=\int(6t+4)dt=3t^2+4t+C$

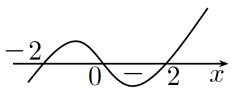
$t=2$일 때, 속도는 $v(2)=16-16=0$이므로 $12+8+C=0,\ C=-20$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^3|v(t)|dt$

$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^2|2t^3-8t|dt+\int_2^3|3t^2+4t-20|dt$

$2t^3-8t=2t(t-2)(t+2)$

꿈을 현실로!
희망 부산교육



$(t-2)(3t+10)<0$, $-\frac{10}{3}<t<2$이므로 구간 $[2, 3]$에서 양수임을 알 수 있다.

$\int_0^2 |2t^3-8t|dt+\int_2^3 |3t^2+4t-20|dt$

$=\int_0^2 (-2t^3+8t)dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)dt$

$=\left[-\frac{1}{2}t^4+4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3=-8+16+(27-8)+2(9-4)-20$

$=8+19+10-20=17$

71.

구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로

$g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 $S=\int_0^2 3x(x-2)^2dx$

$=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$

$=12-32+24=4$

72.

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$에서 $x=-2$, $x=2$가 방정식 $g'(x)=0$의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$와 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$이므로 $g'(x)$, x^2-4, $|f(x)|-a$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	+	0	+
x^2-4	+	0	−	0	+
$\|f(x)\|-a$	+	0	−	0	+

함수 $|f(x)|-a$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해

$|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$

두 실수 m, n에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$이라 하면 $m\neq 0$이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$가 성립한다.

(i) $2m+n=-2m+n$인 경우

$m=0$이 되어 모순이다.

(ii) $2m+n=-(-2m+n)$인 경우

$n=0$이고 $|m|=\frac{a}{2}$이다.

(i), (ii)에서 $|f(x)|=|mx|=\frac{a}{2}|x|$

$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$

$=\int_0^2 (t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $|t|=t$이므로

$g(2)=\frac{a}{2}\int_0^2 (t^2-4)(t-2)dt$

$=\frac{a}{2}\int_0^2 (t^3-2t^2-4t+8)dt=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2$

$=\frac{a}{2}\times\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)=\frac{10}{3}a$

조건 (나)에서 $g(2)=5$이므로 $\frac{10}{3}a=5$, $a=\frac{3}{2}$

$g(0)=\int_0^0 (t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt=0$이고

닫힌구간 $[-4, 0]$에서 $|t|=-t$이므로

$g(-4)=\int_0^{-4} (t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\frac{3}{4}\int_0^{-4} (t^2-4)(-t-2)dt=\frac{3}{4}\int_0^{-4} (-t^3-2t^2+4t+8)dt$

$=-16$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

73.

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b |f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

$=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

74.

$f(x)=3x+a$이므로

$g(x)=\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$

$=\int_2^x (3t^2+4at+a^2)dt$

$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_2^x$

$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$위의

어떤 점에서의 접선이 x축이므로

$h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

(i) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를

인수로 가진다.

(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

$a=-6$이므로

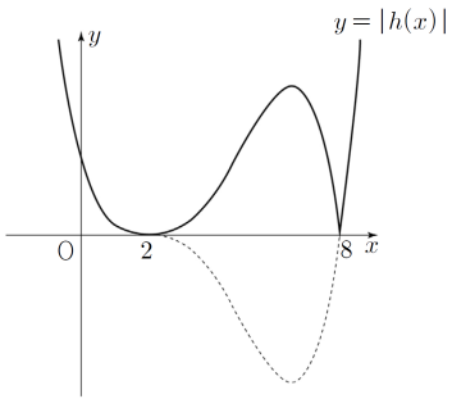
$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$

$=3(x-2)^3(x-8)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를 인수로 갖는 경우

$4+4(a+1)+(a+2)^2$

$=a^2+8a+12$

$=(a+2)(a+6)=0$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$

$a=-6$이면 (a)와 같다.

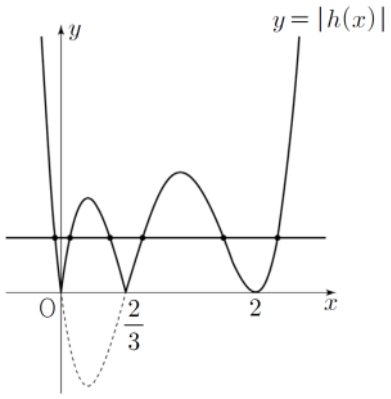
$a=-2$이면

$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$

$=x(3x-2)(x-2)^2$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ii) $k=-\frac{a}{3}(a\neq -6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\frac{a}{3}$를

인수로 가진다.

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

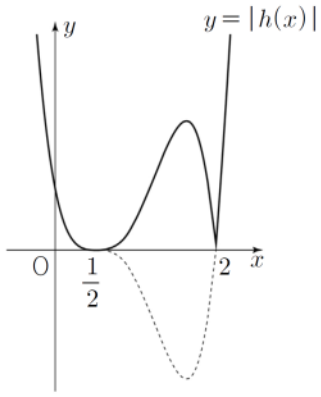
에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$

$=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\frac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우

$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$

$a+1=-k,\ (a+2)^2=k^2$

$(a+1)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{243}{8}$이므로

$p=8,\ q=243$에서 $p+q=251$

75.

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

이므로

조건 (가)에서

$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0\{-f(x+1)+1\}dx$

$=1-\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{6}$

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

$\int_{-1}^1 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$

이므로

$\int_{-3}^2 g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$=2\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx=2\times 1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

76.

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\neq 3,\ a\neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3,\ x=5,\ x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

x	…	3	…	5	…
$g'(x)$	−	0	−	0	+
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	3	…	5	…
$g'(x)$	−	0	+	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

77.

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$t<2$일 때 $v(t)<0$

$t=2$일 때 $v(2)=0$

$t>2$일 때 $v(t)>0$

$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)\,dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$ (참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t-6$

$6t-6=12,\ t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^3|3t^2-6t|\,dt$

$=-\int_0^2(3t^2-6t)\,dt+\int_2^3(3t^2-6t)\,dt$

$=4+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

78.

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ 0,\ \beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$

$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

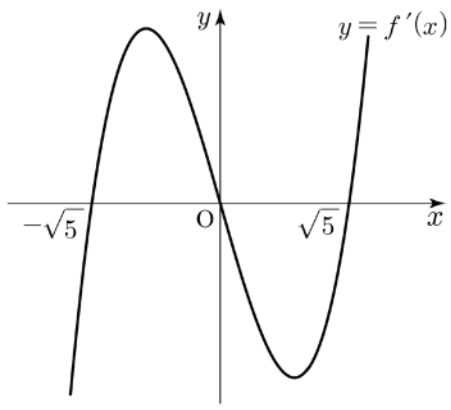
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$f(0)=9,\ C=9$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

$\alpha=-\sqrt{5}$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

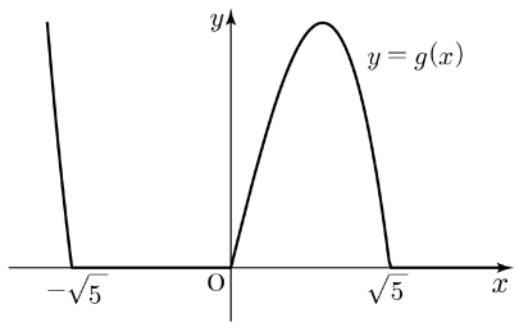


함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로

함수

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\ge 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_0^{10}g(x)\,dx=-2\int_0^{\sqrt{5}}f'(x)\,dx$

$=-2\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$

$=-2\times(-16-9)=50$

79.

가속도는 $v'(t)=-12t^2+24t$,

$v'(k)=12$이므로 $-12k^2+24k=12$

$12k^2-24k+12=12(k-1)^2=0,\ k=1$

점 P가 움직인 거리는

$\int_3^4|-4t^3+12t^2|\,dt=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$

$(4^4-3^4)-4(4^3-3^3)=4\times3^3-3^4=27$

80.

주어진 조건식에 $x=1$을 대입하면, $f(1)=2+a+3a=4a+2$

주어진 조건식의 양변을 미분하면,

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x),\ f'(x)=6x+2a$

$f(x)=3x^2+2ax+C,\ f(1)=2a+3+C=4a+2,\ C=2a-1$

$f(x)=3x^2+2ax+2a-1$

$f(1)=\int_0^1f(t)dt$이므로

$\int_0^1(3x^2+2ax+2a-1)dx=\left[x^3+ax^2+(2a-1)x\right]_0^1$

$=3a=f(1)=4a+2,\ \therefore\ a=-2$

$f(x)=3x^2-4x-5,\ \therefore\ f(3)=27-12-5=10$

$\therefore\ a+f(3)=-2+10=8$

81.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수이므로 $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x,\ f(x)=x^3-3x^2+f(0)$

$f(x+p)-f(p)=(x+p)^3-3(x+p)^2-p^3+3p^2$

$=x^3+3px^2+3p^2x-3x^2-6px=x^3+3(p-1)x^2+3p(p-2)x$

$(3x+3p)(x+p-2)$

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3+3(p-1)x^2+3p(p-2)x & (x>0)\end{cases}$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x\le 0)\\ 3x^2+6(p-1)x+3p(p-2) & (x>0)\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x\le 0)\\ 3(x+p)(x+p-2) & (x>0)\end{cases}$

ㄱ. $p=1$일 때, $x>0$에서 $g'(x)=3(x+1)(x-1)$이므로 $g'(1)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}g'(x)=3p(p-2)$, $\lim_{x\to 0-}g'(x)=0$이므로

$3p(p-2)=0$을 만족하는 양수 p는 2 한 개다.(참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{1}^{0}(x^3-3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{1}{4}(0-1)-(0-(-1))=\frac{3}{4}$

$\int_{0}^{1}\{x^3+3(p-1)x^2+3p(p-2)x\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p(p-2)}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}+p-1+\frac{3}{2}p^2-3p$

$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$

$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\frac{3}{2}p^2-2p=\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$

$p=2$일 때, $\int_{-1}^{1}g(x)dx=2$이고 위의 결과로부터 증가한다. 그러므로 $\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge 0$ (참)

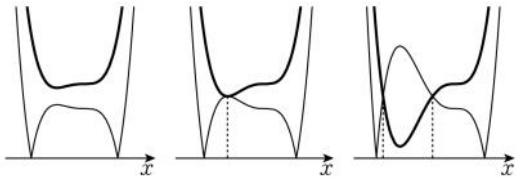
82. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=4x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=12x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=4x^3+ax^2$에서 $\int_{0}^{x}f(t)dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$이므로

$g(x)=\begin{cases}x^4+\frac{a}{3}x^3+5 & (x<c)\\ \left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$

곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}$은 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$를 y축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a의 값에 따른 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$와 곡선 $y=\left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right|$의 개형 중 c의 개수가 0, 1, 2인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가 1] [c의 개수가 2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$ (→㉠)의 극솟값과 함수 $y=-\left(x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right)$ (→㉡)의 극댓값이 서로 같아야 한다.

㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x)$, $-f(x)$이고

$f(x)=x^2(4x+a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{a}{4}$ ($a\ne 0$)

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\frac{a}{4}$에서 극값을 갖고 $c=-\frac{a}{4}$이다.

$\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3-\frac{13}{3}\right\}$

이를 정리하여 풀면 $\begin{cases}a=4\\ c=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=-4\\ c=1\end{cases}$

그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=2$,

$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=\frac{14}{3}$

따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

83. $f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면 $f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0$, $f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로

$x(x+1)(x+2)=0$, $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

$-2\le x\le -1$에서 $x^3+3x^2+2x\ge 0$이고

$-1\le x\le 0$에서 $x^3+3x^2+2x\le 0$이므로

$S=\int_{-2}^{0}\left|x^3+3x^2+2x\right|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^{0}\{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$

따라서 $4S=2$

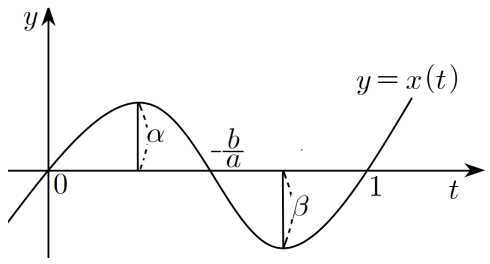
84. ㄱ. 참

$\int_{0}^{1}v(t)dt=x(1)-x(0)=0$

ㄴ. 거짓

$\int_{0}^{1}|v(t)|dt=2$이므로 구간$(0,\ 1)$에서 $v(t)$가 음수인 구간과 양수인 구간이 반드시 존재한다.

이 때, 극댓값을 α, 극솟값을 $-\beta$라 할 때, $y=x(t)$의 그래프를 그려보면 아래의 그림과 같다.



$\int_{0}^{1}|v(t)|dt$는 t가 움직인 거리이므로 위치가 0에서 α가 되고 그 후에 $-\beta$가 된 후 다시 0이 되었으므로

$\int_{0}^{1}|v(t)|dt=\alpha+\alpha+\beta+\beta=2\alpha+2\beta=2$

$\alpha+\beta=1$그러므로 $\alpha<1$, $-\beta<-1$,

$\therefore\ \left|x(t_1)\right|\le 1$

ㄷ. 참

ㄴ의 결과에서 $\alpha\le 1$이므로 $\beta=1-\alpha\ge 0$

$x(t)$의 극솟값은 $-\beta$이므로 음수가 된다.

열린구간 $(0,\ 1)$에서 (극댓값)×(극솟값)<0이므로 극대점과 극소점 사이에 $x(t_2)=0$을 만족하는 t_2가 존재한다.

85. 주어진 조건식에 $x=0$을 대입하면, $f(1)=b$

(가) 조건에서 $f(1)=b=1$

주어진 조건식의 양변을 미분하면 $f'(x+1)-f(x)-xf'(x)=a$

$x=0$을 대입하면, $f'(1)-f(0)=a$에서 $f'(1)=a$

(가) 조건에서 미분 가능한 함수이므로 $f'(1)=1=a$

$f(x+1)=xf(x)+x+1$

$\int_{0}^{1}f(x+1)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}\{xf(x)+x+1\}dx$

$=\int_{0}^{1}\{x^2+x+1\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$

86.

$a=\int_0^1 |f(t)|dt$ 라 하면 $a>0$ 이고

$f(x)=x^3-4ax$

$f(1)=1-4a>0$ 에서 $a<\frac{1}{4}$

따라서 $0<a<\frac{1}{4}$ 이다.

$f(x)=x(x^2-4a)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{a}$

$0<x<2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x)<0$ 이고 $x\geq 2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x)\geq 0$ 이다.

$0<a<\frac{1}{4}$ 에서 $2\sqrt{a}<1$ 이므로

$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$

$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^1(t^3-4at)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$

$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$

$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서

$32a^2-12a+1=0,\ (4a-1)(8a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{8}$ 이고

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$

이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times 2=7$

87.

$\int_0^a |v(t)|\,dt=s_1,\ \int_a^b |v(t)|\,dt=s_2,$

$\int_b^c |v(t)|\,dt=s_3$ 이라 하자.

점 P는 출발한 후 시각 $t=a$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$-8=\int_0^a v(t)dt=-s_1$ 에서 $s_1=8$

점 P의 시각 $t=c$ 에서의 위치가 -6 이므로

$-6=\int_0^c v(t)dt=(-8)+s_2-s_3$

에서 $s_2-s_3=2$ …… ㉠

$\int_0^b v(t)dt=\int_b^c v(t)dt$ 이므로

$-8+s_2=-s_3$, 즉 $s_2+s_3=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2=5,\ s_3=3$

따라서 구하는 거리는 5이다.

88.

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x)=\int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$는 미분가능하다.

$g(x)\geq g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x)<g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 은 $g(x)-g(a)\neq 0$인 모든 x에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$를 만족시키는 x의 값을 k라 하면,

$g(k)=g(a)$ 이므로

$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

(ⅰ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 같을 때

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고 $f(k)=0$일 때

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고 $f(k)\neq 0$일 때,

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이므로

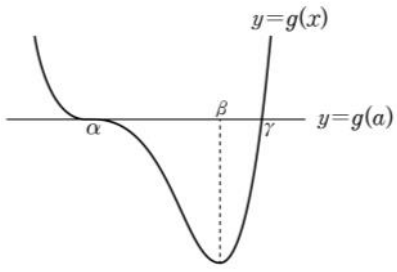
$g(x)-g(a)=0,\ g'(x)=f(x)\neq 0$

인 x가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

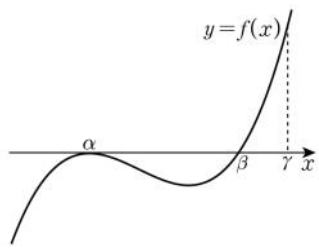
그러므로 사차함수 $y=g(x)$는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(a)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$인 방정식 $g(x)-g(a)=0$의 근을 α, 함수 $g(x)$가 극솟값을 가질 때의 x의 값을 β라 하면 α, β의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\alpha<\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha),\ \beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로

$h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 $h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0\neq 27$

이므로 $a\neq 2$

$\beta=2$ 이면

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$ 이고,

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로

$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$ 이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\int_2^3 f(s)ds$

$= \int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$

$= \int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$

$= \left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$

$= 65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$

$= 2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

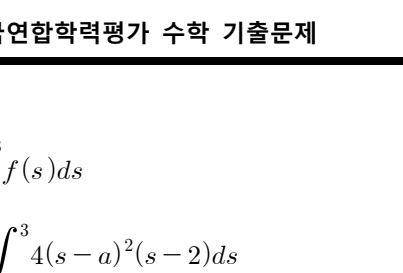
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

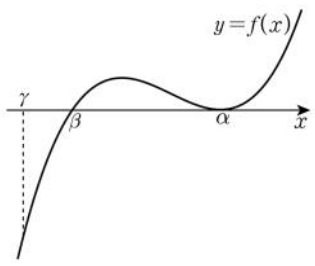
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq 3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq 0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq 27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times 36\times 3=432$

89.

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$ 에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$,

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$ 이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2 은 $f(x)$ 의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$ (단, k 는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$

$=x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$ 가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$ 에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$ 이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$ 이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$=x^3+(a+3)x^2+2ax$

조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2 의 계수는 0 이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$ 에서 $f(2)=8-12=-4$

90.

점 P 가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0 이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$ 또는 $t=3$

$0\le t<1$ 에서 $v(t)>0$,

$1<t<3$ 에서 $v(t)<0$,

$t>3$ 에서 $v(t)>0$

이므로 점 P 는 $t=1$ 일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$ 일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.

그러므로 점 P 가 A 에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A 로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P 가 $t=1$ 부터 $t=3$ 까지 이동한 거리의 2 배이다.

따라서 구하는 값은

$2\int_1^3 |v(t)|\,dt=2\int_1^3(-3t^2+12t-9)dt$

$=2\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3$

$=8$

[다른 풀이]

점 P 가 다시 A 로 돌아올 때의 시각을 $t=a$ (단, $a>1$)라 하면

$\int_1^a v(t)\,dt=0$ 이므로

$\int_1^a v(t)\,dt=\int_1^a(3t^2-12t+9)dt$

$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^a$

$=a^3-6a^2+9a-4$

$=(a-1)^2(a-4)=0$

그러므로 $t=4$ 일 때 점 P 가 다시 A 로 돌아온다.

따라서

$\int_1^4 |v(t)|\,dt=-\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$

$=-\int_1^3(3t^2-12t+9)dt+\int_3^4(3t^2-12t+9)dt$

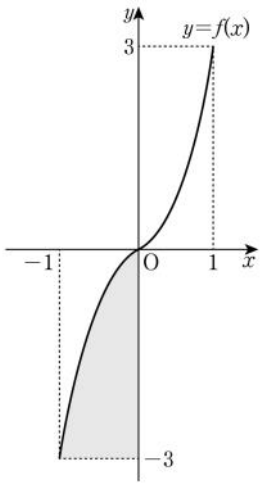
$=-\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^3+\left[t^3-6t^2+9t\right]_3^4$

$=8$

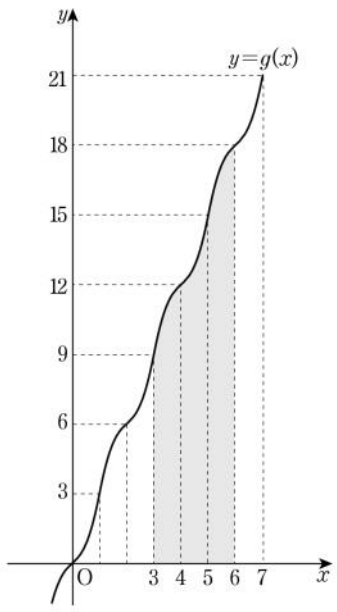
91.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

문제에서 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 이고, 함수 $y = f(x)$ 의
그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$
닫힌구간 $[3, 6]$ 에서 $\int_3^6 g(x)dx = \int_3^6 |g(x)|dx$ 는
곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$ 으로
둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프
와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의
그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로
12 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)dx = 2\times 12 = 24$
닫힌구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의
그래프를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로
18 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)dx = 15\times 1 + 2 = 17$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx = \int_3^5 g(x)dx + \int_5^6 g(x)dx = 41$

92.

$3xf(x) = 9\int_1^x f(t)dt + 2x$ 의 양변에
$x=1$ 을 대입하면
$3f(1) = 0+2$, $f(1) = \frac{2}{3}$
$3xf(x) = 9\int_1^x f(t)dt + 2x$ 의 양변을
x 에 대하여 미분하면
$3\{f(x) + xf'(x)\} = 9f(x) + 2$
$x=1$ 을 대입하면
$3\{f(1) + f'(1)\} = 9f(1) + 2$
$3f'(1) = 6f(1) + 2 = 6\times\frac{2}{3} + 2 = 6$
따라서 $f'(1) = 2$

93.

$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^3 |-4t+8|dt$
$= \int_0^2 (-4t+8)dt + \int_2^3 (4t-8)dt$
$= \left[-2t^2+8t\right]_0^2 + \left[2t^2-8t\right]_2^3$
$= 8+2 = 10$

94.

$v(t) = -4t+5$ 이므로 점 P 의 위치 $x(t)$ 는
$x(t) = \int(-4t+5)dt = -2t^2+5t+C$
(단, C는 적분상수) 이다.
시각 $t=3$ 에서 점 P 의 위치가 11 이므로
$x(3) = -18+15+C = 11$ 에서 $C=14$이다.
따라서 $x(t) = -2t^2+5t+14$
이므로 $x(0) = 14$

95.

$\int_0^1 f(t)dt = a$ 라 두면 $f(x) = 4x^3 + ax$ 이고
$a = \int_0^1 (4x^3+ax)dx = \left[x^4 + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}a$ 에서 $a=2$ 이다.
따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로
$f(1) = 4+2 = 6$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 07 경우의 수

해 설

1. ①
[출제의도] 중복순열의 수를 계산한다.
${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\Pi_2=3\times2+3^2=15$
2. [정답] ①
[출제의도] 중복조합 계산하기
${}_3\Pi_2+{}_2\mathrm{H}_3=3^2+{}_4\mathrm{C}_3=9+4=13$
3. 정답 ③
[해설]
다섯 개의 문자 a, a, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

4. [정답] ③
[해설]
다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r\times(x^2)^{6-r}\times2^r={}_6\mathrm{C}_r\times2^r\times x^{12-2r}$ $(r=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,6)$
x^8의 계수는 $r=2$일 때이다.
따라서 ${}_6\mathrm{C},\ \times2^2=15\times4=60$

5. 정답 ③
$\frac{5!}{2!\times2!}=\frac{120}{4}=30$

6.
${}_3\Pi_4=3^4=81$

7.
${}_n\mathrm{H}_2={}_{n+2-1}\mathrm{C}_2={}_9\mathrm{C}_2$에서 $n+1=9,\ n=8$

8.
5개의 문자 중 a의 개수가 3이므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

9.
$(4x+1)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r\times(4x)^{6-r}\times1^r={}_6\mathrm{C}_r\times4^{6-r}\times x^{6-r}(r=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,6)$
x의 계수는 $r=5$일 때 ${}_6\mathrm{C}_5\times4={}_6\mathrm{C}_1\times4=24$

10.
${}_6\mathrm{C}_2(x^2)^2\times2^4=15\times16\times x^4$이므로 240

11.
x^3이 3번 선택될 때, x^9이므로 ${}_5\mathrm{C}_3(x^3)^3\times3^2=9\times10x^9,\ \therefore\ 90$

12.
${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

13.
${}_n\Pi_2=n^2=25$에서 $n=5$

14.
$(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}(1)^r={}_5\mathrm{C}_r\times2^{5-r}\times x^{5-r}$ $(r=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,5)$
x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^3의 계수는
${}_5\mathrm{C}_2\times2^{5-2}=10\times8=80$

15. 이항정리에 따라 ${}_7C_5\times x^5\times2^2$이므로 x^5의 계수는
${}_7C_2\times4=\frac{7\times6}{2\times1}\times4=84$

16.
${}_4\Pi_2=4^2=16$, ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$이므로
${}_4\Pi_2+{}_4\mathrm{H}_2=16+10=26$

17. ③
[출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
학생 5명을 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=24$
18. ④
[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
양 끝 모두에 B가 적힌 카드를 놓고 그 사이에 A, A, A, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 나머지 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!\times2!}=60$
19. ⑤
[출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$
남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times8=160$
20. ②
[출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.
$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d-1$이라 하면
$a+b+c+3d=10$에서
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+3(d'+1)=10$
$a'+b'+c'+3d'=4$
이때 a', b', c', d'은 모두 음이 아닌 정수이다.
(i) $d'=0$인 경우
$a'+b'+c'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$
(ii) $d'=1$인 경우
$a'+b'+c'=1$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$
(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $15+3=18$
21. [정답] ⑤
[출제의도] 중복순열 이해하기
전체집합 U의 6개의 원소 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 5개를 정하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_5=6$
$A\cap B=\varnothing$에서 두 집합 A, B의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=32$
따라서 구하는 모든 순서쌍 $(A,\,B)$의 개수는
$6\times32=192$
22. [정답] ③
[출제의도] 원순열 이해하기
7명의 학생 중 A, B, C를 제외한 두 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
A, B, C를 포함한 5명의 학생 모두를 일정한

꿈을 현실로! 희망 부산교육

간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

23. [정답] ②
[출제의도] 중복조합 이해하기
$3x+y+z+w=11$에서 $y+z+w=11-3x$
$y'=y-1,\ z'=z-1,\ w'=w-1$
($y',\ z',\ w'$은 음이 아닌 정수)라 하면
$(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=11-3x$
$y'+z'+w'=8-3x$
(i) $x=1$일 때
방정식 $y'+z'+w'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $y',\ z',\ w'$의 모든 순서쌍 (y', z', w')의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_5={}_7C_5=21$
(ii) $x=2$일 때
방정식 $y'+z'+w'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $y',\ z',\ w'$의 모든 순서쌍 (y', z', w')의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(iii) $x\geq3$일 때
방정식 $y'+z'+w'=8-3x$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $y',\ z',\ w'$의 순서쌍 (y', z', w')은 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여
구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
$21+6=27$

24. [정답] ④
[출제의도] 이항정리 이해하기
$\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r(ax)^r\left(-\frac{2}{ax}\right)^{7-r}={}_7C_r(-2)^{7-r}a^{2r-7}x^{2r-7}$
$\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합 1은
$\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로
$\left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1,\ a-\frac{2}{a}=1$
$a^2-a-2=0$에서 $(a+1)(a-2)=0$
$a>0$이므로 $a=2$
$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7C_r(-1)^{7-r}2^rx^{2r-7}$
$2r-7=-1$에서 $r=3$
따라서 $\frac{1}{x}$의 계수는
${}_7C_3\times(-1)^4\times2^3=35\times1\times8=280$

25. 정답 ①
[해설]
$(x-1)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r(-1)^{6-r}x^r$
$(2x+1)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7C_s2^sx^s$
따라서 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(-1)^{6-r}x^r\times{}_7C_s2^sx^s={}_6C_r\cdot{}_7C_s(-1)^{6-r}2^sx^{r+s}$
x^2항은 $r+s=2$ (r, s는 각각 $0\leq r\leq6$, $0\leq s\leq7$인 정수) 일 때이므로 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는
$(0, 2),\ (1, 1),\ (2, 0)$
따라서 x^2의 계수는
${}_6C_0\cdot{}_7C_2(-1)^62^2+{}_6C_1\cdot{}_7C_1(-1)^52^1+{}_6C_2\cdot{}_7C_0(-1)^42^0$
$=21\times4-42\times2+15$
$=15$

26. [정답] ⑤
[해설]
주어진 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면 11, 2와 2, 2는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.
(i) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하지 않는 경우
$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!2!}=6$
(ii) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하는 경우
$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$을 이웃하게 넣는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
남은 자리에 2, 2를 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
그러므로 $4\times3=12$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $6+12=18$

27. ③

28. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
$2\times{}_3\Pi_3=2\times3^3=54$
이때 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222뿐이므로 구하는 자연수의 개수는
$54-1=53$

29. [출제의도] 원순열을 이해하여 의자를 배열하는 경우의 수를 구한다.
서로 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수가 서로소가 되려면 짝수가 적힌 의자끼리는 서로 이웃하면 안 되고 3과 6이 적힌 의자도 서로 이웃하면 안 된다.
홀수가 적힌 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(4-1)!=3!=6$
홀수가 적힌 의자들의 사이사이에 있는 4개의 자리 중 3이 적힌 의자와 이웃하지 않는 자리에 6이 적힌 의자를 배열하고, 남은 3개의 자리에 나머지 3개의 의자를 배열하는 경우의 수는
${}_2C_1\times3!=2\times6=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$

30.
(i) 일의 자리의 수가 1인 경우
1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$
(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우
1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$
따라서 구하는 경우의 수는 $20+10=30$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

31.
A학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=24$
A학교 학생 사이에 B학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=480$

32.
오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$이다.
P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!\times3!}=20$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times20=200$

33.
8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$
첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는 먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
마찬가지로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수도 6이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $45-6-6=33$

34.
다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서
일반항은 ${}_nC_rx^r2^{n-r}$
x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_nC_2\times2^{n-2}$
x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로 ${}_nC_3\times2^{n-3}$
${}_nC_2\times2^{n-2}={}_nC_3\times2^{n-3}$
$\frac{n!}{2!\times(n-2)!}\times2=\frac{n!}{3!\times(n-3)!}$
$6=n-2,\ n=8$

35.
함수 $f:X\to Y$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.
(i) $x\le3$일 때
$x\times f(x)\le10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은
1 또는 2 또는 3이다.
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
(ii) $x\ge4$일 때
$x\times f(x)\le10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은
1 또는 2이다.
$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=2^2=4$
따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $27\times4=108$

36.
조건 (가)에서 4명의 1학년 학생과
4명의 2학년 학생은 원 모양의 탁자에 교대로
둘러앉아야 한다.
4명의 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개를
원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=6$
조건 (나)에서 A와 B는 이웃하므로
학생 B가 앉는 경우의 수는 2
학생 B를 제외한 3명의 2학년 학생이 앉는 경우의
수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2\times6=72$

37.
조건 (가)에서
(i) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 A가
적힌 공인 경우
조건 (나)에서 남은 5개의 공을 상자에 넣는
경우의 수는
3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓고
5개의 문자 D, D, X, X, X를 일렬로 나열한 후
X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 B, B, C 또는
B, C, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!\times3!}\times2=20$
(ii) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 B가
적힌 공인 경우
남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는
5개의 문자 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는
경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!}=60$
따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+60=80$

38.
$(x^2+1)^4=(x^4+2x^2+1)^2$
$=x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1$
또 $(x^3+1)^n$의 일반항은
${}_nC_r(x^3)^r={}_nC_rx^{3r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)
이때 x^5의 계수는 $r=1$일 때
$4x^2\times{}_nC_1x^3=4nx^5$에서
$4n$이므로 $4n=12$에서 $n=3$
따라서 x^6의 계수는 $r=0$일 때
$4x^6\times{}_3C_0=4x^6$에서 4
$r=2$일 때 $1\times{}_3C_2x^6=3x^6$에서 3
즉, x^6의 계수는 $4+3=7$

39.
조건 (가)에서 양 끝에 나열되는 문자는 X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로
양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_2=2^2=4$
조건 (나)에서 문자 a의 위치를 정하는 경우의 수는 4
나머지 3곳에 나열할 문자는 b, X, Y 중 에서 중복을 허락하여 정하면 되므로
나머지 3곳에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times4\times27=432$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

40.

(i) 한 개의 문자를 3개 선택하는 경우 ${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$

(ii) 두 개의 문자를 각각 2개씩 선택하는 경우 ${}_3C_2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 90$

따라서 경우의 수는 $90 + 60 = 150$

41.

$(x-2)^5$의 x^4의 계수는 ${}_5C_4 x^4 (-2) \times x^2 = -10x^6$,

42.

$(1, 1, 1, 8)$, $(1, 1, 2, 4)$, $(1, 2, 2, 2)$,에서 (나) 조건에 맞는 순서쌍은

$(1, 1, 2, 4)$, $(1, 2, 2, 2)$

$(1, 1, 2, 4)$일 때, $\frac{4!}{2!} = 12$, $(1, 2, 2, 2)$일 때, $\frac{4!}{3!} = 4$

$\therefore$ 16개

43.

천의 자리가 4인 홀수는 일의자리에 1, 3, 5에 올 때,
백의자리에 5개, 십의 자리에 5개가 가능하므로 $5 \times 5 \times 3 = 75$
천의 자리가 5인 홀수는 일의자리에 1, 3, 5에 올 때,
백의자리에 5개, 십의 자리에 5개가 가능하므로 $5 \times 5 \times 3 = 75$
$\therefore$ 150

44.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$ 이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

45.

같은 학급의 대표 2 명을 한 사람으로 보고 4 명을 배열하는 원순열의 수는 $(4-1)! = 6$ 이다.

각 학급 대표 2 명의 자리를 정하는 경우의 수는

$2^4 = 16$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 16 = 96$

46.

세 명의 학생에게 연필을 하나씩 나누어 주고 남은 3 자루의 연필을 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 3 개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$

5 개의 지우개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 5 개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 21 = 210$

47.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$ 이다.

□에 숫자 3, 4 를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2 를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2 가 적힌 2 장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6 곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

${}_6P_2 - 5 \times 2 = 20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 20 = 200$

48.

다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r (2a)^r x^{5-r} = {}_5C_r 2^r a^r x^{5-r}$

x^3의 계수는 $r = 2$일 때이므로

${}_5C_2 \times 2^2 \times a^2 = 40a^2 = 640$

따라서 $a = 4$

49.

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 $56 \times 10 = 560$

50.

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1또는 3또는 5이므로 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 125 \times 3 = 750$

51.

${}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_2 + {}_{2n+1}C_4 + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n} = 2^{2n}$이므로

$f(n) = \sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}C_{2k} = 2^{2n} - 1$

$2^{2n} - 1 = 1023$에서 $2^{2n} = 2^{10}$

따라서 $n = 5$

52.

3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생에게는 노란색 카드 1장을 반드시 주어야 한다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

이 각각에 대하여 이 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 준 후 나머지 파란색 카드 1장을 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

이 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장도 먼저 준 후 나머지 빨간색 카드 3장을 나누어 줄 학생을 선택

꿈을 현실로! 희망 부산교육

하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10 = 90$

53.

전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r (2x)^{7-r} \times 1^r = {}_7\mathrm{C}_r\, 2^{7-r} x^{7-r}$

$(r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

$x^{7-r} = x^2$에서 $r = 5$

따라서 x의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_5 \times 2^2 = 84$

54.

3개의 문자 A, B, C를 같은 문자 X라 하고

6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = 120$

가운데 문자 X에 문자 A를 놓고

첫 번째 문자 X와 세 번째 문자 X에

두 문자 B, C를 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2 = 240$

55.

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r (x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r\, a^r x^{10-3r}$

(단, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, $\frac{1}{x^2}$의 계수는 $10-3r = -2$에서 $r = 4$이므로

${}_5\mathrm{C}_4\, a^4 = 5a^4$

또 x의 계수는 $10-3r = 1$에서 $r = 3$이므로

${}_5\mathrm{C}_3\, a^3 = 10a^3$

따라서 $a > 0$이므로 $5a^4 = 10a^3$에서 $a = 2$

56. A와 B에게 각각 공책을 2권씩 먼저 나누어 준 후

남은 6권의 공책을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6 = {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

57. (나) 조건을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍은 (3, 2), (2, 3)

$a+b = 5$이므로 $c+d+e = 7$

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

$\therefore\ 2\times15 = 30$

58.

흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{2!\times2!\times4!} = 420$

흰 공 2개를 하나로 보고 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!\times4!} = 105$

따라서 구하는 경우의 수는 $420-105 = 315$

59.

가운데 원에 색칠하는 경우의 수는 7

가운데 원에 칠한 색을 제외한 6가지 색을 모두

사용하여 가운데 원을 제외한 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수는 $(6-1)! = 5!$

따라서 구하는 경우의 수는 $7\times5! = 840$

60.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

a끼리 서로 이웃하도록 6개의 문자를 일렬로

나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!} = 30$

따라서 구하는 경우의 수는 $90-30 = 60$

61.

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 = x^4 - 2x + \frac{1}{x^2}$이므로

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 (x-2)^5$의 전개식에서 x의 계수는

다항식 $(x-2)^5$의 전개식에서 상수항과 x^3의 계수에 각각 -2와 1을 곱한 값의 합이다.

$(x-2)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\, x^r (-2)^{5-r}$ $(r = 0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$이므로 구하는 값은

$(-2)\times{}_5\mathrm{C}_0\times(-2)^5 + 1\times{}_5\mathrm{C}_3\times(-2)^2 = 104$

62.

${}_6\Pi_2 + {}_2\mathrm{H}_6 = 6^2 + {}_7\mathrm{C}_6 = 36 + {}_7\mathrm{C}_1 = 36 + 7 = 43$

63.

A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을

각각 한 학생으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로

배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{5} = 4! = 24$

이 각각에 대하여 A학교 학생 2명이 서로 자리를

바꾸는 경우의 수는 2, B학교 학생 2명이

서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로

구하는 경우의 수는 $24\times2\times2 = 96$

64.

$\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r 2^r x^{5-2r}$

$x^{5-2r} = x$에서 $5-2r = 1$, $r = 2$

따라서 x의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times2^2 = 40$

65.

$x = x'+1$, $y = y'+1$, $z = z'+1$, $w = w'+1$

로 놓으면 방정식 $x+y+z+w = 11$을

만족시키는 자연수 x, y, z, w의

모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

방정식 $x'+y'+z'+w' = 7$의 음이 아닌 정수해의

개수와 같다. 방정식 $x'+y'+z'+w' = 7$의 음이

아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자

x', y', z', w' 중에서 7개를 택하는

중복조합의 수와 같으므로

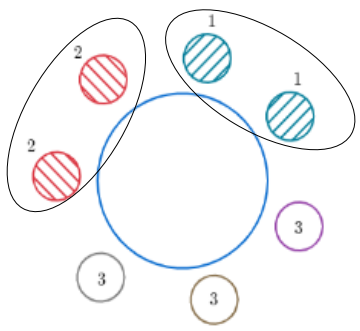
${}_4\mathrm{H}_7 = {}_{4+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_7 = 120$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

66.
a가 3개, b가 2개, c가 1개 있으므로
a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60$

67.
$(1+2x)^4$의 일반항 ${}_4\mathrm{C}_r(2x)^r\times 1^{4-r}$
(단, $r=0,1,2,3,4$) 에서 $r=2$일 때
${}_4\mathrm{C}_2 2^2\times x^2\times 1^2=\frac{4\times 3}{2\times 1}\times 4x^2=24x^2$ 이므로
x^2의 계수는 24

68.
1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 한 사람으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 나열하는 방법의 수는 $(5-1)!=4!=24$이다.
1학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이고, 2학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 2\times 2=96$



69.
전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r(\mathrm{x}^2)^{6-r}\left(\frac{2}{\mathrm{x}}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r 2^r \mathrm{x}^{12-3r}$
$x^{12-3r}=x^6$에서 $12-3r=6$, $r=2$
따라서 x^6의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=60$

70.
전개식의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r(\mathrm{x}^2)^{6-r}\left(\frac{2}{\mathrm{x}}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r 2^r \mathrm{x}^{12-3r}$
$x^{12-3r}=x^6$에서 $12-3r=6$, $r=2$
따라서 x^6의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=60$

71.
8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$이다.
A와 B가 이웃하게 되므로 A와 B를 한 묶음으로 보고 원 모양의 탁자에 앉히는 경우의 수는 $2!\times\frac{4!}{4}=12$이다.
따라서 $20\times 12=240$

72.
$\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^6$의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\frac{4}{x^2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r 4^r x^{6-3r}$ 이므로
x^3의 계수는 $r=1$일 때, 즉 ${}_6\mathrm{C}_1\times 4=24$

73.
$\left(2x+\frac{a}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r 2^{7-r}a^r x^{7-2r}$ $(0\le r\le 7)$
$7-2r=3$에서 $r=2$이므로 x^3의 계수는
${}_7\mathrm{C}_2\times 2^5\times a^2=21\times 32\times a^2=42$
따라서 $a^2=\frac{1}{16}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

74.
나열하는 카드에 적힌 문자의 종류에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) B와 C인 경우
C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.
(ⅱ) A와 B와 C인 경우
C가 적힌 카드가 2장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 1장과 B가 적힌 카드 2장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다. C가 적힌 카드가 3장일 때, C가 적힌 카드1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 1장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다. 따라서 이 경우의 수는 $12+12=24$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $6+24=30$이다.

75.
${}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1\times 3+{}_4\mathrm{C}_2\times 3^2+{}_4\mathrm{C}_3\times 3^3+{}_4\mathrm{C}_4\times 3^4=(1+3)^4=4^4=256$

76.
${}_5C_4x^4\times\frac{3}{x^2}=15\times x^2$

77.
$f(1)$을 정하는 경우의 수는 4
$f(2), f(3), f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times 20=80$

78. ⑤
[출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키려면 한 접시에는 빵을 2개 담고, 나머지 세 접시에는 빵을 1개씩 담아야 한다.
한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$
2개의 빵이 담긴 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 각각 B, C, D라 하자.
(ⅰ) 접시 A에 사탕을 담지 않는 경우
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담고 나머지 접시에 사탕 1개를 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
(ⅱ) 접시 A에 사탕 1개를 담는 경우
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 1개씩 담고 나머지 접시에 사탕 2개를 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수

꿈을 현실로! 희망 부산교육

는 $3+3+3=9$
접시 A, B, C, D를 원 모양의 식탁에 놓는 원순열의 수는 $(4-1)!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times9\times6\times=540$
79. 120
[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키도록 선택한 6개의 수를 각각 1, 2, 3, a, b, c (a, b, c는 3 이하의 자연수)라 하자.
$3\le a+b+c\le9$에서 $9\le1+2+3+a+b+c\le15$이므로 조건 (나)를 만족시키려면
$1+2+3+a+b+c=12$, $a+b+c=6$
(ⅰ) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 1, 2, 3인 경우
6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$
(ⅱ) 1, 2, 3을 제외한 ⅰ개의 숫자가 2, 2, 2인 경우
6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{4!}=30$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $90+30=120$
80. 45
[출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5=126$
조건 (나)의 부정은
$f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$ … ㉠이다.
(ⅰ) $f(2)=1$인 경우
$f(1)=1$이고 $1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le5$이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$
(ⅱ) $f(4)\times f(5)\ge20$인 경우
$f(4)=4$, $f(5)=5$일 때 $1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le4$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$
$f(4)=5$, $f(5)=5$일 때 $1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le5$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$
그러므로 이 경우 구하는 함수 f의 개수는 $20+35=55$
(ⅲ) $f(2)=1$이고 $f(4)\times f(5)\ge20$인 경우
$f(1)=1$이고 $f(4)=4$, $f(5)=5$일 때 $1\le f(3)\le4$에서 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
$f(1)=1$이고 $f(4)=5$, $f(5)=5$일 때 $1\le f(3)\le5$에서 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$
그러므로 이 경우 구하는 함수 f의 개수는 $4+5=9$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 ㉠을 만족시키는 함수 f의 개수는 $35+55-9=81$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $126-81=45$
81. [정답] ①
[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기
8장의 카드에서 7장의 카드를 택하는 경우는
짝수가 적혀 있는 카드가 4장 또는 3장 선택되는
경우이다.
(ⅰ) 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 선택된 경우
짝수 2, 2, 2, 4가 적혀 있는 4장의 카드를
일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
짝수가 적힌 4장의 카드를 □로 나타내면
홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지
않아야 하므로
그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 세 곳에
홀수가 적힌 3장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨□∨

홀수가 적혀 있는 3장의 카드는
1, 3, 3이 적힌 카드이거나
1, 1, 3이 적힌 카드이므로
홀수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는
경우의 수는 ${}_5C_3\times2\times\frac{3!}{2!}=60$
구하는 경우의 수는 $4\times60=240$
(ⅱ) 짝수가 적혀 있는 카드가 3장 선택된 경우
짝수가 적혀 있는 3장의 카드는
2, 2, 2가 적힌 카드이거나
2, 2, 4가 적힌 카드이므로
짝수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는
경우의 수는 $1+\frac{3!}{2!}=4$
이 각각에 대하여 짝수가 적힌 3장의 카드를
□로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는
서로 이웃하지 않아야 하므로
그림과 같이 ∨로 표시된 네 곳에
홀수가 적힌 4장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨

홀수 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 4장의 카드를
일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
구하는 경우의 수는 $4\times6=24$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$240+24=264$
82. [정답] 523
[출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기
$f(k)=x_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$이라 하면
x_k는 5 이하의 자연수이다.
구하는 함수 f의 개수는 두 방정식
$x_4=x_1+x_2+x_3$, $2x_4=x_5+x_6+x_7+x_8$을
만족시키는 5 이하의 자연수 x_1, x_2, …, x_8의
모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_8)$의 개수와 같다.
$x_1+x_2+x_3\ge3$이므로 조건 (가)에 의하여
$3\le x_4\le5$
(ⅰ) $x_4=3$인 경우
방정식 $x_1+x_2+x_3=3$을 만족시키는
5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 순서쌍
(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 1)$의 1가지이다.
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=6$을 만족시키는
5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍
(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서
2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_5C_2=10$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

그러므로 함수 f의 개수는 $1\times10=10$
(ii) $x_4=4$인 경우
방정식 $x_1+x_2+x_3=4$를 만족시키는
5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 순서쌍
(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$의
3가지이다.
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=8$을 만족시키는
5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍
(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서
4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$
그러므로 함수 f의 개수는 $3\times35=105$
(iii) $x_4=5$인 경우
방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는
5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍
(x_1, x_2, x_3)의 개수는 서로 다른 3개에서
2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는
5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍
(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는
자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍
(x_5, x_6, x_7, x_8)에서
$x_k\geq6$인 자연수 $k(k=5, 6, 7, 8)$이
존재하는 모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)을
제외한 개수와 같다.
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는
자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍
(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서
6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$
방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는
자연수 x_5, x_6, x_7, x_8 중 6 이상의 자연수가
존재하는 모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는
네 수 6, 2, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수와
네 수 7, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수의
합과 같으므로 $\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}=16$
그러므로 함수 f의 개수는 $6\times(84-16)=408$
(i), (ii), (iii)에 의하여
구하는 함수 f의 개수는 $10+105+408=523$
83. [정답] 188
[출제의도] 중복순열을 활용하여 문제해결하기
문자열 aaa와 이웃한 자리를 △,
문자열 aaa와 이웃하지 않는 자리를 □로 나타내면
조건 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는
aaa△□□□, △aaa△□□, □△aaa△□,
□□△aaa△, □□□△aaa의 5가지이고
조건 (나)에 의하여 △에 나열될 수 있는 문자는
b 또는 c이다.
(i) aaa△□□□일 때
(a) △에 b가 나열된 경우
3개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의
수와 같으므로 ${}_3\Pi_3=27$
이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은
$aaabbba$, $aaabbbb$, $aaabbbc$,
$aaabaaa$, $aaabccc$의 5가지이다.
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$27-5=22$
(b) △에 c가 나열된 경우
(a)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는
문자열의 개수는 22
(a), (b)에 의하여 만들 수 있는 문자열의 개수는
$22+22=44$
(ii) △aaa△□□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는
경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 2개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$
이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은
$baaabbb$, $baaaccc$, $caaabbb$, $caaaccc$의 4가지이다.
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9-4=32$
(iii) □△aaa△□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는
경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 2개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9=36$
(iv) □□△aaa△일 때
(ii)와 같은 방법으로 구하면
만들 수 있는 문자열의 개수는 32
(v) □□□△aaa일 때
(i)과 같은 방법으로 구하면
만들 수 있는 문자열의 개수는 44
(i)~(v)에 의하여 만들 수 있는 모든 문자열의
개수는 $44+32+36+32+44=188$
84. 정답 ⑤
[해설]
공역 X의 원소 중에서 홀수는 1, 3, 5의 세 개다.
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$는 모두 홀수다.
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중에서 서로 다른 홀수의 개수에 따라 분류하면
(i) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 세 개의 서로 다른 홀수인 경우
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=6$
조건 (다)에 의해 $f(2)$, $f(4)$도 모두 홀수다.
조건 (나)에서 3개의 홀수 중에서 2개를 선택하면 되므로
${}_3\mathrm{C}_2=3$
$\therefore\ 6\times3=18$
(ii) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 두 개의 서로 다른 홀수인 경우
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$를 정하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times(2^3-2)=18$
조건 (나), (다)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$로 대응된 수 중 하나와 $f(1)$,

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f(3)$, $f(5)$로 대응된 수를 제외한 세 수 중에서 하나를 골라서 $f(2)$, $f(4)$를 대응시키면 되므로

${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$

$\therefore\ 18 \times 6 = 108$

(iii) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 하나의 홀수인 경우

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

조건 (나), (다)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$로 대응된 수를 제외한 네 수 중에서 두 수를 골라서 $f(2)$, $f(4)$를 대응시키면 되므로

${}_4C_2 = 6$

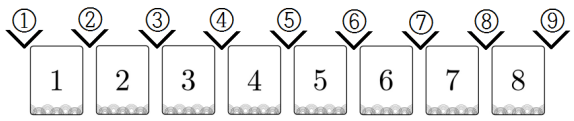
$\therefore\ 3 \times 6 = 18$

이상에서 구하는 경우의 수는

$18 + 108 + 18 = 144$

85. **정답** 25

[해설]



흰색 카드의 배열이 정해져 있으므로 위의 그림과 같이 검은색 카드가 들어갈 수 있는 자리를 ①~⑨라 하자.

모든 경우의 수는 ${}_9C_2 = 36$ …… ㉠

검은색 카드 사이에 흰색 카드가 2장 이상인 사건을 A라 하자. 그러면 사건 A^C는 검은색 카드 사이에 흰색 카드가 1장인 사건이다.

검은색 카드 사이에 3의 배수가 적힌 카드가 1장 이상인 사건을 B라 하면 사건 B^C는 검은색 카드 사이에 3의 배수가 적힌 카드가 놓여 있지 않는 사건이다.

이때 구하는 사건은 $A \cap B = U - (A^C \cup B^C)$ …… ㉡

사건 A^C는 위 그림에서 ①−②, ②−③처럼 연이어 검은색 카드를 배열하는 경우의 수다.

$\therefore\ n(A^C) = 8$

사건 B^C는 ①, ②, ③ 또는 ④, ⑤, ⑥ 또는 ⑦, ⑧, ⑨에서 두 군데 검은색 카드를 배열하는 경우이므로

$n(B^C) = {}_3C_2 \times 3 = 9$

사건 $A^C \cap B^C$는 ①−②, ②−③, ④−⑤, ⑤−⑥, ⑦−⑧, ⑧−⑨의 여섯 가지 경우가 있으므로 $n(A^C \cap B^C) = 6$

㉠과 ㉡에서

$n(A \cap B) = 36 - (8 + 9 - 6) = 25$

[다른 풀이]

a ■ b ■ c

2장의 검은 색 카드의 사이 또는 양 끝에 들어가는 흰 색 카드의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a + b + c = 8,\ b \geq 2$

를 만족해야 한다.

$b = b' + 2$라 하면

$a + b' + c = 6$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 경우의 수는

${}_3H_6 = 28$

이 중에서 조건 (다)를 만족시키지 않는 경우는

$a = 6$인 경우, $b = 6$인 경우, $a = 3$이고 $b = 3$인 경우

의 3가지이다.

따라서 조건을 만족하는 경우의 수는

$28 - 3 = 25$

86. [정답] 150

[해설]

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1), f(7))$은

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 7)$

조건 (나)에 의하여 $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$

이고 $f(2) \leq f(4) \leq f(6)$

조건 (다)에 의하여 $|f(2) - f(1)|$과 $f(1) + f(3) + f(5) + f(7)$의 값은 모두 3의 배수인 자연수이다.

(i) $f(1) = 1$, $f(7) = 4$인 경우

$f(3) + f(5) = 4$ 또는 $f(3) + f(5) = 7$

순서쌍 $(f(3), f(5))$는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$

$f(1) = 1$이므로 $f(2) = 4$ 또는 $f(2) = 7$

$f(2) = 4$이면

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_4H_2$,

$f(2) = 7$이면

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_1H_2$ ${}_4H_2 + {}_1H_2 = 10 + 1 = 11$

그러므로 $3 \times 11 = 33$

(ii) $f(1) = 2$, $f(7) = 5$인 경우

$f(3) + f(5) = 5$ 또는 $f(3) + f(5) = 8$

순서쌍 $(f(3), f(5))$는 $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$

$f(1) = 2$이므로 $f(2) = 5$

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_3H_2 = 6$

그러므로 $3 \times 6 = 18$

(iii) $f(1) = 3$, $f(7) = 6$인 경우

$f(3) + f(5) = 6$ 또는 $f(3) + f(5) = 9$

또는 $f(3) + f(5) = 12$

순서쌍 $(f(3), f(5))$는

$(3, 3)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(6, 6)$

$f(1) = 3$이므로 $f(2) = 6$

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_2H_2 = 3$

그러므로 $4 \times 3 = 12$

(iv) $f(1) = 4$, $f(7) = 7$인 경우

$f(3) + f(5) = 10$ 또는 $f(3) + f(5) = 13$

순서쌍 $(f(3), f(5))$는

$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 7)$

$f(1) = 4$이므로 $f(2) = 1$ 또는 $f(2) = 7$

$f(2) = 1$이면

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_7H_2$

$f(2) = 7$이면

순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_1H_2$ ${}_7H_2 + {}_1H_2 = 28 + 1 = 29$

그러므로 $3 \times 29 = 87$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 $33 + 18 + 12 + 87 = 150$

87. 336

$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 13$ 이고

a 와 d 는 모두 홀수

b 와 c 는 모두 홀수 또는 모두 짝수 이다.

$(1st)$ a,b,c,d 가 모두 홀수 일 때

$(2nd)$ a, d 는 홀수 b,c는 짝수 일 때 로 구분된다.

$(1st)$ a,b,c,d 가 모두 홀수 일 때

$a = 2x+1, b = 2y+1, c = 2z+1, d = 2w+1$

$1 \leq 2x+1 \leq 2y+1 \leq 2z+1 \leq 2w+1 \leq 13$

$0 \leq 2x \leq 2y \leq 2z \leq 2w \leq 12$ 에서 ${}_7H_4 = 210 \cdots$ ㉠

$(2nd)$ a, d 는 홀수 b,c는 짝수 일 때

$a = 2x+1, b = 2y, c = 2z, d = 2w+1$

$1 \leq \underline{2x+1} \leq 2y \leq 2z \leq 2w\underline{+1 \leq} 13$ (짜증좀 난다)

ㄴ 같은 홀수일수 없다ㄱ

$d - a$ 의 최댓값 12 , 최솟값 1 이므로

$1 \leq d - a \leq 12$ 이다. (물론 $d - a =$ 짝수값만 나온다)

i) $d - a = 12$ 일 때, $(a = 1, d = 13$)

$1 < 2x \leq 2y < 13$ 에서 $\frac{1}{2} < y \leq z < \frac{13}{2}$ 이므로

$1 \leq y \leq z \leq 6$: ${}_6H_2 = 21 \cdots$ ㉡

꿈을 현실로! 희망 부산교육

ii) $d-a=10$ 일 때, $(a=1, d=11 / a=3, d=10$)

$1<2x\le 2y<11$ 에서 $\frac{1}{2}<y\le z<\frac{11}{2}$ 이므로

$1\le y\le z\le 5$: ${}_5H_2$

$3<2x\le 2y<13$ 에서 $\frac{3}{2}<y\le z<\frac{13}{2}$ 이므로

$2\le y\le z\le 6$: ${}_5H_2$

따라서 $2\times{}_5H_2=30\cdots$ ㉢

iii) $d-a=8$ 일 때,

$(a=1, d=9 / a=3, d=11 / a=5, d=13$)

$1<2x\le 2y<9$

$3<2x\le 2y<11$

$5<2x\le 2y<13$

이렇게 3가지가 나오고 위의 3가지 상황은 답이 모두 같다.

$1<2x\le 2y<9$ 에서 $\frac{1}{2}<y\le z<\frac{9}{2}$ 이므로

$1\le y\le z\le 4$: ${}_4H_2$

따라서 $3\times{}_4H_2=30\cdots$ ㉣

iv) $d-a=6$ 일 때 위의 과정과 같은 방법으로 하면

a, d 의 결정 가지수 4가지 상황

4가지 상황에서 답은 모두 같고 ${}_3H_2$ 이다

$4\times{}_3H_2=24\cdots$ ㉤

v) $d-a=4$ 일 때 위의 과정과 같은 방법으로 하면

a, d 의 결정 가지수 5가지 상황

5가지 상황에서 답은 모두 같고 ${}_2H_2$ 이다

$5\times{}_2H_2=15\cdots$ ㉥

vi) $d-a=2$ 일 때 위의 과정과 같은 방법으로 하면

a, d 의 결정 가지수 6가지 상황

6가지 상황에서 답은 모두 같고 ${}_1H_2$ 이다

$6\times{}_1H_2=6\cdots$ ㉦

즉, ㉠ ~ ㉦ 의 합 $=336$ 이다.

88. [출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_8H_3={}_{8+3-1}C_3={}_{10}C_3=120$

이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$(a-b)(b-c)\neq 0$

즉, $a<b<c\le 8$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_8C_3=56$

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$120-56=64$

89. 정답 196

(i) $c=1$일 때, a, b는 1, d는 1, 2, 3, 4, 5, 6, ∴ 6개

(ii) $c=2$일 때, a, b는 1, 2, d는 2, 3, 4, 5, 6, ∴ $2\times2\times5=20$개

(iii) $c=3$일 때, a, b는 1, 2, 3, d는 3, 4, 5, 6, ∴ $3\times3\times4=36$개

(iv) $c=4$일 때, a, b는 1, 2, 3, 4, d는 4, 5, 6, ∴ $4\times4\times3=48$개

(v) $c=5$일 때, a, b는 1, 2, 3, 4, 5, d는 5, 6, ∴ $5\times5\times2=50$개

(vi) $c=6$일 때, a, b는 1, 2, 3, 4, 5, 6, d는 6, ∴ $6\times6\times1=36$개

∴ $6+20+36+48+50+36=196$

90.

(i) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

남은 3개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$10\times(8-1)=70$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

남은 4개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $5\times(16-1)=75$

(iii) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우 5개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $32-1=31$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $70+75+31=176$

91.

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나, 0을 적어도 2개 선택해야 한다.

(i) -1과 1을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(ii) 0을 적어도 2개 선택하는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(iii) 위의 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 경우

-1을 1개, 0을 2개, 1을 1개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_1={}_{5+1-1}C_1={}_5C_1=5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

92.

(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY꼴인 경우

4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ꼴인 경우

4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times3\times4\times12=576$

(iii) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우

각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=16$

D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $36+576+96=708$

93.
조건 (가)의 $a+b+c+d+e=10$과
조건 (나)의 $-2 \le a-b+c-d+e \le 2$에서
$8 \le 2a+2c+2e \le 12$
$4 \le a+c+e \le 6$
(ⅰ) $a+c+e=4$일 때
$b+d=6$이고, 구하는 모든 순서쌍
(a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=4$, $b+d=6$을 만족시키는
음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_6 = {}_6\mathrm{C}_4 \times {}_7\mathrm{C}_6 = 15 \times 7 = 105$
(ⅱ) $a+c+e=5$일 때
$b+d=5$이고, 구하는 모든 순서쌍
(a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=5$, $b+d=5$를 만족시키는
음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_5 \times {}_2\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 \times {}_6\mathrm{C}_5 = 21 \times 6 = 126$
(ⅲ) $a+c+e=6$일 때
$b+d=4$이고, 구하는 모든 순서쌍
(a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=6$, $b+d=4$를 만족시키는
음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_6 \times {}_2\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_6 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 28 \times 5 = 140$
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍의
개수는 $105+126+140=371$

94.
구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서
중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여
만든 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서
숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의
개수를 뺀 것과 같다.
(ⅰ) 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를
선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의
자연수를 만드는 경우
만의 자리의 수가 될 수 있는 수는
1 또는 2이므로
만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2 … ㉠
남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와
같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2 \times 81 = 162$
(ⅱ) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를
만드는 경우
1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와
같으므로 ${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$
(ⅲ) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를
만드는 경우
만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2이므로
만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1 … ㉢
남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의
2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$ … ㉣
㉢, ㉣에 의하여
$1 \times 16 = 16$
(ⅳ) 숫자 0, 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의
자연수를 만드는 경우
자연수 22222의 1개다.
따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$162-(32+16-1)=115$

95.
함수 $f : X \to X$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$,
$f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중
홀수의 개수를 n이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는
$n=4$이다.
(ⅰ) $n=0$일 때
치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중
짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지
않는다.
(ⅱ) $n=2$일 때
조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면
치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인
원소가 2개이고 홀수인 두 함숫값이 서로 다르면
치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인
원소가 1개다.
(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개,
짝수인 원소가 2개인 경우
집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서
홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 3$ … ㉠
치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는
경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는
문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와
같으므로
$\frac{5!}{2! \times 2!} + \frac{5!}{2! \times 2!} = 60$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$3 \times 60 = 180$
(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개,
짝수인 원소가 1개인 경우
집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서
홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 6$ … ㉢
치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는
경우의 수는 문자 a, b, c, c, c를
일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!} = 20$ … ㉣
㉢, ㉣에 의하여
$6 \times 20 = 120$
(a), (b)에 의하여 $180+120=300$
(ⅲ) $n=4$일 때
짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서
치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인
원소는 1개다.
집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서
홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 6$ … ㉤

꿈을 현실로! 희망 부산교육

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는
경우의 수는 문자 a, b, b, b, c 또는
문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c를
일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!\times 2!}+\frac{5!}{3!}=70 \cdots ㉥$$

㉤, ㉥에 의하여
$6\times 70=420$
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여
구하는 함수 f의 개수는 $300+420=720$

96.
$f(1)=1$이면 조건 (가)에서 $f(1)=4$이므로 모순이다.
(i) $f(1)=2$인 경우
조건 (가)에서 $f(2)=4$
$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
이 경우 함수 f의 개수는 $10\times 5=50$
(ii) $f(1)=3$인 경우
조건 (가)에서 $f(3)=4$
$f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2
$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5\times 5=25$
이 경우 함수 f의 개수는 $2\times 25=50$
(iii) $f(1)=4$인 경우
조건 (가)에서 $f(4)=4$
$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 4,5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2={}_3C_2=3$$

$f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
이 경우 함수 f의 개수는 $3\times 5=15$
(iv) $f(1)=5$인 경우
조건 (가)에서 $f(5)=4$
이 경우는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는 $50+50+15=115$

97.
조건 (가)에서
$\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값이 자연수인 경우는 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 하나의 수가 1 또는 4이고 나머지 두 수가 서로 같은 경우이다.
조건 (나)에 의하여
(i) $f(3)=1$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(1, 1, 1)$
순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$의 개수는 ${}_5H_3$
그러므로 $1\times {}_5H_3={}_7C_3=35$
(ii) $f(3)=2$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(1, 2, 2)$
순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$의 개수는 ${}_4H_3$
그러므로 $1\times {}_4H_3={}_6C_3=20$
(iii) $f(3)=3$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(1, 3, 3)$
순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$의 개수는 ${}_3H_3$
그러므로 $1\times {}_3H_3={}_5C_3=10$
(iv) $f(3)=4$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 4)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(4, 4, 4)$
순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$의 개수는 ${}_2H_3$
그러므로 $5\times {}_2H_3=5\times {}_4C_3=20$
(v) $f(3)=5$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(1, 5, 5)$, $(4, 5, 5)$
순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$의 개수는 ${}_1H_3$
그러므로 $2\times {}_1H_3=2\times {}_3C_3=2$
따라서 (i) (v)에 의하여 함수 f의 개수는
$35+20+10+20+2=87$

98.
조건 (가)에서 $n(A)=1$ 또는 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$
(다) 조건에서 $n(A)=1$인 경우에 반드시 $f(x)=x$인 경우가 생기므로 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$이다.
$B\subset A$이므로 조건 (나)에서 $n(A)=n(B)$이려면 $A=B$
ㄱ) $n(A)=2$인 경우
$A=B=\{1, 2\}$라 하면 $f(1)=2$, $f(2)=1$이어야 하고
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 1 또는 2이어야 한다. 또, $n(A)=2$인 A를 결정하는 방법은 ${}_5C_2$이므로 $n(A)=2$인 경우의 수는 ${}_5C_2\times 2^3=80$
ㄴ) $n(A)=3$인 경우
$A=B=\{1, 2, 3\}$라 하면, $f(1)=2$라 하면, $f(3)=1$, $f(2)=3$이어야 하고 $f(1)=3$이라하면, $f(2)=1$, $f(3)=2$이어야 한다. 이 때, $f(4)$, $f(5)$의 함숫값은 1 또는 2 또는 3이고 $n(A)=3$인 A를 결정하는 방법은 ${}_5C_3\times 2\times 3^2=180$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $\therefore\ 80+180=260$

99.
$f(1)=1$일 때, $f(3)\le 5$이므로 2, 3, 4의 대응관계는

$${}_6H_3={}_8C_3=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$$

그 중에서 $f(3)=6$인 경우 $f(2)=1$, 2, 3, 4, 5, 6, $f(4)=6$이므로 6개 그러므로 $f(1)=1$일 때, 가능한 함수 개수는 $56-6=50$

$f(1)=2$일 때, ${}_5H_3={}_7C_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$

$f(3)\le 6$이므로 $f(3)=6$일 때, $f(2)=2$, 3, 4, 5, 6, $f(4)=6$

$f(1)=3$일 때, ${}_4H_3={}_6C_3=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

$\therefore\ 50+35+20=105$

100.
조건 (나)에서 $f(1)=1$, $f(10)=10$
(i) $f(5)=1$, $f(6)=7$인 경우
$f(5)=1$일 때, 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는 $(1, 1, 1)$의 1개가 존재한다.
$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는
① $f(9)=9$일 때, ${}_3H_2-1={}_4C_2-1=6-1=5$
($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)
② $f(9)=10$일 때, ${}_4H_2-1={}_5C_2-1=10-1=9$
($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $5+9=14$

(ii) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우
① $f(5)=2$일 때, 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$의 개수는 ${}_2H_3={}_4C_3=4$
② $f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$ 의 개수는 ${}_3H_3-1={}_5C_3-1=10-1=9$
($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $4\times9=36$

(iii) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수 f의 $1\le x\le5$일 때의 규칙성과 $6\le x\le10$일 때의 규칙성이 서로 대칭적이므로
$f(5)=3$, $f(6)=9$인 함수 f의 개수는 (ii)의 함수의개수와 같고,
$f(5)=4$, $f(6)=10$인 함수 f의 개수는 (i)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수 있다.

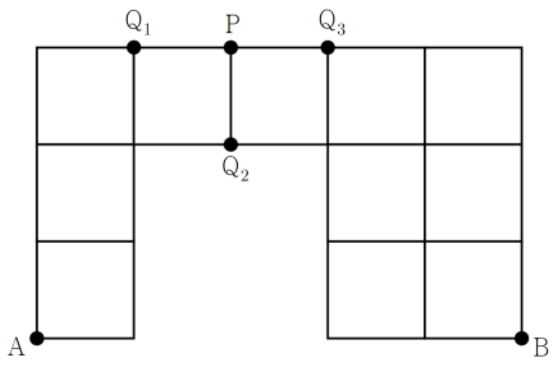
(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$2\times(14+36)=2\times50=100$

101.
(i) $f(3)=4$ 또는 $f(3)=10$인 경우
$f(3)=4$이면 $f(2)=f(5)=2$이고,
$f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
$f(3)=10$이면 $f(1)=f(4)=12$이고,
$f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
그러므로 구하는 함수의 개수는
$2\times{}_4\Pi_2=32$
(ii) $f(3)=6$ 또는 $f(3)=8$인 경우
$f(3)=6$이면 $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
$f(3)=8$이면 $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
그러므로 구하는 함수의 개수는
$2\times{}_2\Pi_2\times{}_3\Pi_2=72$
(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$32+72=104$

102.
c가 5 이하의 자연수이므로 $1\le b\le4$이다.
(i) $b=1$인 경우
$a\le2\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_2C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_4H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_4H_2={}_2C_1\times{}_5C_2=2\times10=20$
(ii) $b=2$인 경우
$a\le3\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_3H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_3H_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$
(iii) $b=3$인 경우
$a\le4\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_2H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_2H_2={}_4C_1\times{}_3C_2=4\times3=12$
(iv) $b=4$인 경우
$a\le5\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_5C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 1이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_5C_1\times1=5$
(i)~(iv)에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+18+12+5=55$

103.
[출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.
(i) 1, 2, 3에서만 선택한 후 나열하는 경우
1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4-{}_2\Pi_4=3^4-2^4=65$
(ii) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는
$2\times({}_4C_2-3)=6$이고, □에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 $2^2=4$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$
(iii) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1, 1, 4를 나열하는 경우는 11□4, 4□11이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.
1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $4+4=8$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$65+24+8=97$

104.



그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면
A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는
Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고
P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는
Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.
그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나
B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 각각의 경우의 수는 다음과 같다.
(i) A→Q_1→P→Q_2→B의 순서로 이동하는 경우
$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=24$
(ii) A→Q_1→P→Q_3→B의 순서로 이동하는 경우
$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=40$
(iii) A→Q_2→P→Q_3→B의 순서로 이동하는 경우
$\frac{3!}{1!\times2!}\times1\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=30$
(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는
$24+40+30=94$

105.
남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면
(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우
A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!,
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로
구하는 경우의 수는
$24\times2!\times2!=96$

(ii) C가 A또는 B중 한 명과 이웃하는 경우
D 또는 E중 한 명과 C, A, B의
총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 2!, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로
구하는 경우의 수는 $24\times{}_2C_1\times2!\times2!=192$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는
$96+192=288$

106.
6 이하의 음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$에 대하여
$x_1=2y_1+1,\ x_2=2y_2+2,$
$x_3=2y_3+1,\ x_4=2y_4+2$라 하면
$x_1+x_2+x_3+x_4=34$에서
$(2y_1+1)+(2y_2+2)+(2y_3+1)+(2y_4+2)=34$
$y_1+y_2+y_3+y_4=14$ ····· ㉠
구하는 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는
방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는
음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의 모든
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$에서
$y_k\ge7$인 4이하의 자연수 k가 존재하는
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$를 제외한 개수와 같다.
(i) 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는
음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의
모든 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
14개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=\dfrac{17\times16\times15}{3\times2\times1}=680$
(ii) $y_k\ge7$ 인 k의 값이 1개인 경우
$y_1\ge7$이라 하자.
$z_1=y_1-7$이라 하면 방정식 ㉠은
$z_1+y_2+y_3+y_4=7$
방정식 $z_1+y_2+y_3+y_4=7$ 을 만족시키는
음이 아닌 네 정수 $z_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의 모든
순서쌍 $(z_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_3=120$
이때 $y_1\ge7$ 인 2이상 4이하의 자연수 l이
존재하는 순서쌍 $(z_1,\ y_1,\ y_3,\ y_4)$는 $(0,\ 7,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 7,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 7)$의 3가지이므로 $120-3=117$
같은 방법으로 $y_k\ge7$ 인 2이상 4 이하의
자연수 k가 존재하는 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의
개수도 각각 117이다.
따라서 $y_k\ge7$ 인 k의 값이 1개인
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
$4\times117=468$
(iii) $y_k\ge7$ 인 k의 값이 2개인 경우
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$는
$(7,\ 7,\ 0,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 7,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 0,\ 7)$,
$(0,\ 7,\ 7,\ 0)$, $(0,\ 7,\ 0,\ 7)$, $(0,\ 0,\ 7,\ 7)$
의 6가지이다.
(i), (ii), (iii)에 의해
구하는 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는
$680-(468+6)=206$

107.
이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(i) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 0인 경우
1의 눈만 네 번 나와야 하므로 이 경우의 수는
1
(ii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 1인 경우
1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하므로 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는
$12\times3=36$
(iii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 2인 경우
㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}=6$
㉠, ㉡ 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 $3\times3=9$이므로 이 경우의 수는
$(12+6)\times9=162$
(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+36+162=199$

108.
6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.
(i) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우
2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
그러므로 이 경우의 수는
$24\times2=48$
(ii) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우
3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
그러므로 이 경우의 수는

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$24\times2=48$

(iii) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

그러므로 이 경우의 수는

$6\times4=24$

(ⅰ)~(iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-72=48$

109.

학생 A가 받은 검은 공의 개수와 흰 공의 개수를 각각 b, w라 하자.

조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ w)$ 중

학생 A가 홀수 개의 공을 받은 경우는

$(4,\ 3),\ (4,\ 1),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 3)$일 때

흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 1)$일 때

흰 공 4개와 빨간 공 5개가 남으므로 세 명의 학생 B, C, D에게 흰 공과 빨간 공을 각각 1개씩 나누어 주고 남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나누어 주는 경우의 수는 다음과 같다.

흰 공 1개를 받은 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

세 명의 학생 B, C, D에게 빨간 공 2개를 나누어 줄 때, 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로 경우의 수는

${}_3H_2-1={}_4C_2-1=5$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times5=15$

(iii) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(3,\ 2)$일 때

검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개가 남으므로

다음의 (1.과 (2.의 경우로 나누어 볼 수 있다.

(1. 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 흰 공을 받는 경우

검은 공과 흰 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때 남은 흰 공 2개와 빨간 공 5개는 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D에게 나누어 준다. 두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 주고 남은 빨간 공 3개를 나누어 줄 때, 한 명의 학생에게 빨간 공 3개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는 ${}_2H_3-2={}_4C_3-2=2$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times2=6$

(2. 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 빨간 공을 받는 경우

검은 공과 빨간 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때 두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 준다.

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개에 대하여 흰 공은 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D 중에서 한 명을 택하여 나누어 주고, 빨간 공은 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명을 택하여 나누어 준다. 이 때, 마지막에 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는 $2\times({}_3H_2-1)=2\times({}_4C_2-1)=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

(iv) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(2,\ 1)$일 때 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$15+6+30=51$

110. 조건 (나)와 조건 (다)에서

$f(3)\neq1,\ f(4)\neq6$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$가 5의 배수인 $f(3),f(4)$의 순서쌍 $(f(3),f(4))$는 $(4,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (6,4),\ (5,5)$

(ⅰ) $f(3)=4,f(4)=1$인 경우

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

$f(5),f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

즉 함수 f의 개수는 $9\times25=225$

(ii) $f(3)=2,f(4)=3$인 경우

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

$f(5),f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

즉 함수 f의 개수는 $1\times9=9$

(iii) $f(3)=3,f(4)=2$인 경우

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

$f(5),f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

즉 함수 f의 개수는 $4\times16=64$

(iv) $f(3)=6,f(4)=4$인 경우

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

$f(5),f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

즉 함수 f의 개수는 $25\times4=100$

(v) $f(3)=5,f(4)=5$인 경우

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

$f(5),f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

즉 함수 f의 개수는 $16\times1=16$

(ⅰ)~(v)에서

구하는 함수 f의 개수는 $225+9+64+100+16=414$

111.

사인펜이 14개이므로 조건 (가)와 (다)에 의해

네 명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(ⅰ) 네 명의 학생 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$

두 명의 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 두 명의 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하면 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2,\ 2b+2,\ 2c+1,\ 2d+1$($a,\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)이다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+1)+(2d+1)=14$

에서

$a+b+c+d=4$

방정식 $a+b+c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 ${}_4H_4$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

조건 (나)에 의해 $a \neq 4$, $b \neq 4$이므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times ({}_4H_4 - 2) = {}_4C_2 \times ({}_7C_4 - 2) = 198$

(ii) 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각 $2a+2$, $2b+2$, $2c+2$, $2d+2$ (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)이다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+2)+(2d+2) = 14$

에서

$a+b+c+d = 3$

방정식 $a+b+c+d = 3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $198 + 20 = 218$

[다른 풀이]

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d = 14$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$a = a'+1$, $b = b'+1$, $c = c'+1$, $d = d'+1$로 놓으면

방정식 $a'+b'+c'+d' = 10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$

한편, 네 명이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$a = 2a''+1$, $b = 2b''+1$, $c = 2c''+1$, $d = 2d''+1$로 놓으면

방정식 $a''+b''+c''+d'' = 5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d''의 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수와 같으므로

${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

즉 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키는 경우의 수는 $286 - 56 = 230$

한편, 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키고, 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우 각 학생이 받은 사인펜의 개수는 10, 2, 1, 1뿐이고 이 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는 $230 - 12 = 218$

112. 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

(ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!} = 12$

이므로 (ii)의 경우의 수는 $2 \times 12 = 24$

(iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!} = 4$

이므로 (iii)의 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$

(iv) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

(i) ~ (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12 + 24 + 8 + 6 = 50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3 \times 50 = 150$

113. (가)조건에 의하여

$f(1) \geq \sqrt{1}$이므로 $f(1)$의 함숫값은 1, 2, 3, 4를 가질 수 있다.

$f(2) \geq \sqrt{2}$, $f(3) \geq \sqrt{3}$, $f(4) \geq \sqrt{4}$이므로

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 함숫값은 2, 3, 4를 가질 수 있다.

$f(5) \geq \sqrt{5}$이므로 $f(5)$의 함숫값은 3, 4를 가질 수 있다.

(i) 치역의 원소가 {1, 2, 3}인 경우

$f(1) = 1$, $f(5) = 3$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2 또는 3에 대응할 수 있으므로 $2^3 = 8$

모두 3에 대응하는 경우는 (나) 조건을 만족하지 못하므로 $8 - 1 = 7$

(ii) 치역의 원소가 {1, 2, 4}인 경우

$f(1) = 1$, $f(5) = 4$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2 또는 4에 대응할 수 있으므로 $2^3 = 8$

모두 4에 대응하는 경우를 빼면, $8 - 1 = 7$

iii) 치역의 원소가 {1, 3, 4}인 경우

$f(1) = 1$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 3 또는 4에 대응할 수 있으므로 $2^4 = 16$

모두 3이나 4에 대응하는 경우를 빼면, $16 - 2 = 14$

iv) 치역의 원소가 {2, 3, 4}인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2 또는 3 또는 4에 대응할 수 있으므로 $3^4 = 81$

이때 $f(5) = 3$인 경우 2또는 3, 3 또는 4로만 대응하는 경우는 (나)조건을 만족하지 못하므로 $3^4 - 2^4 - 2^4 = 49$

이 때, 모두 3으로만 대응하는 경우가 두 번 빼졌으므로

$3^4 - 2^4 - 2^4 + 1 = 50$

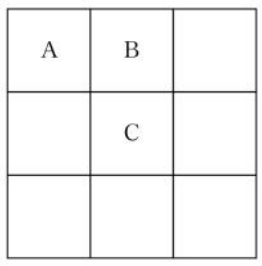
또한 $f(5) = 4$인 경우도 마찬가지의 경우의 수가 있으므로

$(3^4 - 2^4 - 2^4 + 1) \times 2 = 100$

i) ~ iv)의 경우의 수를 다 더하면 $7 + 7 + 14 + 100 = 128$

114.

회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C 중에서 택할 수 있다.



(i) A에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 7!이다.

(ii) B에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 7!이다.

(iii) C에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$(3+5) \times 7! = 8 \times 7!$

따라서 $k = 8$

115.

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{6!}{5!1!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{1!5!} = \boxed{62}$ 이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.
그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times62=\boxed{186}$이다.
(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이므로 나머지 자리에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3을 나열하여 만든 것이다.
그러므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!3!}=\boxed{14}$이다.
그러므로 $p=62$, $q=186$, $r=14$
따라서 $p+q+r=262$
[다른 풀이]
(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이다.
즉, 구하려는 값은 1, 3을 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1을 네 개, 3을 네 개 선택한 경우의 수 2를 뺀 값이므로 ${}_2\Pi_4-2=2^4-2=\boxed{14}$이다.
[보충 설명]
(ii) 숫자 2를 두 번 사용한 경우
2, 2를 십의 자리와 천의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\frac{5!}{4!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{1!4!}=30$이다.
2를 짝수 번째 자리에 두 번 오도록 놓는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이다.
그러므로 숫자 2를 두 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times30=90$이다.

116.
(i) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인
집합 A는
$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$
이다.
$A=\{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로
집합 B는
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$
이다.
(a) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우
집합 A의 원소인 1, 2, 3이 1에 대응하는 경우의 수는 1이고, 4, 5가 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인
함수 f의 개수는 $1\times2=\boxed{2}$이다.
(b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우
$\{f(1), f(2), f(3)\}=\{1, 2\}$이고
4, 5가 1, 2, 3에 대응하되 적어도 하나가 3에 대응하는 경우이므로
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는
$({}_2\Pi_3-2)\times({}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2)=6\times5=\boxed{30}$이다.
(a), (b)와 같은 경우가 각각 3가지이므로
$n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의
모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는
함수 f의 개수는
$4\times\left(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30}\right)$이다.
(ii) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인
집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우
$X-A=\{3\}$에 의해 $n(B)=3$이므로 집합 B는
$\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$이다.
$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4\}$인 경우
$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 어떠한
두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로
1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로
정하는 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=3\times12=36$이다.
그러므로 $n(A)=4$, $n(B)<4$이고
집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록
하는 함수 f의 개수는 $4\times36=\boxed{144}$이다.
(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고
$n(B)=5$이므로 조건 $n(A)>n(B)$를 만족시키는
함수 f는 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$4\times\left(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30}\right)+\boxed{144}$이다.
따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로 $p+q+r=176$

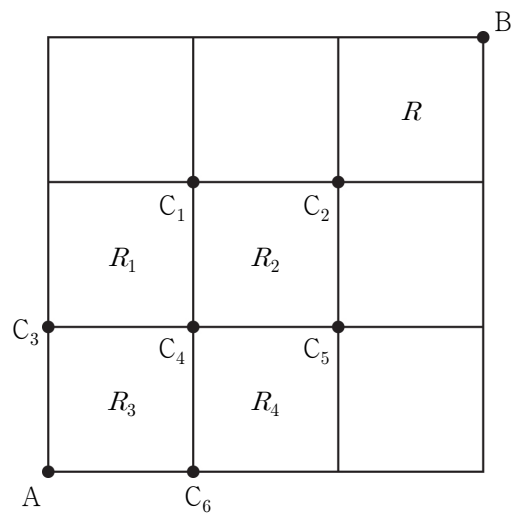
117.
철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은
반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서
최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다.
철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한
책의 권수를 순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
(i) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
$a+b+c=24$에서
$a=4$일 때, $b+c=20$을 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 1
$a=5$일 때, $b+c=19$를 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 2
⋮
$a=10$일 때, $b+c=14$를 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 7
따라서 구하는 경우의 수는 $1+2+\cdots+7=28$
(ii) 4개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는
경우의 수는 2이고 선택된 분야에서 선택한
책의 권수를 d(d는 4 이상 10 이하의 자연수)
라 하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$
(a', b', c', d'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라
하면 $a+b+c+d=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'=8$
방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는
6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의
모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허용하여
8개를 택하는 중복조합의 수
${}_4\mathrm{H}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=165$에서
a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 7인
경우의 수 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_1=12$와
a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 8인

꿈을 현실로!
희망 부산교육

경우의 수 4를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(165-12-4)=298$
(iii) 5개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를 각각 d, e(d, e는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$,
$e=e'+4$(a', b', c', d', e'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면
$a+b+c+d+e=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'+e'=4$
방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$를 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5H_4={}_8C_4=70$
따라서 (ⅰ), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$28+298+70=396$

118.
규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는
첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한 후
'(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우'에서 '(ii) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우'를 제외하면 된다.
첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청하는 경우의 수는 3!이다.
(ⅰ)의 경우:
봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 $\boxed{\frac{9!}{2!\times2!\times5!}}$이다.
(ii)의 경우:
첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 2회 신청하는 경우의 수 $\boxed{\frac{6!}{2!\times2!\times2!}}$과 같다.
(ⅰ), (ii)에 의해
구하는 경우의 수는 $3!\times\left(\boxed{756}-\boxed{90}\right)$이다.
$p=756$, $q=90$
$p+q=756+90=846$

119.



그림과 같이
6개의 점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6과
4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4가 있다.
최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를 만족시키려면
$A\to C_2\to B\to C_2\to A$의 순서로 이동해야 한다.
또한 조건 (나)를 만족시키려면
정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.

(ⅰ) $C_2\to B\to C_2$의 순서로 이동하는 경우
(C_2에서 B로 가는 경우의 수)
$\times$(B에서 C_2로 가는 경우의 수)$=2\times1=2$
(ii) $A\to C_2$, $C_2\to A$의 순서로 이동하는 경우
$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$
(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우
$A\to C_3\to C_1\to C_2$, $C_2\to C_1\to C_3\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$
(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우
$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times2)=8$
(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우
$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(2\times1)=8$
(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우
$A\to C_6\to C_5\to C_2$, $C_2\to C_5\to C_6\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$
(e) 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우
$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times1)=4$
(a)~(e)에 의하여
$A\to C_2$, $C_2\to A$의 순서로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는
$36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$
(ⅰ), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$2\times20=40$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

120.
검은색 볼펜 기준으로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
(ⅰ) 검은색 볼펜 1 자루를 선택하여 나누어주는 경우
검은색 볼페 1 자로, 파란색 볼펜 k 자루, 빨간색 볼펜 $4-k$ 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우와 같으므로 $(k=0, 1, 2, 3, 4)$
검은색 볼펜 1 자루를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_1=2$,
파란색 볼펜 k 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_k={}_{1+k}\mathrm{C}_k=1+k$,
빨간색 볼펜 $4-k$ 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_{4-k}={}_{5-k}\mathrm{C}_{4-k}=5-k$ 이므로

$$\sum_{k=0}^{4}\{2\times(1+k)\times(5-k)\}$$

$$=2\times\sum_{k=0}^{4}(5+4k-k^2)$$

$$=2\times\left\{5\times5+4\times\frac{4\times5}{2}-\frac{4\times5\times9}{6}\right\}$$

$$=70$$

(ⅱ) 검은색 볼펜 1 자루를 나누어주지 않는 경우
파란색 볼펜 k 자루, 빨간색 볼펜 $5-k$ 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우와 같으므로 $(k=1, 2, 3, 4)$
파란색 볼펜 k 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_k={}_{1+k}\mathrm{C}_k=1+k$,
빨간색 볼펜 $5-k$ 자루를 2 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_{5-k}={}_{6-k}\mathrm{C}_{5-k}=6-k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{4}\{(1+k)\times(6-k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{4}(6+5k-k^2)$$

$$=\left(6\times4+5\times\frac{4\times5}{2}-\frac{4\times5\times9}{6}\right)$$

$$=44$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $70+44=114$

121.
조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수
a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$ 이다.
조건 (나)에서 a, b, c, d 가 적어도 하나는 0 이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수에서
a, b, c, d 가 모두 0 이 아닌 경우를 빼면 된다. 즉 a, b, c, d 가 모두 자연수인 경우를 빼면 된다.
a, b, c, d 가 모두 자연수일 때, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 구하자.
$a\geq1, b\geq1, c\geq1, d\geq1$ 이므로
$p=a-1, q=b-1, r=c-1, s=d-1$ 라고
하면 p, q, r, s 는 음이 아닌 정수이다.
$a+b+c+d=6$ 에서 $p+q+r+s=2$ 이고
$p+q+r+s=2$ 를 만족하는 음이 아닌 정수 p, q, r, s 의 모든 순서쌍 (p, q, r, s) 의 개수는
${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ 이다.
따라서 $84-10=74$

122.
집합 A 에서 A 로의 모든 함수 f 의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$ 이다.
조건 (가)에서 $f(1)\times f(2)\geq9$ 이므로
$f(1)\times f(2)=9, f(1)\times f(2)=12, f(1)\times f(2)=16$ 인 경우가 존재한다.
(ⅰ) $f(1)\times f(2)=9$ 일 때
$f(1)=3, f(2)=3$ 이고 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3 이므로 $f(3), f(4)$ 의 값은
$1, 2, 4$ 중에서 서로 다른 2 개이다.
따라서 함수 f 의 개수는 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$
(ⅱ) $f(1)\times f(2)=12$ 일 때
$f(1)=3, f(2)=4$ 또는 $f(1)=4, f(2)=3$ 이고 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3 이므로 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
① $f(3), f(4)$ 가 $1, 2$ 중 하나의 같은 값을 가지는 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1=2$
② $f(3)$ 이 $3, 4$ 중 하나의 값이고, $f(4)$ 가 $1, 2$ 중 하나의 값인 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=2\times2=4$
③ $f(4)$ 가 $3, 4$ 중 하나의 값이고, $f(3)$ 이 $1, 2$ 중 하나의 값인 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=2\times2=4$ 이다.
따라서 함수 f 의 개수는 $2\times(2+4+4)=20$
(ⅲ) $f(1)\times f(2)=16$ 일 때
$f(1)=4, f(2)=4$ 이고 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3 이므로 $f(3), f(4)$ 의 값은
$1, 2, 3$ 중에서 서로 다른 2 개이다.
따라서 함수 f 의 개수는 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건 (가), (나)를 만족하는 함수 f 의 개수는
$6+20+6=32$ 이다.
따라서 $p=\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$ 이므로 $120p=15$

123.
(ⅰ) $f(3)$ 이 3 의 배수인 경우
① $f(3)=3$ 인 경우
$f(1), f(2)$ 를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(4), f(5), f(6)$ 을 선택하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
그러므로 $6\times20=120$
② $f(3)=6$ 인 경우
$f(1), f(2)$ 를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
$f(4), f(5), f(6)$ 을 선택하는 경우의 수는
${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$
그러므로 $21\times1=21$
①, ②에 의하여 $f(3)$ 이 3 의 배수인 경우의 수는
$120+21=141$
(ⅱ) $f(6)$ 이 3 의 배수인 경우
① $f(6)=3$ 인 경우
$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$
② $f(6)=6$ 인 경우
$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$
①, ②에 의하여 $f(6)$ 이 3 의 배수인 경우의 수는
$21+252=273$
(ⅲ) $f(3), f(6)$ 이 모두 3 의 배수인 경우
① $f(3)=f(6)=3$ 인 경우
$f(1), f(2)$ 를 선택하는 경우의 수는

꿈을 현실로! 희망 부산교육

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_1H_2 = {}_2C_2 = 1$
그러므로 $6 \times 1 = 6$

② $f(3) = 3$, $f(6) = 6$인 경우
$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는
${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$
그러므로 $6 \times 10 = 60$

③ $f(3) = f(6) = 6$인 경우
$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는
${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_1H_2 = {}_2C_2 = 1$
그러므로 $21 \times 1 = 21$

①, ②, ③에 의하여 $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우의 수는 $660 + 21 = 87$
따라서 (ⅰ) (ⅱ) (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$141 + 273 - 87 = 327$

124.
3명의 학생을 A, B, C라 하자.
(ⅰ) 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받는 경우
흰 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는
${}_3C_1 = 3$
흰 공 2개를 모두 받은 학생이 A일 때, 학생 A는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다.
학생 A에서 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_3H_2 \times {}_3H_2 = 36$
학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수이므로
${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$
같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수도
${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$
학생 B와 C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는
${}_1H_2 \times {}_1H_2 = 1$
그러므로 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3 \times (36 - 2 \times 9 + 1) = 57$
(ⅱ) 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받는 경우
흰 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는
${}_3C_2 = 3$
흰 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 학생 A, B는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A, B에게 각각 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1 \times {}_3H_1 = 9$
학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는
${}_2H_1 \times {}_2H_1 = 4$
그러므로 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3 \times (9 - 4) = 15$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $57 + 15 = 72$

125.
흰 공 4개를 세 상자에 나누어 담는 경우의 수는 (4개, 0개, 0개) 또는 (3개, 1개, 0개) 또는 (2개, 2개, 0개), 또는 (2개, 1개, 1개)의 4가지이다.
(ⅰ) 흰 공을 (4개, 0개, 0개) 넣는 경우 :
흰 공 4개가 들어갈 상자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$
각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 들어가지 않은 두 상자에는 반드시 검은 공이 각각 2개씩 들어가야 한다. 남은 2개의 검은 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_3H_2$
따라서 ${}_3C_1 \times {}_3H_2 = 3 \times {}_4C_2 = 18$ 가지
(ⅱ) 흰 공을 (3개, 1개, 0개) 넣는 경우 :
흰 공 3개와 1개가 들어갈 상자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3P_2$
각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개, 0개 들어간 두 상자에는 반드시 검은 공이 각각 1개, 2개가 들어가야 한다. 남은 3개의 검은 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_3H_3$
따라서 ${}_3P_2 \times {}_3H_3 = 6 \times {}_5C_3 = 60$ 가지
(ⅲ) 흰 공을 (2개, 2개, 0개) 넣는 경우 :
흰 공이 2개씩 들어갈 상자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 들어가지 않은 상자에는 반드시 검은 공 2개가 들어가야 한다. 남은 4개의 검은 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_3H_4$
따라서 ${}_3C_2 \times {}_3H_4 = 3 \times {}_6C_4 = 45$ 가지
(ⅳ) 흰 공을 (2개, 1개, 1개) 넣는 경우 :
흰 공이 1개씩 들어갈 상자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개, 1개 들어가 있는 상자에는 반드시 검은 공이 각각 1개씩 들어가야 한다. 남은 4개의 검은 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_3H_4$
따라서 ${}_3C_2 \times {}_3H_4 = 3 \times {}_6C_4 = 45$ 가지
(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는
$18 + 60 + 45 + 45 = 168$
(다른 풀이)
각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는 다음과 같다.
(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4)
(3, 3, 4)
ⅰ) (2, 2, 6)인 경우 :
2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 흰) 인 경우 나머지 2개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 검) 인 경우 나머지 2개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (검, 검) 인 경우 나머지 2개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3가지이다. 따라서 $\frac{3!}{2!} \times 9 = 27$ 이다.
ⅱ) (2, 3, 5)인 경우 :
2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 흰) 인 경우 나머지 3개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 검) 인 경우 나머지 3개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 4가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (검, 검) 인 경우 나머지 3개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 4가지이다. 따라서 $3! \times 11 = 66$ 이다.
ⅲ) (2, 4, 4)인 경우 :
2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 흰) 인 경우 나머지 4개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 검) 인 경우 나머지 3개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 4가지이다. 2개의 공이 들어가는 상자에 (검, 검) 인 경우 나머지 3개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 5가지이다. 따라서 $\frac{3!}{2!} \times 12 = 36$ 이다.
ⅳ) (3, 3, 4)인 경우 :

꿈을 현실로! 희망 부산교육

3 개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 흰, 흰) 인 경우 나머지 3 개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 2 가지이다. 3 개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 흰, 검) 인 경우 나머지 3 개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 3 가지이다. 3 개의 공이 들어가는 상자에 (흰, 검, 검) 인 경우 나머지 3 개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 4 가지이다. 3 개의 공이 들어가는 상자에 (검, 검, 검) 인 경우 나머지 3 개의 공이 들어가는 상자에 들어갈 수 있는 경우의 수는 4 가지이다. 따라서 $\frac{3!}{2!} \times 13 = 39$ 이다.

(i)~(iv)에 의해 구하는 경우의 수는

$27 + 66 + 36 + 39 = 168$

126.

A 가 반드시 빵을 1 개 이상 받는 경우의 수는 A 에게 빵 1 개와 우유 1 개를 먼저 주고, 남은 빵 2 개와 우유 3 개를 A, B, C 에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(i) A 에게 남은 빵 2 개를 주는 경우

남은 우유 3 개를 A, B, C 에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 이다.

(ii) A 에게 남은 빵 2개 중 1 개를 주는 경우

남은 빵 1 개를 B 또는 C 에게 나누어 주는 경우의 수는 2 이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1 개 주고 남은 우유 2 개를 A, B, C 에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$ 이다.

(iii) A 에게 남은 빵을 주지 않는 경우

남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2 이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1 개 주고 남은 우유 2 개를 A, B, C 에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$ 이다.

또 남은 빵 2개를 학생 B와 C 에게 각각 1 개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1 개씩 주고 남은 우유 1 개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$ 이다.

따라서 A 에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는 $12 + 3 = 15$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$10 + 12 + 15 = 37$ 이다.

127.

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_{14} = {}_{16}C_2 = 120$

(나)에서 $a \neq 2$, $b \neq 2$, $c \neq 2$

(i) a, b, c 중 1개가 2인 경우

$a = 2$일 때, $b + c = 12$를 만족시키는 b와 c의 모든 순서쌍 (b, c) 의 개수는 ${}_2H_{12}$이고 $(2, 10)$, $(10, 2)$인 경우를 제외하면 ${}_2H_{12} - 2 = 11$

$b = 2$, $c = 2$ 인 경우의 수도 각각 11 이므로 a, b, c 중 1 개가 2 인 경우의 수는 $11 \times 3 = 33$

(ii) a, b, c 중 2개가 2인 경우

순서쌍 (a, b, c) 를 구하면 $(2, 2, 10)$, $(2, 10, 2)$, $(10, 2, 2)$의 세 가지 경우가 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - (33 + 3) = 84$

128.

(i) A가 받는 검은색 모자의 개수가 5일 때

B,C,D중 한명은 검은색 모자를 받고 흰색 모자를 받지 않는다.

검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3

A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y,z라 하면

$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

구하는 경우의 수는

$3 \times {}_3H_4 = 45$

(ii) A가 받는 검은색 모자의 개수가 4일 때

(ii −1. B,C,D중 한 명이 남은 검은색 모자를 2개 받으면

검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3

이 사람이 받은 흰색 모자의 수는 0 또는 1

(ii −1−1. 이 사람이 받은 흰색 모자의 수가 0일 때

A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y,z라 하면

$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

구하는 경우의 수는 (x,y,z)를 정하는 경우의 수는 ${}_3H_4$인데 이중 $x=4$, 즉 A가 흰색 모자를 4개 받는 경우의 수가 1이므로

$3 \times ({}_3H_4 - 1) = 42$

(ii −1−2. 이 사람이 받은 흰색 모자의 수가 1일 때

A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y,z라 하면

$x+y+z=5$이고 $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

구하는 경우의 수는

$3 \times {}_3H_3 = 30$

(ii −2. B,C,D중 두 명이 검은색 모자를 1개씩 받으면

검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3

두 사람 중 한 사람이 받은 흰색 모자의 수는 0이고 이 사람을 선택하는 경우의 수는 2이다.

다른 검은 모자를 받은 사람은 흰색 모자를 1개 이상 받아야 한다.

A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 흰색 모자를 받을 두 사람이 받을 흰색 모자의 개수를 y,z라 하면

$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

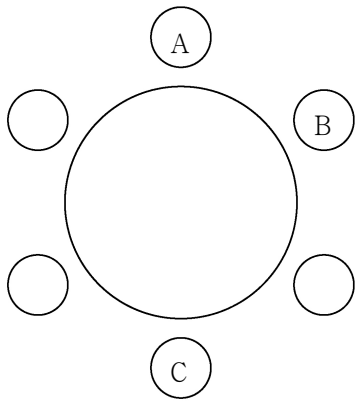
구하는 경우의 수는 ${}_3H_4$인데 이중 $x=4$, 즉 A가 흰색 모자를 4개 받는 경우의 수가 1이므로

$3 \times 2 \times ({}_3H_4 - 1) = 84$

이상에서 모든 경우의 수는

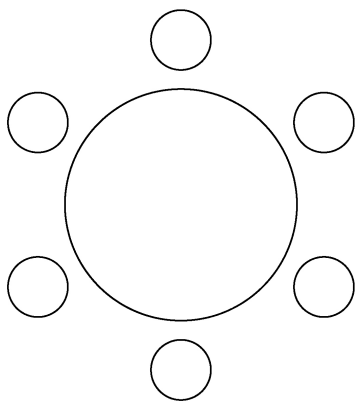
$45 + 42 + 30 + 84 = 201$

129.



A,B가이웃하여 자리를 잡으면 C가 앉을 수 있는 곳은 3곳 이고 빈 자리에 남은 학생을 앉히면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 3! = 36$



꿈을 현실로!
희망 부산교육

130.

(i) 꺼낸 공의 수가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$

세 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

$(6, 3, 1)$, $(6, 2, 2)$, $(5, 4, 1)$,$(5, 3, 2)$, $(4, 4, 2)$, $(4, 3, 3)$

각각의 경우의 수는

$3!$, $\frac{3!}{2!}$, $3!$, $3!$, $\frac{3!}{2!}$, $\frac{3!}{2!}$

확률은

$\frac{2}{5}\times(3!\times 3+3\times 3)\times\frac{1}{6^3}=\frac{1}{20}$

(ii) 꺼낸 공의 수가 4일 확률은 $\frac{3}{5}$

네 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

$(6, 2, 1, 1)$, $(5, 3, 1, 1)$, $(5, 2, 2, 1)$,$(4, 4, 1, 1)$, $(4, 3, 2, 1)$, $(4, 2, 2, 2)$

$(3, 3, 3, 1)$, $(3, 3, 2, 2)$

각각의 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!2!}$, $4!$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{2!2!}$

확률은

$\frac{3}{5}\times(12\times 3+6\times 2+4\times 2+24)\times\frac{1}{6^4}=\frac{1}{27}$

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$

따라서 $p+q=587$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 08 확률

해 설

1.
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
$\frac{11}{12}=\frac{1}{12}+\mathrm{P}(B)$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

2.
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}}{\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

3. 정답 ④
[해설]
$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$에서
$\mathrm{P}(B)=\frac{11}{18}$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$에서
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{9}+\frac{11}{18}=\frac{13}{18}$

4. 정답 ③
[해설]
흰색 손수건이 2장 이상일 확률은 전체에서 흰색 손수건이 없거나 1장일 확률을 빼면 된다.
(i) 흰색 손수건이 없을 확률
$\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{126}$
(ii) 흰색 손수건을 1장 꺼낼 확률
$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{4\times10}{126}=\frac{40}{126}$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$1-\left(\frac{5}{126}+\frac{40}{126}\right)=1-\frac{45}{126}=\frac{81}{126}=\frac{9}{14}$

5. 정답 ②
[해설]
한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 4의 배수인 사건을 A, 나오는 눈의 수의 합이 7 이하인 사건을 B라 하면 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$
$a\times b$가 4의 배수인 경우는
$a=1$일 때, $b=4$
$a=2$일 때, $b=2,\ 4,\ 6$
$a=3$일 때, $b=4$
$a=4$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$a=5$일 때, $b=4$
$a=6$일 때, $b=2,\ 4,\ 6$
의 총 15가지 경우가 있다.
$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$
이 중에서 $a+b\le7$을 만족하는 a, b는
$a=1$일 때, $b=4$
$a=2$일 때, $b=2,\ 4$
$a=3$일 때, $b=4$
$a=4$일 때, $b=1,\ 2,\ 3$
의 총 7가지 경우가 있다.
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{36}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{7}{15}$

6. [정답] ①
[해설]
한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 네 눈의 수의 곱이 27의 배수이려면 3의 배수의 눈이 세 번 또는 네 번 나와야 한다.
한 개의 주사위를 한 번 던질 때,
3의 배수의 눈이 나오는 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 X ($X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)라 하면
$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$
$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$
따라서 $\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$

7. [정답] ④
[해설]
주머니 A에서 임의로 꺼낸 1개의 공이 흰 공인 사건을 X, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 Y라 하자.
$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(X^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
(i) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 흰 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은
$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$
(ii) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 검은 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은
$1-\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$
따라서 (i), (ii)에 의하여
$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$
$=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)+\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$
$=\frac{1}{3}\times\frac{34}{35}+\frac{2}{3}\times\frac{31}{35}=\frac{32}{35}$

8. ③
$P(A\cap B^c)=0$ 에서

꿈을 현실로!
희망 부산교육

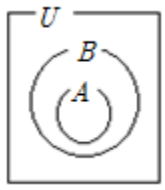
$P(A\cap B)=\frac{1}{5}=P(A)$, $\therefore P(A)=\frac{1}{5}$ … ㉠

$P(A)+P(B)=\frac{7}{10}$ 에서

$P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ … ㉡

$P(A^c\cap B)=P(B\cap A^c)=P(B-A)$

$P(B-A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$



9. ④

$n(S)=$ 일대일 함수의 개수 (순열)

$n(S)={}_7P_4=7\times6\times5\times4$ … ㉠

$f(2)=2$ 이고 $f(1)=a, f(3)=b, f(4)=c$ 라하면

$2abc=4N$ … ㉡ (N 은 자연수)

a, b, c 는 1개 이상의 짝수를 가져야 한다.

즉, {짝, 짝, 홀} 또는 {짝, 홀, 홀} 에 대응되야 한다.

(i){짝, 짝, 홀} 에서

짝수 누가 가져가는지 선택 후 배열: ${}_3P_2=6$ 가지

나머지 하나는 홀수에 대응 : 4가지

즉, $4\times6=24$ … ㉢

(i){짝, 짝, 홀} 에서

짝수 누가 가져가는지 선택 : ${}_3C_1=3$ 가지

짝수 4, 6 중 어디에 대응되는지 선택 : 2가지

남은 두수는 홀수 4개중 2개 선택 후 배열 : ${}_4P_2=12$

즉, $3\times2\times12=72$ … ㉣

따라서 확률 $P=\frac{24+72}{{}_7P_4}=\frac{4}{35}$

10. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 확률을 구한다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

확률의 덧셈정리에 의하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$

$P(A)=1-P(A^C)=\frac{1}{4}$ 이므로

$P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

11. 정답 ④

$P(A)+P(A^c)=1=P(A)+2P(A)$, $\therefore P(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 독립일 때, $P(A)P(B)=P(A\cap B)$

$\frac{1}{3}P(B)=\frac{1}{4}$, $\therefore P(B)=\frac{3}{4}$

12. 정답 ⑤

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 11인 경우의 수

$2!\times4!=2\times24=48$

숫자 6장을 나열하는 전체 경우의 수는 $6!=720$

$\therefore\ 1-\frac{48}{720}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

13.

주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 카드에 적혀있 는 수를 b라 하면

모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times5=15$

이때 $|a-b|=1$인 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$이고,

그 개수는 5이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

14.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

6의 약수가 아닐 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상이려면 4번의 시행 중 주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 2번 이상이면 된다.

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 0번일 확률은

${}_4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가

1번일 확률은

${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

따라서 구하는 확률은

$1-\left(\frac{1}{81}+\frac{8}{81}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

15.

8개의 공 중 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_4$

(i) 꺼낸 공 중 검은 공이 0개일 확률은 $\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{1}{70}$

(ii) 꺼낸 공 중 검은 공이 1개일 확률은 $\frac{{}_4C_1\times{}_4C_3}{{}_8C_4}=\frac{16}{70}$ 따라서

꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은 $1-\left(\frac{1}{70}+\frac{16}{70}\right)=\frac{53}{70}$

16.

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 사건을 X, 주머니에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 사건을 Y라 하자.

$P(X)=\frac{1}{8}$, $P(X^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

주머니 A에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 다음과 같다.

(i) 1이 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우의 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

(ii) 1과 2가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$

(iii) 2와 3이 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$

$P(Y|X)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$

$P(X\cap Y)=P(X)P(Y|X)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{40}$

주머니 B에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 3과 4가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우이다.

$P(Y|X^C)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$

$P(X^C\cap Y)=P(X^C)P(Y|X^C)$

$=\frac{7}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$

$P(Y)=P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)$

$=\frac{3}{40}+\frac{7}{30}=\frac{37}{120}$

17.

$P(A|B)=P(B|A)$이므로 $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$,

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$P(A)=P(B)=x$라 할 때, $x+x-\frac{1}{4}=1$이므로 $\therefore P(A)=x=\frac{5}{8}$

18.
전체 경우의 수는 $6!=720$
A와 B가 이웃하는 경우의 수는 $5!\times2=240$
A와 C가 이웃하는 경우의 수는 $5!\times2=240$
A, B, C가 모두 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2=24\times2=48$
A가 B 또는 C와 이웃하는 경우의 수는 $240+240-48=432$
$\therefore \frac{432}{720}=\frac{108}{180}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

19.
$a_1\times a_2=1\times3$ 또는 1×5 또는 3×5일 때, $a_3+a_4\geq16$을 만족하는 경우의 는 $(6,10),(7,9),(7,10),(8,9),(8,10),(9,10)$, 6개
$\therefore 3\times6=18$
$a_1\times a_2=1\times7$ 또는 3×7또는 5×7일 때, $a_3+a_4\geq16$을 만족하는 경우의 수는 8, 9, 10중에서 2개를 선택해야 하므로 ${}_3C_2=3$
$\therefore 3\times3=9$
전체 경우의 수는 ${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$
$\therefore \frac{27}{210}=\frac{9}{70}$

20.
검은색 마스크 3개를 선택하는 경우의 수
${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=3\times4\times7$,
마스크 3개를 선택하는 전체 경우의 수는
${}_{14}C_3=\frac{14\times13\times12}{3\times2\times1}=14\times13\times2$
모두 검은색 마스크가 선택될 확률은 $\frac{3\times4\times7}{14\times13\times2}=\frac{3}{13}$
꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은
$1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$

21.
$P(A)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}$,
2가 3개 선택되는 경우의 수 $P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$
곱한 값이 8이고, 흰 공은 1개 검은 공은 2개 선택되는 경우
$P(A\cap B)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$
$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{12}{20}+\frac{4}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

22.
이 조사에 참여한 학생 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는 20
이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B, 1학년 학생인 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $P(E|B)$이다.
이때 $P(B)=\frac{9}{20}$이고, 사건 $E\cap B$는 진로활동 B를 선택한 1학년 학생을 선택하는 사건이므로
$P(E\cap B)=\frac{5}{20}$
따라서 구하는 확률은
$P(E|B)=\frac{P(E\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$

23.
숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는
${}_5\Pi_4=5^4$
이 중에서 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 천의 자리의 숫자가 3, 백의 자리의 숫자가 5인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=5^2$
(ⅱ) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우
천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2
이 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_5\Pi_3=5^3$
이므로 이 경우의 수는
2×5^3
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 3500보다 큰 자연수의 개수는
$5^2+2\times5^3$
따라서 구하는 확률은
$\frac{5^2+2\times5^3}{5^4}=\frac{11}{25}$

24.
주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6^2\times2^4$
(ⅰ) 앞면이 나온 동전의 개수가 1인 경우의 수는
${}_4C_1=4$
이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는
$4\times1=4$
(ⅱ) 앞면이 나온 동전의 개수가 2인 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$
이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,2)$ 또는 $(2,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는
$6\times2=12$
(ⅲ) 앞면이 나온 동전의 개수가 3인 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,3)$, 또는 $(3,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는
$4\times2=8$
(ⅳ) 앞면이 나온 동전의 개수가 4인 경우의 수는
${}_4C_4=1$
이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,4)$ 또는 $(2,2)$ 또는 $(4,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는
$1\times3=3$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는
$4+12+8+3=27$
따라서 구하는 확률은
$\frac{27}{6^2\times2^4}=\frac{3}{64}$

25.
$(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$를 만족시키려면
세 수 $(a-2)^2$, $(b-3)^2$, $(c-4)^2$ 중
한 개의 수가 0이고, 두 개의 수가 1이어야 한다.
$(a-2)^2=0$, $(b-3)^2=0$, $(c-4)^2=0$이 될 확률은 각각 $\frac{1}{6}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$(a-2)^2=1$, $(b-3)^2=1$, $(c-4)^2=1$이 될 확률은 각각 $\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은 ${}_3C_1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

26.

모든 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\times4=16$

$a\times b>31$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(5, 8)$, $(7, 6)$, $(7, 8)$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$

27.

주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 E, 주사위의 눈의 수가 5 이상인 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$

$P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{15}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{45}+\frac{6}{45}=\frac{7}{45}$

$P(E\cap F)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{45}$

따라서

$P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{7}{45}}=\frac{1}{7}$

28. $P(A)=\frac{1}{3}$ 이므로 $P(A^C)=1-P(A)=\frac{2}{3}$

$P(A^C)P(B)=\frac{2}{3}\times P(B)=\frac{1}{6}$ 에서

$P(B)=\frac{1}{4}$

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

29. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는 $6\times6=36$

두 수 a, b의 최대공약수가 홀수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 a, b의 최대공약수가 짝수인 사건이다. a, b의 최대공약수가 짝수이면 a, b 모두 짝수이므로 이 경우의 수는 $3\times3=9$이다.

따라서 $P(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

30. 전체 경우의 수 : ${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

ⅰ) 가장 작은 수가 5인 경우

6, 7, …, 10에서 2개를 더 뽑아야 하므로 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

ⅱ) 가장 작은 수가 6인 경우

7, 8, 9, 10에서 두 개를 더 뽑아야 하므로 ${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

$\therefore\ 120-10-6=104$ $\quad\therefore\ \frac{104}{120}=\frac{13}{15}$

31.

(ⅰ) $|a-3|+|b-3|=2$인 경우

$(a-3, b-3)=(0, \pm2), (\pm1, \pm1), (\pm2, 0)$

$(a, b)=(3, 3\pm2), (3\pm1, 3\pm1), (3\pm2, 3)$

$(a, b)=(3, 5), (3, 1), (4, 4), (4, 2)$

$(2, 4), (2, 2), (5, 3), (3, 5)$

(ⅱ) $a=b$인 경우

$(a, b)=(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b)은

$(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (3, 3)$

$(4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 5), (6, 6)$의 12가지이므로 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

32.

두 사건 A, B에 대하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

$1=P(A)+\frac{1}{6}$, $P(A)=\frac{5}{6}$

따라서 $P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

33.

$P(A^C)=P(B)=\frac{2}{5}$에서

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{6}{25}=\frac{19}{25}$

34.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 A는 두 수 a, b가 모두 홀수인 사건의 여사건이므로

$n(A)=36-3\times3=27$

$P(A)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

$A\cap B$는 두 수 a, b가 모두 짝수인 사건이므로

$n(A\cap B)=3\times3=9$

$P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

35.

$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$이므로

$P(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

36.

이 고등학교 학생 200명을 대상으로 조사한 결과이므로

$10a+b+(48-2a)+(b-8)=200$

$4a+b=80$ … ㉠

이 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 남학생인 사건을 X, 휴대폰 요금제 A를 선택한 사건을 Y라 하면

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{10a}{200}}{\frac{10a+b}{200}}=\frac{5}{8}$

$5(10a+b)=80a$, $b=6a$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=8$, $b=48$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $b-a=40$

37.

(ⅰ) $a=1$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 b는 없다.

(ⅱ) $a=3$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 b는 $4, 6, 8, 10$이다.

(ⅲ) $a=5$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 b는 $6, 8, 10$이다.

(ⅳ) $a=7$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 b는 $8, 10$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 조건을 만족하는 가짓수는9가지이다.

$\therefore \frac{9}{4\times4}=\frac{9}{16}$

38.

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{10}$

39.

주머니 A에서 공을 꺼내는 사건을 X, 주머니에서 흰 공을 꺼내는 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{2}$ 이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{2}\times\frac{21}{50}=\frac{21}{100}$

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{21}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{14}{50}=\frac{35}{100}$

구하는 확률은 $\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$

40.

한 개의 동전을 6번 던져서 앞면이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 앞면이 0번 또는 1번 나오는 사건이므로 그 확률은

$\mathrm{P}(A^C)={}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{64}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$

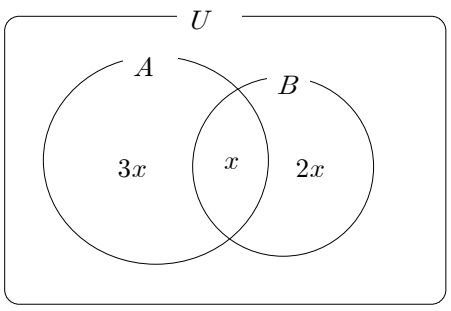
41.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{x}$라 하면

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{1}{4}$에서 $\mathrm{P}(\mathrm{A})=4\mathrm{x}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(\mathrm{B})=3\mathrm{x}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{7}{10}=7\mathrm{x}$ 이므로 $x=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{10}$



42.

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{9}=\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})=\{\mathrm{P}(\mathrm{A})\}^2$이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$

43.

a, b, c가 순서에 관계없이 $1, 1, 4$ 또는 $1, 2, 2$이면 곱이 4가 된다.

따라서 구하는 확률은

$\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)\times\frac{1}{6^3}=\frac{1}{36}$

44. 정답 51

[해설]

주머니에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

점수가 24 이하의 짝수인 경우는

(ⅰ) 꺼낸 공이 서로 다른 색인 경우

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$

(ⅱ) 꺼낸 공이 모두 흰색 공이고 그 수의 곱이 짝수인 경우

꺼낸 공이 모두 흰색 공인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이고 그 중 곱이 홀수인 경우는 1가지 경우이므로 곱이 짝수인 경우의 수는

$6-1=5$

(ⅲ) 꺼낸 공이 모두 검은색이고 그 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우

(4, 5), (4, 6)의 두 가지 경우가 있다.

이상에서 구하는 확률은

$\frac{16+5+2}{28}=\frac{23}{28}$

$\therefore\ p+q=28+23=51$

45. [정답] ①

[해설]

$a_k\le k$를 만족시키는 자연수 k $(1\le k\le5)$의 최솟값이 3인 사건을 A, $a_1+a_2=a_4+a_5$인 사건을 B라 하자. $a_k\le k$를 만족시키는 자연수 $k(1\le k\le5)$의 최솟값이 3이면, $a_1>1$, $a_2>2$, $a_3\le3$이다.

(Ⅰ) $a_3=1$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\frac{3\times3\times2!}{5!}=\frac{3}{20}$

(Ⅱ) $a_3=2$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\frac{3\times2\times2!}{5!}=\frac{1}{10}$

(Ⅲ) $a_3=3$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\frac{2\times2\times2!}{5!}=\frac{1}{15}$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{9+6+4}{60}=\frac{19}{60}$

$a_1+a_2=a_4+a_5$이면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$에서

$a_3=15-2(a_1+a_2)=2\{7-(a_1+a_2)\}+1$

이므로 a_3의 값은 홀수이다.

(ⅰ) $a_3=1$인 경우

$a_1+a_2=7$이므로 순서쌍 (a_1, a_2)는 (2, 5), (3, 4), (4, 3)

(ⅱ) $a_3=3$인 경우

$a_1+a_2=6$이므로 순서쌍 (a_1, a_2)는 (2, 4)

꿈을 현실로! 희망 부산교육

(i), (ii)에 의하여

$P(A\cap B)=\frac{(3+1)\times 2!}{5!}=\frac{1}{15}$

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}}=\frac{4}{19}$

46. 62

최대 5번 뒤집을수 있다.

죽, 5번 뒤집기 / 3번 뒤집기 / 1번 뒤집기

뒤집는 사건의 확률 $p=\frac{1}{4}$

그대로 사건의 확률 $q=1-p=\frac{3}{4}$

(i) 5번 뒤집는 상황

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4^5}\cdots ㉠$$

(ii) 3번 뒤집는 상황

$${}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{90}{4^5}\cdots ㉡$$

(iii) 1번 뒤집는 상황

$${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{4^5}\cdots ㉢$$

따라서 $128\left(\frac{1+90+405}{4^5}\right)=128\times\frac{496}{4^5}=62$

47. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을 B라 하자.

주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9이므로 이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 꺼낸 2개의 공의 색깔에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (①, ❷) 또는 (②, ❶)이어야 하므로

$P(A\cap B)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (❶, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❶을 주머니에 다시 넣거나, 꺼낸 2개의 공이 (❷, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❷를 주머니에 다시 넣어야 하므로

$P(A\cap B^C)=\frac{1}{{}_5C_2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{{}_5C_2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A\cap B^C)}$

$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$

48. 정답 ④

공이 8개인 경우

①①④④일 때,

흰 공1개 흰 공1개 흰 공2개, 검공1개 흰 공2개 검공1개

↳ 공은 8개 검공은 2개

↳ 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{6}{256}=\frac{3}{128}$

②②②②일 때,

흰 공1개 검공1개, 흰 공1개 검공1개, 흰 공1개 검공1개, 흰 공1개 검공1개

↳ 공은 8개 검공은 4개

↳ 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

①②②④일 때,

흰 공1개, 흰 공1개 검공1개, 흰 공1개 검공1개, 흰 공2개 검공1개

↳ 공은 8개 검공은 3개

↳ 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{4!}{2!}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 확률은

$\frac{3}{128}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{128}+\frac{1}{4}=\frac{3+32}{128}=\frac{35}{128}$

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{3}{128}$

공이 8개인 사건을 C, 검공이 2개인 사건을 D라 할 때,

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\frac{3}{128}}{\frac{35}{128}}=\frac{3}{35}$

49.

만들 수 있는 모든 네 자리 자연수의 개수는 ${}_5P_4=5\times 4\times 3\times 2=120$

5의 배수인 네 자리 자연수는

일의 자릿수가 5이어야 하므로

5의 배수인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4P_3=4\times 3\times 2=24$

즉, 택한 수가 5의 배수일 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

또 천의 자릿수가 3이고 3500 이상인 네 자리 자연수의 개수는

${}_3P_2=3\times 2=6$

천의 자릿수가 4인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4P_3=4\times 3\times 2=24$

이므로 3500이상인 네 자리 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

즉, 택한 수가 3500 이상일 확률은 $\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$

이때 5의 배수이고 3500 이상인 네 자리 자연수는 천의 자릿수가 4이고 일의 자릿수가 5인 경우이므로 그 개수는 ${}_3P_2=3\times 2=6$

즉, 택한 수가 5의 배수이고 3500 이상일 확률은

$\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{20}=\frac{3}{5}$

50.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$b-a \geq 5$인 사건을 E, $c-a \geq 10$인 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$이다.

모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_{12}C_3 = 220$

이때 $b-a \geq 5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, …, $(1, 11)$

$(2, 7)$, $(2, 8)$, …, $(2, 11)$

⋮

$(6, 11)$

$a=1$일 때 c의 개수는 $6+5+4+3+2+1=21$

$a=2$일 때 c의 개수는 $5+4+3+2+1=15$

$a=3$일 때 c의 개수는 $4+3+2+1=10$

$a=4$일 때 c의 개수는 $3+2+1=6$

$a=5$일 때 c의 개수는 $2+1=3$

$a=6$일 때 c의 개수는 1

이므로 $b-a \geq 5$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$21+15+10+6+3+1=56$

즉, $P(E) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

한편, $b-a \geq 5$이고 $c-a \geq 10$인 경우는

$a=1$, $c=11$일 때

$b=6$, 7, 8, 9, 10

$a=1$, $c=12$일 때

$b=6$, 7, 8, 9, 10, 11

$a=2$, $c=12$일 때

$b=7$, 8, 9, 10, 11

이므로 $b-a \geq 5$이고 $c-a \geq 10$인 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$5+6+5=16$

즉, $P(E \cap F) = \frac{16}{220} = \frac{4}{55}$

따라서

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}} = \frac{2}{7}$$

즉, $p=7$, $q=20$이므로 $p+q=7+2=9$

51.

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 각각 1,2일 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$이다.

$a_1+a_2+a_3 > a_4+a_5+a_6$일 사건을 A, $a_1=a_4=1$일 사건을 B라 하자.

$a_1+a_2+a_3 > a_4+a_5+a_6 \geq 3$

(Ⅰ) $a_1+a_2+a_3=4$인 경우

$a_1+a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

$a_4+a_5+a_6=3$일 확률은 ${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3^3} = \frac{6}{3^6}$

(Ⅱ) $a_1+a_2+a_3=5$인 경우

$a_1+a_2+a_3=5$일 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $3 \leq a_4+a_5+a_6 \leq 4$일 확률은 ${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{7}{3^3} = \frac{84}{3^6}$

(Ⅲ) $a_1+a_2+a_3=6$인 경우

$a_1+a_2+a_3=6$일 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$3 \leq a_4+a_5+a_6 \leq 5$일 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{19}{3^3} = \frac{152}{3^6}$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$P(A) = \frac{6}{3^6} + \frac{84}{3^6} + \frac{152}{3^6} = \frac{242}{3^6}$

$a_1=a_4=1$이면 $a_2+a_3 > a_5+a_6 \geq 2$이다.

(i) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=3$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=3$일 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3^2}$

$a_5+a_6=2$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{4}{3^2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3^6}$

(ii) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=4$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$2 \leq a_5+a_6 \leq 3$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3^2}$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{5}{3^2} = \frac{20}{3^6}$

(i), (ii)에 의하여

$P(A \cap B) = \frac{4}{3^6} + \frac{20}{3^6} = \frac{24}{3^6}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{24}{242} = \frac{12}{121}$

따라서 $p=121$, $q=12$이므로 $p+q=133$

52.

자연수를 $3k-2$, $3k-1$, $3k$이라 할 때,

$3k-2$, $3k-1$, $3k$를 선택하는 경우

$3k-1=5$인 경우는 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$

$3k-2=10$인 경우는 ${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$

$3k-1=5$, $3k-2=10$인 경우 ${}_3C_1 = 3$이므로

$12+9-3=18$

$3k-2$, $3k-2$, $3k-2$를 선택하는 경우,

1, 4, 7, 10에서 10을 포함해서 선택하는 경우는 ${}_3C_2 = 3$

$3k-1$, $3k-1$, $3k-1$을 선택하는 경우,

2, 5, 8선택하는 경우 한가지 ∴ $18+3+1=22$

10개의 자연수 중 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ ∴ $\frac{22}{120} = \frac{11}{60}$

53.

[실행1]에서 동전을 던져 앞면이 나왔을 때, $p = \frac{1}{2}$

A주머니에서 흰 공 2개가 B주머니로 갈 때, $p = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

A에는 흰 공 1개, 검은 공 1개, B에는 흰 공5개, 검은 공1개

[실행2]에서 흰 공이 모두 A로 가야하므로 $p = \frac{{}_5C_5}{{}_6C_5} = \frac{1}{6}$

∴ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

A주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개가 B주머니로 갈 때,

$p=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

A에는 흰 공 2개, B에는 흰 공4개, 검은 공2개

[실행2]에서 흰 공 4개 모두 가야 하므로 $p=\frac{{}_4C_4\times{}_2C_1}{{}_6C_5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

[실행1]에서 동전을 던져 뒷면이 나왔을 때, $p=\frac{1}{2}$

A주머니에서 흰 공 3개가 B주머니로 갈 때,

B주머니에는 흰 공이 6개가 되므로 [실행2]후에 흰 공이 남는다.

A주머니에서 흰 공 2개, 검은 공 1개가 B주머니로 갈 때,

$p=\frac{{}_3C_2\times{}_1C_1}{{}_4C_3}=\frac{3}{4}$

A에는 흰 공이 1개, B에는 흰 공 5개, 검은 공 2개

[실행2]에서 흰 공 5개 모두 가야 하므로 $p=\frac{{}_5C_5}{{}_7C_5}=\frac{1}{21}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{21}=\frac{3}{168}$

[실행1]에서 흰 공이 2개 넘어가는 사건을 S

[실행2]이 끝난 후 흰 공이 남아 있지 않은 사건을 T라 할 때,

$\mathrm{P(T)}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{3}{168}=\frac{14+7+3}{168}=\frac{24}{168}$

$\mathrm{P(S\cap T)}=\frac{1}{24}+\frac{3}{168}=\frac{10}{168}$

$\mathrm{P(S|T)}=\frac{\mathrm{P(S\cap T)}}{\mathrm{P(T)}}=\frac{\frac{10}{168}}{\frac{24}{168}}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

$\therefore\ p+q=17$

54.

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) 사건 A가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때, 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\ \cdots\ ㉠$

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\times\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\ \cdots\ ㉡$

㉠, ㉡의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

(ii) 사건 $A\cap B$가 일어날 확률

㉠에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은 ${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_2C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2=3\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$

㉡에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{13}{72}$

(i), (ii)에서 구하는 조건부 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}}=\frac{13}{36}$ 이므로 $p+q=36+13=49$

55.

3개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 5번 반복할 때 나오는 모든 경우의 수는

3^5

이때 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) 한 개의 숫자만 나오는 경우

이 경우의 수는 3

(ii) 두 개의 숫자가 나오는 경우

1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는

$2^5-2=30$

1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우

$2^5-2=30$

그러므로 이 경우의 수는

$30+30=60$

(i), (ii)에 의하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$3+60=63$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{63}{3^5}=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$

이므로

$p+q=27+20=47$

56.

두 수의 곱이 모든 양의 약수의 개수가 3 이하인 사건을 X,

두 수의 합이 짝수인 사건을 Y라 하자.

사건 X를 만족시키는 경우는 두 수 중 하나가 1이거나 두 수가 같은 소수일 때이다.

(i) 두 수 중 하나가 1일 때 $\frac{{}_1C_1\times{}_{14}C_1}{{}_{15}C_2}=\frac{2}{15}$

(ii) 두 수가 같은 소수일 때

(1. 두 수가 2일 때 $\frac{{}_2C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{1}{105}$

(2. 두 수가 3일 때 $\frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{1}{35}$

(3. 두 수가 5일 때 $\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{2}{21}$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(X)=\frac{4}{15}$

두 사건 X와 Y를 동시에 만족시키는 경우는

(i)에서 두 수가 1, 3이거나 두 수가 1, 5인 경우 또는 (ii)인 경우이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1+{}_1C_1\times{}_5C_1+{}_2C_2+{}_3C_2+{}_5C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{22}{105}$

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{11}{14}$

따라서 $p+q=25$

57. 선택한 함수 f가 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인 사건을 A, $f(1)=f(5)$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

X에서 X로의 모든 함수의 개수는 8^8이다.
4 이하의 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인
$f(2n-1)$과 $f(2n)$을 정하는 경우의 수는
${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$
4 이하의 모든 자연수 n에 대하여
$f(2n-1)<f(2n)$인 경우의 수는 28^4이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{28^4}{8^8}$
(ⅰ) $f(1)=f(5)$, $f(2)=f(6)$인 경우
$f(1)=f(5)<f(2)=f(6)$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2$이고, $f(3)$과 $f(4)$, $f(7)$과 $f(8)$을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2$이므로 $f(2)=f(6)$인 경우의 수는 $({}_8C_2)^3=28^3$이다.
(ⅱ) $f(1)=f(5)$, $f(2)\neq f(6)$인 경우
$f(1)=f(5)<f(2)<f(6)$ 또는
$f(1)=f(5)<f(6)<f(2)$
이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$을 정하는 경우의 수는 $2\times{}_8C_3$
$=2\times\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=112$이고, $f(3)$과 $f(4)$, $f(7)$과 $f(8)$을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2=28$
이므로 $f(2)\neq f(6)$인 경우의 수는 112×28^2이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의해
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{28^3+112\times28^2}{8^8}=\frac{140\times28^2}{8^8}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{140\times28^2}{8^8}}{\frac{28^4}{8^8}}=\frac{140}{28^2}=\frac{5}{28}$

58. 먼저 5번의 시행 후 흰 공과 검은 공의 개수의 합이 7개 이상이려면 5이상의 눈이 2번 이상 나와야 한다.
주사위를 한 번 던져 나온 눈으ㅣ수가 5이상인 시행을 5번 반복하면, 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\frac{1}{3}\right)$을 따르고, 2번 이상일 확률은
${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{131}{243}$
따라서 $a_5+b_5\geq7$일 확률은 $\frac{131}{243}$이다. 이 때, $a_k=b_k$가 존재할 확률을 구해보자.
주사위가 5이상이 나와서 흰 공을 2개 넣는 사건을 A, 주사위가 4이하가 나와서 검은 공을 1개 넣는 사건을 B라 하면,

ⅰ) 흰 공을 2개 넣는 사건이 2번 일어나는 경우
검은 공과 흰 공의 개수가 같아지려면 3회의 시행에서 A, B, B가 나와야 하고, 나머지 두 번의 시행에서 A, B가 나와야 한다. 이를 배치하는 경우의 수가 $3!\times2!=12$, A가 일어날 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은 $12\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{48}{243}$

ⅱ) 흰 공을 2개 넣는 사건이 3번 일어나는 경우
검은 공과 흰 공의 개수가 같아지려면 3회의 시행에서 A, B, B가 나와야 하고, 나머지 두 번의 시행에서 A, A가 나와야 한다. 이를 배치하는 경우의 수가 $3!\times1=6$
A가 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$, B가 일어날 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은 $6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{243}$

ⅲ) 흰 공을 2개 넣는 사건이 4번 이상 일어나는 경우 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 같아질 수 없다.
$\therefore\ \frac{\frac{48}{243}+\frac{12}{243}}{\frac{131}{243}}=\frac{60}{131}$, $\therefore\ p+q=191$

59.
'$f(1)\geq2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.'를 만족하는 함수 f의 개수는
(전체 함수의 개수) − ('$f(1)=1$이고, 함수 f의 치역이 B의 진부분집합'인 함수의 개수)이다.
(ⅰ) $f(1)=1$이고, $\{f(x)|x=2,3,4\}=\{1\}$이 되도록 하는 함수 f의 개수는 1이다.
(ⅱ) $f(1)=1$이고, $\{f(x)|x=2,3,4\}=\{2\}$이 되도록 하는 함수 f의 개수는 1이다.
(ⅲ) $f(1)=1$이고, $\{f(x)|x=2,3,4\}=\{3\}$이 되도록 하는 함수 f의 개수는 1이다.
(ⅳ) $f(1)=1$이고,
$\{f(x)|x=2,3,4\}=\{1,2\}$이 되도록 하는 함수 f의 개수는 $2^3-2=6$이다.
(ⅴ) $f(1)=1$이고,
$\{f(x)|x=2,3,4\}=\{1,3\}$이 되도록 하는 함수 f의 개수는 $2^3-2=6$이다.
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 조건을 만족하는 함수의 개수는 $3^4-(1+1+1+6+6)=66$이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{66}{3^4}=\frac{22}{27}$

[다른 풀이]
$f(1)<2$ ($f(1)=2$)이고 함수 f의 치역은 B가 아닐 확률을 구해보자
$f(1)=1$이고 치역이 B가 아닌 경우의 수는
2가 치역의 원소가 아닌 방법의 수 2^3,
3이 치역의 원소가 아닌 방법의 수 2^3,
2와 3모두 치역의 원소가 아닌 방법의 수 1
에서 $2^3+2^3-1=15$가지이다.
따라서 $f(1)=1$이고 치역이 B가 아닐 확률은 $\frac{15}{3^4}=\frac{5}{27}$이므로
$1-\frac{5}{27}=\frac{22}{27}$

60.
4와 5가 적혀 있는 카드 사이에 한 장의 카드가 있다면 이 카드는 4보다 크고 5보다 작아야 하는데 이런 카드는 존재하지 않는다. 그러므로 4와 5가 적혀 있는 카드는 바로 옆에 나열되거나 4와 5가 적혀 있는 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 나열되어야 한다.
(ⅰ) 4와 5가 적혀 있는 카드가 바로 옆에 나열되는 경우의 수
(6또는7, 4, 5, 1또는2또는3)와 남은 카드 3장을 배열하는 경우와
(1또는2또는3, 5, 4, 6또는7)와 남은 카드 3장을 배열하는 경우이다.
${}_2C_1\times{}_3C_1\times4!\times2=288$
(ⅱ) 4와 5가 적혀 있는 카드 사이에 두 장 이상의 카드를 나열하는 경우의 수
4가 적힌 카드 바로 양옆에 6, 7이 적혀 있는 카드를 나열하고, 5가 적힌 카드의 양옆에 1, 2, 3이 적혀 있는 카드를 나열하면 된다.
${}_2P_2\times{}_3P_2\times3!=72$
따라서 구하는 확률은 $\frac{288+72}{7!}=\frac{1}{14}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

61.
8개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀있는 수가 같은 사건을 사건 A, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B라 하자.
꺼낸 공에 적혀있는 수가 같으려면 숫자 3 혹은 4를 선택하여야 한다. 3 혹은 4를 선택하는 방법의 수는 2가지, 나머지 공 6개 중에서 숫자가 다른 공 2개를 선택하는 방법의 수는 ${}_6C_2 = 15$가지이고 숫자 3, 3, 4, 4를 선택하는 경우가 중복되므로
$P(A) = \frac{2 \times {}_6C_2 - 1}{{}_8C_4}$ 이다.
꺼낸 공에 적힌 수가 같으면서 검은 공이 두 개이려면 숫자 3 혹은 4를 선택해야 하고 나머지 2개의 공은 검은 공이 1개, 흰 공이 1개이어야 한다. 이 경우 숫자 3, 3, 4, 4를 선택하는 경우가 중복되므로
$P(A \cap B) = \frac{2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1}{{}_8C_4}$ 이다. 따라서
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{17}{29}$ 이므로
$p = 29,\ q = 17$ 이고 $p + q = 26$

62.
8개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀있는 수가 같은 사건을 사건 A, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B라 하자.
꺼낸 공에 적혀있는 수가 같으려면 숫자 3 혹은 4를 선택하여야 한다. 3 혹은 4를 선택하는 방법의 수는 2가지, 나머지 공 6개 중에서 숫자가 다른 공 2개를 선택하는 방법의 수는 ${}_6C_2 = 15$가지이고 숫자 3, 3, 4, 4를 선택하는 경우가 중복되므로
$P(A) = \frac{2 \times {}_6C_2 - 1}{{}_8C_4}$ 이다.
꺼낸 공에 적힌 수가 같으면서 검은 공이 두 개이려면 숫자 3 혹은 4를 선택해야 하고 나머지 2개의 공은 검은 공이 1개, 흰 공이 1개이어야 한다. 이 경우 숫자 3, 3, 4, 4를 선택하는 경우가 중복되므로
$P(A \cap B) = \frac{2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1}{{}_8C_4}$ 이다. 따라서
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{17}{29}$

63.
주사위를 3번 던져 첫 번째, 두 번째, 세 번째 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 하고 세 수 a, b, c의 순서쌍을 (a, b, c)라 하자.
주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는
$6^3 = 216$
주어진 조건을 만족시키지 않는 경우는 빈 접시가 생기는 경우이다.
(i) 빈 접시가 1개인 경우
예를 들어, 1이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는
(3, 3, 5), (3, 5, 5), (3, 4, 5)
인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로
$2 \times \frac{3!}{2!} + 3! = 12$(가지)
같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는
접시인 경우도 각각 12가지이다.
그러므로 $12 \times 6 = 72$
(ii) 빈 접시가 2개인 경우
빈 접시가 2개인 경우는 두 접시가 이웃하는 경우이다.
예를 들어, 1, 2가 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는
(4, 4, 5), (4, 5, 5)
인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로
$2 \times \frac{3!}{2!} = 6$(가지)
같은 방법으로 빈 접시가 2, 3과 3, 4와 4, 5와 5, 6과 6, 1이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 6가지이다.
그러므로 $6 \times 6 = 36$
(iii) 빈 접시가 3개인 경우
예를 들어, 1, 2, 3이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는
(5, 5, 5)
인 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 1가지이다.
같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4와 3, 4, 5와 4, 5, 6과 5, 6, 1과 6, 1, 2가 적혀 있는 접시인 경우도 각각 1가지이다.
그러므로 $1 \times 6 = 6$
(i), (ii), (iii)에 의하여 빈 접시가 생기는 경우의 수는
$72 + 36 + 6 = 114$
따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{114}{216} = \frac{17}{36}$

64.
5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 모두 발표하는 발표 순서는 서로 다른 7개를 나열하는 것과 같으므로 7!
(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다
먼저 발표하는 경우 :
수학 동아리 A, B의 순서가 정해진 경우는 2개의 같은 것을 포함한 서로 다른 7개를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{7!}{2!} = 2520$
(ii) 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우 :
(i)에서 {A-(2개의 과학 동아리)-B}인 경우의 수가 포함되어 있으므로
{B-(2개의 과학 동아리)-A}인 경우의 수만 구하면 된다.
따라서 5개 과학 동아리 중 B, A사이 발표하는 2개의 과학 동아리를 뽑아 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$이고
네 동아리 {B-(2개의 과학 동아리)-A}를 하나로 묶어 남은 3개의 동아리와 발표하는 순서는 서로 다른 4개를 나열하는 경우의 수와 같으므로 4!
그러므로 $20 \times 4! = 480$
따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 확률은
$\frac{2520 + 480}{7!} = \frac{25}{42}$

65.
$X = \{1,2,3,4\}$의 공집합이 아닌 15개 부분집합에서 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_{15}P_3 = 15 \times 14 \times 13$
이때 $A \subset B \subset C$라면 $|A| < |B| < |C|$
(i) $|A| = 1, |B| = 2, |C| = 3$인 경우
$|A| = 1$인 경우의 수는 4
$A \subset B, |B| = 2$인 경우의 수는 3
$B \subset C, |C| = 3$인 경우의 수는 2
이므로 이 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$
(ii) $|A| = 1, |B| = 2, |C| = 4$인 경우
$|A| = 1$인 경우의 수는 4
$A \subset B, |B| = 2$인 경우의 수는 3
$B \subset C, |C| = 4$인 경우의 수는 1
이므로 이 경우의 수는 $4 \times 3 \times 1 = 12$
(iii) $|A| = 1, |B| = 3, |C| = 4$인 경우

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$|A|=1$인 경우의 수는 4
$A \subset B, |B|=3$인 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
$B \subset C, |C|=4$인 경우의 수는 1
이므로 이 경우의 수는 $4\times3\times1=12$
(iv) $|A|=2, |B|=3, |C|=4$인 경우
$|A|=2$인 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
$A \subset B, |B|=3$인 경우의 수는 2
$B \subset C, |C|=4$인 경우의 수는 1
이므로 이 경우의 수는 $6\times2\times1=12$
그러므로 (i),(ii),(iii),(iv)에 의해
모든 경우의 수는 $24+12+12+12=60$
따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{60}{15\times14\times13}=\frac{2}{91}$$

66.
구하는 확률을 $P(X)$라 하면 전체에서 $A\cap B=\varnothing$인 경우를 제외하는 여사건의 확률이므로 $1-P(X^c)$을 계산하면 된다.
(1. $a_2=2$일 때, a_1은 1가지이고 b_1, b_2는 3, 4, 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_4C_2$이므로 이 경우의 수는 $1\times{}_4C_2=6$에서 6가지 이다.
(2. $a_2=3$일 때, a_1은 1, 2중 한 개를 선택하는 ${}_2C_1$이고, b_1, b_2는 4, 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_3C_2$이므로 이 경우의 수는

$${}_2C_1\times{}_3C_2=6$$

에서 6가지 이다.
(3. $a_2=4$일 때, a_1은 1, 2, 3중 한 개를 선택하는 ${}_3C_1$이고, b_1, b_2는 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_2C_2$이므로 이 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_2C_2=3$$

에서 3가지 이다.
그리고 A와 B는 순서가 바뀔 수도 있으므로, $A\cap B=\varnothing$인 경우의 수는

$$(6+6+3)\times2=30$$

에서 30가지 이고, 전체 경우의 수는 ${}_6C_2\times{}_6C_2=225$
에서 225가지 이다.
따라서 $P(X^c)=\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$이고, 구하는 확률은 다음과 같다.

$$P(X)=1-P(X^c)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

67.
원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4=210$
1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면
$A_0=\{3, 6, 9\}$, $A_1=\{1, 4, 7, 10\}$, $A_2=\{2, 5, 8\}$
이다. 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X는 세 집합 A_0, A_1, A_2 중 두 집합에서 각각 2개의 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.
(i) A_0, A_1인 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_4C_2=18$
(ii) A_0, A_2인 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2=9$
(iii) A_1, A_2인 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_3C_2=18$
(i), (ii), (iii)에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는
$18+9+18=45$
따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

68.
한 번의 시행 결과로 나타나는 경우의 확률은 다음과 같다.
① A가 가진 공의 개수가 1개 늘어나는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
② A가 가진 공의 개수의 변화가 없는 경우:
A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{2}$
③ A가 가진 공의 개수가 1개 줄어드는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
한편, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 되는 경우는 4번째 시행에서 ①이 일어나고 3번째 시행에서는 ① 또는 ②가 일어나야 한다.
(i) 3번째 시행에서 ①이 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ③이 일어나거나 두 시행 모두 ②가 일어나야 하므로

$$\left\{2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(ii) 3번째 시행에서 ②가 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ②가 일어나야 하므로

$$\left({}_2C_1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

그러므로 구하는 확률은 $\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{128}$
따라서 $p=128$, $q=7$이므로 $p+q=135$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 09 통계

해 설

1. ①

이항분포의 $E(X)=np$ 이므로 $E(X)=30\times\frac{1}{5}=6$

2. [출제의도] 이항분포를 이해하여 확률을 계산한다.
확률변수 X는 이항분포 $B(45,\ p)$를 따르므로

$E(X)=45p=15$에서 $p=\frac{1}{3}$

3.

$E(X)=60\times\frac{1}{4}=15$

4. 이항분포 $B\left(60,\ \frac{5}{12}\right)$를 따르는 확률변수 X의 평균은

$E(X)=60\times\frac{5}{12}=25$

5. $V(X)=npq=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$

$V(2X)=4V(X)=4\times\frac{2}{9}n=\frac{8}{9}n=40,\ \therefore\ n=40\times\frac{9}{8}=45$

6.

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{12}{6}=2$

7. [정답] ②
[해설]
주어진 확률분포에서 $a+(a+b)+b=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$E(X^2)=a+4(a+b)+9b=a+5$
$4a+13b=5$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{3}$따라서 $b-a=\frac{1}{6}$

8. ②

X : 시험 점수 , 확률변수 X는 $N(68,10^2)$ 을 따른다.
$P(55\le X\le 78)=P\left(\frac{-13}{10}\le Z\le\frac{10}{10}\right)$
즉, $P(-1.3\le Z\le 1)=0.4032+0.3413$
$=0.7445$

9. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 표본평균과 신뢰구간을 구한다.
양파 64개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 % 의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}$
$\overline{x}-3.92\le m\le\overline{x}+3.92$
이때 $\overline{x}-3.92=240.12,\ \overline{x}+3.92=a$이므로
$\overline{x}=240.12+3.92=244.04$
$a=244.04+3.92=247.96$
따라서
$\overline{x}+a=244.04+247.96=492$

10. 정답 ②

X	0	1	2	3	4
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_4$

X	0	1	2	3	4
Y	0	1	2	2	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{6}{16}+2\times\frac{4}{16}+2\times\frac{1}{16}$
$=\frac{4+12+8+2}{16}=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}$

11. 정답 ②
정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$의 95%의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$n=49$이고 정규분포 $N(m,\ 5^2)$의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{7}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{7}$

$\begin{cases}\overline{x}-1.96\times\frac{5}{7}=a\\ \overline{x}+1.96\times\frac{5}{7}=\frac{6}{5}a\end{cases}$ 두 식을 빼면,

$2\times1.96\times\frac{5}{7}=\frac{a}{5},\ a=50\times1.96\times\frac{1}{7}=50\times0.28=14$

두 식을 더하면 $2\overline{x}=\frac{11}{5}a=14\times\frac{11}{5},\ \overline{x}=\frac{77}{5}=15.4$

12.
이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$에서 $E(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$
$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2n}{9}$
$E(3X-1)=3E(X)-1=3\times\frac{n}{3}-1=17$
$n=18$
따라서 $V(X)=\frac{2\times18}{9}=4$

13.
$N_A(9,\ 0.4^2),\ N_B(20,\ 1^2)$
$P_A(8.9\le x\le 9.4)=P_B(19\le x\le k)$
$P_A(8.9\le x\le 9.4)=P_A\left(\frac{8.9-9}{0.4}\le z\le\frac{9.4-9}{0.4}\right)=P_A(-0.25\le z\le 1)$
$P_B(19\le x\le k)=P_B\left(\frac{19-20}{1}\le z\le\frac{k-20}{1}\right)=P_B(-1\le z\le k-20)$
$k-20=0.25,\ k=20.25$

14.
평균은 $0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{2}+a\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}=E(X)=m$
제곱의 평균은 $0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{2}+a^2\times\frac{2}{5}=E(X^2)=\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}$
$\sigma(X)=E(X)$이므로
$V(X)=E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2,\ 2E(X)^2=E(X^2)$
$\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}=2\times\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8}{25}a^2+\frac{4}{5}a+\frac{1}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\frac{2}{25}a^2-\frac{4}{5}a=\frac{2}{25}(a^2-10a)=0,\ a=10$

$E(X)=\frac{2}{5}\times10+\frac{1}{2}=\frac{9}{2},\ E(X^2)=\frac{2}{5}\times100+\frac{1}{2}=\frac{81}{2}$

$\therefore\ E(X^2)+E(X)=\frac{9}{2}+\frac{81}{2}=45$

15.

$\begin{cases}\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{4}=746.1\\ \overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{4}=755.9\end{cases}$

두 조건식을 더하면 $2\overline{X}=1502,\ \overline{X}=751$

$\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{4}=751+1.96\times\frac{\sigma}{4}=755.9,$

$\sigma=4\times\frac{755.9-751}{1.96}=4\times\frac{4.9}{1.96}=4\times\frac{490}{196}=4\times\frac{5}{2}=10$

99% 신뢰구간은 $\overline{X}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$a=751-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}},\ b=751+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

$b-a=2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le6$

$\frac{2.58\times20}{6}\le\sqrt{n},\ \frac{2.58^2\times400}{36}\le n$

$\frac{2.58}{3}\times\frac{2.58}{3}\times100=0.86\times0.86\times100=73.96\le n$

$\therefore$ n의 최솟값은 74

16.

주어진 확률분포에서

$a+\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a=3a=1$

$a=\frac{1}{3}$

따라서 $E(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{2}a+1\times\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}a=\frac{1}{6}$

17.

확률변수 X의 표준편차를 a라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(220,a^2)$을 따른다.

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(220,\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 이때,

$P(\overline{X}\le215)=P\left(Z\le\frac{215-220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z\le-\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)=P\left(Z\ge\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)=0.1587$에서

$P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)=0.3413$이므로 $\frac{5\sqrt{n}}{a}=1$

$\frac{a}{\sqrt{n}}=5$ …… ㉠

한편, 조건 (나)에서 확률변수 Y의 표준편차는 $\frac{3a}{2}$이므로

확률변수 Y는 정규분포 $N\left(240,\left(\frac{3a}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(240,\left(\frac{\frac{3a}{2}}{3\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고

㉠에서 $\frac{\frac{3a}{2}}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$이므로, $Z=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 따라서

$P(\overline{Y}\ge235)=P\left(Z\ge\frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)=P(Z\ge-2)=P(-2\le Z\le0)+0.5$

$=P(0\le Z\le2)+0.5=0.4772+0.5=0.9772$

18. 두 확률변수 X와 Y는 모두 정규분포를 따르고 표준편차가 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서 $g(x)=f(x-4)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 a이므로

$f(a)=g(a)=f(a-4)$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+(a-4)}{2}=8$

$a=10$

$P(8\le Y\le a)=P(8\le Y\le10)$

$=P\left(\frac{8-12}{2}\le Z\le\frac{10-12}{2}\right)$

$=P(-2\le Z\le-1)$

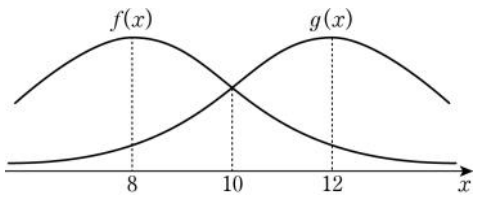
$=P(1\le Z\le2)$

$=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

[참고]



19. 100대를 임의 추출한 표본평균이 $\overline{x_1}$이고 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{x_1}$이고 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$x_1-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le x_1+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$ 이다.

$a=\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

400대를 임의 추출한 표본평균이 $\overline{x_2}$이고 신뢰도 99%의 신뢰 구간은 $x_1-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le x_1+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$ 이다.

$c=\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$

$a=c$이므로 $\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$ 이다.

$\overline{x_1}-\overline{x_2}=\sigma\left(\frac{1.96}{10}-\frac{2.58}{20}\right)$에서 $1.34=\frac{\sigma}{10}(1.96-1.29)$이다.

$\therefore\ \sigma=20,\ b-a=2\times1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}=7.84$

20.

확률변수 X가 이항분포 $B\left(36,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=24,\ V(X)=8$

$E(2X-a)=2E(X)-a=48-a$

$V(2X-a)=4V(X)=32$

이므로 $48-a=32$

따라서 $a=16$

21.

X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 직선

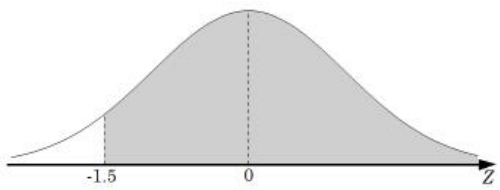
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$x=4$에 대하여 대칭이므로
$P(2 \le X \le 4)=s$라 하면
$P(4 \le X \le 6)=s$이고
$P(0 \le X \le 2)=P(6 \le X \le 8)$
$=\frac{3}{4}P(2 \le X \le 4)=\frac{3}{4}s$이다.
$1=P(0 \le X \le 8)$
$=P(0 \le X \le 2)+P(2 \le X \le 4)$
$+P(4 \le X \le 6)+P(6 \le X \le 8)$
$=\frac{3}{4}s+s+s+\frac{3}{4}s=\frac{7}{2}s$이므로 $s=\frac{2}{7}$이다.
그러므로 $P(2 \le X \le 6)$
$=P(2 \le X \le 4)+P(4 \le X \le 6)$
$=2s=\frac{4}{7}$

22.
평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르므로 $N(m, 5^2)$이고 여기서 36명을 임의추출하였으므로 $n=36$에서 $N\left(m, \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$이다.

$P(\overline{X} \ge 38)=0.9332$

$P(Z \ge \frac{38-m}{\frac{5}{6}})=0.9332$



표준정규분포의 그래프에서

$0.9332=0.5+0.4332=P(Z \ge -1.5)$

이므로 $\frac{38-m}{\frac{5}{6}}=-1.5$이고 $38-m=-\frac{5}{4}$에서 $m=39.25$이다.

23.
확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(ⅰ) $f(8)>f(14)$에서 $m<\frac{8+14}{2}$, 즉 $m<11$

(ⅱ) $f(2)<f(16)$에서 $m>\frac{2+16}{2}$, 즉 $m>9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m은 자연수이므로 $m=10$

$P(X \le 6)=P\left(Z \le \frac{6-10}{4}\right)=P(Z \le -1)$

$=0.5-P(0 \le Z \le 1)=0.1587$

24.
$V(X)=n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{2}{9}n=200$에서 $n=900$

따라서 $E(X)=900 \times \frac{1}{3}=300$

25.
모표준편차가 1이고 표본의 크기가 n일 때, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의

신뢰구간은 $\overline{x}-1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$100(b-a)=100 \times 2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}}=49$에서 $n=64$

26.
정규분포 $N(104, 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 과자 4상자의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(104, \frac{4^2}{4}\right)$ 즉, $N(104, 2^2)$을 따른다.

그러므로 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-104}{2}$는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따른다.

$P(a \le \overline{X} \le 106)=P\left(\frac{a-104}{2} \le Z \le 1\right)$

$P(-0.5 \le Z \le 1)=0.5328$이므로 $\frac{a-104}{2}=-0.5$

따라서 $a=103$

27.
$V(X)=n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$V(2X+1)=2^2 \times V(X)=n$

따라서 $n=15$

28.
$P(4 \le X \le 8)=P\left(-\frac{4}{3} \le Z \le 0\right)=P\left(0 \le Z \le \frac{4}{3}\right)$이므로

$P(4 \le X \le 8)+P(Y \ge 8)=\frac{1}{2}$이려면

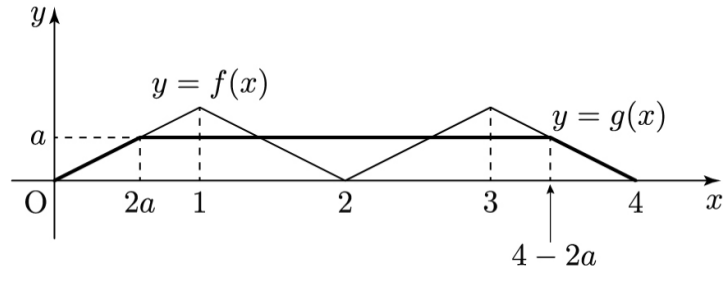
$P(Y \ge 8)=P\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)=P\left(Z \ge \frac{4}{3}\right)$이어야 한다.

$P\left(Y \le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)=P\left(Z \le \frac{8-m+\frac{2\sigma}{3}}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z \le \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=P(Z \le 2)=0.9772$

29.
$E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$
$=E(\overline{X})+\frac{\sigma(\overline{X})}{\sqrt{16}}=20+\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{85}{4}$

30. [정답] 24
[해설]
$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$이므로
$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$
조건 (가)와 (나)에 의하여
확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$P(0 \le Y \le 4)=1$이므로

$\frac{1}{2} \times 2a \times a+(4-4a) \times a+\frac{1}{2} \times 2a \times a=1$

$2a^2-4a+1=0$, $a=\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$0<a<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1<5a<2$

$P(0 \le Y \le 5a)$
$=P(0 \le Y \le 2a)+P(2a \le Y \le 5a)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \frac{1}{2} \times 2a \times a + 3a \times a = 4a^2$

$= 4 \times \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$

따라서 $p=6,\ q=4$이므로 $p \times q = 24$

31. ⑤

Ⅰ형 : 주사위를 던져서 3의 배수 나오는 사건
$\{1,2\} \Rightarrow$ 차 1 / $\{1,3\} \Rightarrow$ 처 2 / $\{2,3\} \Rightarrow$ 차 1
이렇게 3가지 상황 등장

Ⅱ형 : 주사위를 던져서 3의 배수가 안 나오는 사건
$\{1,2\} \Rightarrow$ 차 1 / $\{1,3\} \Rightarrow$ 차 2 / $\{1,4\} \Rightarrow$ 차 3
$\{2,3\} \Rightarrow$ 차 1 / $\{2,4\} \Rightarrow$ 차 2 / $\{3,4\} \Rightarrow$ 차 1
이렇게 6가지 상황 등정

평균$= \overline{X} = 2$ 인 상황

1차 시행	2차 시행	구분
1	3	㉠
2	2	㉡
3	1	㉢

$P(\overline{X}=2) = ㉠ + ㉡ + ㉢$ 이다.

㉠ 확률운
(Ⅰ형, 차1) × (Ⅱ형, 차3) + (Ⅱ형, 차1) × (Ⅱ형, 차3)
$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right)$
$= \frac{2}{81} + \frac{3}{81} = \frac{5}{81}$

㉡확률운
(Ⅰ형, 차2) × (Ⅰ형, 차2) + (Ⅰ형, 차2) × (Ⅱ형, 차2)
+ (Ⅱ형, 차2) × (Ⅰ형, 차2) + (Ⅱ형, 차2) × (Ⅱ형, 차2)
(Ⅰ형, 차2) × (Ⅰ형, 차2) $= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$
(Ⅰ형, 차2) × (Ⅱ형, 차2) $= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{81}$
(Ⅱ형, 차2) × (Ⅰ형, 차2) $= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{81}$
(Ⅱ형, 차2) × (Ⅱ형, 차2) $= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$
즉, $\frac{1}{81} + \frac{2}{81} + \frac{2}{81} + \frac{4}{81} = \frac{9}{81}$

32. [출제의도] 정규분포의 성질을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

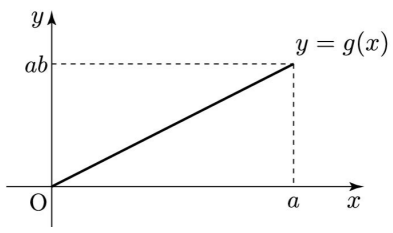
$\mathrm{E}(X) = m_1,\ \mathrm{E}(Y) = m_2,\ \mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = \sigma^2$
으로 놓으면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma^2)$을 따른다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이고, $f(a)=f(3a)$이므로
$m_1 = \frac{a+3a}{2} = 2a$
함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하고,
$f(a)=f(3a)=g(2a)$이므로
$g(0)=g(2a)$ 또는 $g(2a)=g(4a)$
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로
$m_2 = \frac{0+2a}{2} = a$ 또는 $m_2 = \frac{2a+4a}{2} = 3a$
$\mathrm{P}(Y \le 2a) = 0.6915 > 0.5$이므로 $m_2 < 2a$이다.
$a>0$이므로 $m_2 = a$
확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때
$\mathrm{P}(Y \le 2a) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{2a-a}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{a}{\sigma}\right)$
$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a}{\sigma}\right) = 0.6915$
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) = 0.1915$이므로
$\frac{a}{\sigma} = 0.5$, 즉 $\sigma = 2a$
따라서
$\mathrm{P}(0 \le X \le 3a) = \mathrm{P}\left(\frac{0-2a}{2a} \le Z \le \frac{3a-2a}{2a}\right)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$= 0.3413 + 0.1915$
$= 0.5328$

33. 정답 673

$\mathrm{P}(X \le 5t) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{5t-1}{t}\right) \ge \frac{1}{2}$이므로 $\frac{5t-1}{t} \ge 0,\ t \ge \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1) = \mathrm{P}\left(\frac{t^2-t+1-1}{t} \le Z \le \frac{t^2+t+1-1}{t}\right)$
$= \mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$
대칭축에 가까울수록 확률은 최대이므로 $t = \frac{1}{5}$일 때,
$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{5} \le Z \le \frac{6}{5}\right) = 0.288 + 0.385 = 0.673 = k,\ \therefore\ 1000k = 673$

34.
확률밀도함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(0 \le X \le a) = 1$에서 $ab = 1$ ……㉠
$g(x) = \mathrm{P}(0 \le X \le x) = bx$



확률밀도함수의 성질에 의하여 $\mathrm{P}(0 \le Y \le a) = \frac{1}{2} \times a \times ab = \frac{a^2 b}{2} = 1$
……㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2,\ b=\frac{1}{2}$
그러므로 $g(x) = \frac{1}{2}x$에서 $\mathrm{P}(0 \le Y \le c) = \frac{1}{2} \times c \times \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4} = \frac{1}{2},\ c^2 = 2$
따라서 $(a+b) \times c^2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 5$

35.
(1, 1, 3, 6), (1, 1, 4, 5), (1, 2, 2, 6), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 4)
(1, 3, 3, 4), (2, 2, 2, 5), (2, 2, 3, 4), (2, 3, 3, 3)
합이 11이 되는 9가지 중에서 (1, 2, 3, 5)는 $4! = 24$
(2, 2, 2, 5), (2, 3, 3, 3)은 세 수가 같으므로 $\frac{4!}{3!} = 4$
나머지는 같은 수가 두 개 이므로 $\frac{4!}{2!} = 12$
$\frac{1 \times 24 + 2 \times 4 + 6 \times 12}{6^4} = \frac{13}{162}$
$\therefore\ p+q = 162 + 13 = 175$

36.
X의 정규분포를 $N(m,\ \sigma^2)$라 할 때, Y의 정규분포를 $N(m-6,\ \sigma^2)$
(가)조건에서 $\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 11) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \ge 23) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 29)$
그러므로 $m = \frac{11+29}{2} = 20$
(나)조건에서 k는 두 함수의 교점임을 알 수 있다.
두함수의 대칭축사이 거리가 6이므로 $\frac{k-m}{\sigma} = \frac{3}{\sigma}$
$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \le \frac{3}{\sigma}\right) = 0.0668,\ \frac{3}{\sigma} = 0.4332,\ \sigma = 2$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\therefore\ \mathrm{E(X)}+\sigma(\mathrm{Y})=22$

37.

확률의 총합은 1이므로 $\frac{ac}{2}=1,\ ac=2$

$\mathrm{P}(X\le b)=\frac{bc}{2},\ \mathrm{P}(X\ge b)=\frac{(a-b)c}{2}=\frac{2-bc}{2}$

$\mathrm{P}(X\le b)-\mathrm{P}(X\ge b)=\frac{bc}{2}-\frac{2-bc}{2}=bc-1=\frac{1}{4},\ \therefore\ bc=\frac{5}{4}$

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{c}{b}x & (0\le x<b)\\ \frac{c}{a-b}x & (b\le x\le a)\end{cases}$$

$\sqrt{5}\le b$일 때, $\mathrm{P}(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{c}{b}\sqrt{5}=\frac{5c}{2b}=\frac{1}{2}$

$\frac{c}{b}=\frac{1}{5},\ b=5c$

$bc=5c^2=\frac{5}{4},\ c=\frac{1}{2}\ (\because\ c>0),\ b=\frac{5}{2},\ a=\frac{2}{c}=4$

$\therefore\ a+b+c=4+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=7$

38.

조건 (가)에서 $Y=3X-a$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-a)=3\mathrm{E}(X)-a=3m-a$

$m=3m-a$에서 $a=2m$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-a)=3\sigma(X)=6$

$\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4-m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge 2m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m}{6}\right)$

조건 (나)에 의하여

$\frac{4-m}{2}=-\frac{m}{6}$에서 $m=6$

그러므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 6^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 9)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{9-6}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

39. 확률변수 X가 갖는 값이 $X=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$\mathrm{E}(X)=5$

또 $\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$이므로 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{31}{5}$에서

$\mathrm{E}(X^2)=25+\frac{31}{5}$ 이때,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a=82a+58b+25c$

이므로

$82a+58b+25c=25+\frac{31}{5}$ …… ㉠

한편, 확률변수 Y가 갖는 값이 $Y=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로 $\mathrm{E}(Y)=5$이고,

$$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)+7^2\times b+9^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$$

$=82a+58b+25c+\frac{1}{20}-\frac{5}{2}+\frac{81}{20}=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$

㉠에서

$\mathrm{E}(Y^2)=25+\frac{31}{5}+\frac{8}{5}=25+\frac{39}{5}$

따라서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=25+\frac{39}{5}-5^2=\frac{39}{5}$

이므로 $10\times\mathrm{V}(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$

40. 주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=4)=a^4$

$a^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$X=16$인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=16)=d^4$

$16d^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le d\le 1$이므로 $d=\frac{1}{6}$

$a+b+c+d=1$이므로

$b+c=\frac{1}{2}$ …… ㉠

확인한 4개의 수의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$X=4\overline{Y}$이다.

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4\overline{Y})=4\mathrm{E}(\overline{Y})=4\mathrm{E}(Y)$

$=4\left(\frac{1}{3}+2b+3c+\frac{4}{6}\right)=4(1+2b+3c)$

$\mathrm{E}(X)=9$에서 $4(1+2b+3c)=9$이므로

$2b+3c=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=\frac{1}{4},\ c=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(4\overline{Y})=16\mathrm{V}(\overline{Y})=4\mathrm{V}(Y)$

$=4[\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2]$

$=4\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{6}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}$

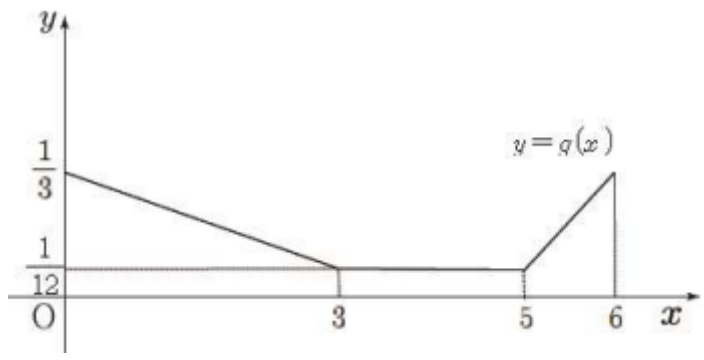
$=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)=\frac{19}{4}$

따라서 $p=4,\ q=19$이므로 $p+q=23$

41. $\int_0^6 f(x)dx=1,\ \int_0^6 g(x)dx=1$이므로 $f(x)+g(x)=k$에서

$\int_0^6 k\,dx=2$ 따라서 $k=\frac{1}{3}$

$g(x)=k-f(x)$이므로 다음 그림과 같다.



그러므로 $\mathrm{P}(2\le Y\le 5)=\int_2^5 g(x)dx=\frac{7}{24}$

$\therefore\ p+q=31$

42.

$\mathrm{P}(Y\le m+4)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\le\frac{4-\mathrm{m}}{\sigma}\right)=0.3085$

$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\le-\frac{1}{2}\right)=0.3085$

$\frac{4-m}{\sigma}=-\frac{1}{2}$ … ㉠

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\mathrm{P}(X \le 8)+\mathrm{P}(Y \le 8)=1$에서

$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \le \dfrac{8-\mathrm{m}}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \le \dfrac{8-2\mathrm{m}}{\sigma}\right)=1$

$\dfrac{8-m}{2}=-\dfrac{8-2m}{\sigma}$

㉠에서 $-\dfrac{8-2m}{\sigma}=1$이므로 $\dfrac{8-m}{2}=1$이고

$m=6,\ \sigma=4$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le \sigma)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \le \dfrac{4-6}{2}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -1)=0.1587$

43.

$1 \le a \le 6$이면 $1 \le 7-a \le 6$

$a,\ b,\ c$가 각각 6 이하의 자연수이므로

$7-a,\ 7-b,\ 7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.

$3 \le k \le 18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$를

만족시키는 6 이하의 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의

개수는 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$ 즉,

$a+b+c=3\times7-k$를 만족시키는 6 이하의 자연수 $a,\ b,\ c$의

모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

그러므로 $3 \le k \le 18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$

일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률

$\mathrm{P}(X=3\times\boxed{7}-k)$는 서로 같다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=18)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=17)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=16)$

$\vdots$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=10)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=11)$

그러므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(\mathrm{X})$는

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
$$=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)$$
$$+\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)$$
$$=(3+18)\times\mathrm{P}(X=3)+(4+17)\times\mathrm{P}(X=4)$$
$$+\cdots+(10+11)\times\mathrm{P}(X=10)$$
$$=\boxed{21}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)$$

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$이고,

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=11}^{18}\mathrm{P}(X=k)$이므로

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{\dfrac{1}{2}}$이다.

$\mathrm{E}(X)=\boxed{21}\times\boxed{\dfrac{1}{2}}$

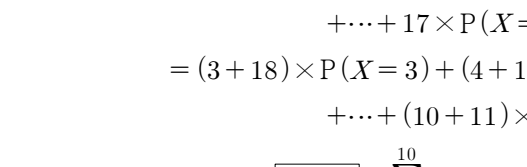
$p=7,\ q=21,\ r=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{p+q}{r}=2\times(7+21)=56$

44.

표준편차가 같은 정규분포곡선의 모양은 항상 일정하다. 확률변수 $X,\ Y$는 표준편차가 같은 정규분포를 따르고, 조건 (가)에 의하여 $m_1<24<28<m_2,\ f(24)=g(28)$인

확률밀도함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하자.

$\mathrm{P}(m_1 \le X \le 24)=\mathrm{P}(28 \le Y \le m_2)=0.4772$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{24-m_1}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{28-m_2}{\sigma} \le Z \le 0\right)=0.4772$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)=0.4772$

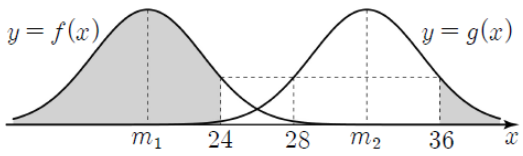
이므로

$\dfrac{24-m_1}{\sigma}=2,\ \dfrac{28-m_2}{\sigma}=-2$

$24-m_1=2\sigma,\ m_2-28=2\sigma$ … ㉠

조건 (나)에 의하여

$\mathrm{P}(Y \ge 36)=1-\mathrm{P}(X \le 24)=1-\mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 2)=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \ge 2)$



$\dfrac{36-m_2}{\sigma}=2,\ 36-m_2=2\sigma$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m_2-28=36-m_2$

$m_2=32$이므로 $\sigma=2,\ m_1=20$

따라서 $\mathrm{P}(18 \le X \le 21)=\mathrm{P}(-1 \le \mathrm{Z} \le 0.5)$

$=0.3413+0.1915=0.5328$

45.

$a-b$의 값이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은

$-3,\ -2.\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=(-3)\times\frac{1}{16}+(-2)\times\frac{2}{16}+(-1)\times\frac{3}{16}$$
$$+0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{2}{16}+3\times\frac{1}{16}=0$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=(-3)^2\times\frac{1}{16}+(-2)^2\times\frac{2}{16}+(-1)^2\times\frac{3}{16}$$
$$+0^2\times\frac{4}{16}+1^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{2}{16}+3^2\times\frac{1}{16}$$

$=\dfrac{5}{2}$

$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2=\dfrac{5}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(\mathrm{Y})=\mathrm{V}(2\mathrm{X}+1)=4\times\mathrm{V}(\mathrm{X})=10$

46.

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge 3.4)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{3.4-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{3.4-m}{\sigma}=0$이므로 $m=3.4$이다.

$\mathrm{P}(X \le 3.9)+\mathrm{P}(Z \le -1)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{3.9-3.4}{\sigma}\right)=1-0.1587$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{0.5}{\sigma}\right)=0.8413=0.5+0.3413$이다.

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.3413$이므로 $\dfrac{0.5}{\sigma}=1.0$이고 따라서 $\sigma=0.5$이다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3.55)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{3.55-3.4}{\frac{0.5}{\sqrt{25}}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 1.5)=0.5-0.4332$

$=0.0668$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

47.
두 이산확률변수 X와 Y의 관계는
$Y = 10X + 1$
가 성립하므로
$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(10X+1)$
$= 10\mathrm{E}(X) + 1$
$= 21$
이다. 또한
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$
$= 5 - 2^2 = 1$
이므로
$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(10\mathrm{X}+1)$
$= 10^2\,\mathrm{V}(X)$
$= 100$
따라서 $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{V}(Y) = 21 + 100 = 121$

48.
$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 1 + 6^2 = 37$

49.
주사위를 15번 던져 2이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$를 따르므로 $\mathrm{E(Y)} = 5$이다.
2이하의 눈이 Y번 나왔을 때 P의 좌표는
$(3Y,\ 15 - Y)$
P와 $3x + 4y = 0$의 거리는
$X = \frac{9Y + 60 - 4Y}{5} = Y + 12$이다.
따라서 $\mathrm{E(X)} = 17$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 10 수열의 극한

해 설

1. ④
[출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{2\times3}{1}=6$$

2. [정답] ②
[출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

3. 정답 ⑤
[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$$

$$=\frac{5}{2}$$

4. [정답] ③
[해설]

$$\lim_{n\to\infty}2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\{(n^2+4)-(n^2+1)\}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}=3$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

5. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=2$$

6. 정답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{x}}=\frac{3}{5}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2\times0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

8.
주어진 식의 분자와 분모에
$\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$
을 각각 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

9.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}+\frac{5}{n^4}}+1}=\frac{5}{2}$$

10.
$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

11.

$a_n=ar^{n-1}$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}+1}{3^n+\frac{1}{2}\times4^n}=3$

$r<4$ 일 때, 극한값은 0 이고, $r>4$ 일 때, 극한값은 ∞ 로 없으므로
$r=4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}+1}{3^n+\frac{1}{2}\times4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times4^{n-1}+1}{3^n+\frac{1}{2}\times4^n}=\frac{a}{2}=3$$

$\therefore\ a_n=6\times4^{n-1},\ a_2=24$

12.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=5$$

13.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0+3}{1+0}=3$$

14.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1+1}{1} = 2$$

15.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6\times 3^n+5}{3^n+2^{n+1}} = 6$$

16. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n+3}{n^2}}{\frac{n^2-2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n}{n^2-2} = 5$$

17.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+12n}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12n}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\sqrt{9+\frac{12}{n}}+3}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)=2$

18.

$$\frac{3n^2-n}{n^2+1} < na_n < \frac{3n^2+2n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1} \le \lim_{n\to\infty} na_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1}=3, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1}=3$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} na_n = 3$

19.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1-4n^2+4n-1}{2n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{2n+5} = 4$$

20.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to?\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}}+1}{1+\frac{1}{2n}} = 2$$

21. ②

[출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$3^n-2^n < a_n < 3^n+2^n$에서 $\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n} < \frac{a_n}{3^{n+1}+2^n} < \frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}=\frac{1}{3}$

22. ③

[출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_n = a_1+(n-1)d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5} = 4 = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(2n-1)d-6n}{a_1+(n-1)d+5} \lim_{n\to\infty}\frac{(2d-6)n+a_1-d}{dn+a_1-d+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2d-6+\frac{a_1-d}{n}}{d+\frac{a_1-d+5}{n}} = \frac{2d-6}{d}$$

$\frac{2d-6}{d}=4$에서 $d=-3$

$a_2-a_1=d$이므로 $a_2-a_1=-3$

23. ⑤

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$에서 $c_n=(n^2+1)a_n$,

$d_n=(4n^2+1)(a_n+b_n)$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$이고

$$a_n=\frac{c_n}{n^2+1}, \quad b_n=\frac{d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n) = \lim_{n\to\infty}(2n^2+1)\left(\frac{2d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}\times d_n - \frac{2n^2+1}{n^2+1}\times c_n\right\} = 1\times 1-2\times 3=-5$$

24. ①

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_n=b_1+(n-1)d$

$\frac{a_1}{b_1}=3$에서 $\frac{3}{b_1}=3$, $b_1=1$

$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=2$에서 $\frac{a_2}{b_2}=-1$

$-\frac{4}{1+d}=-1$에서 $d=3$

$b_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$n\ge 2$일 때, $\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=-\frac{6}{n(n+1)}$이므로

$a_n=-\frac{6(3n-2)}{n^2+n}$ $((n\ge 2)$

$a_nb_n=-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}$ $((n\ge 2)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\right\}=-54$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-54$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

25. [정답] ④

[출제의도] 급수의 성질 이해하기

$b_n = a_n - \dfrac{2^{n+1}}{2^n+1}$이라 하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(b_n + \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n+1}$$

$$= 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$= 0 + \frac{2}{1+0} = 2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n \times a_n + 5\times 2^{n+1}}{2^n+3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n + 5\times 2}{1+\frac{3}{2^n}}$

$$= \frac{2+10}{1+0} = 12$$

26. [정답] ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 C와 y축과의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하면

$\angle ORP = \dfrac{\pi}{2} - \angle POR = \theta$

직각삼각형 OPR에서 $\overline{OP} = 2\sin\theta$

$\angle ORQ$, $\angle OPQ$는 호 OQ에 대한 원주각이므로

$\angle ORQ = \angle OPQ = \dfrac{\theta}{3}$

직각삼각형 OQR에서 $\overline{OQ} = 2\sin\dfrac{\theta}{3}$

$\angle QOP$, $\angle QRP$는 호 PQ에 대한 원주각이므로

$\angle QOP = \angle QRP = \theta - \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{2}{3}\theta$

$f(\theta) = \dfrac{1}{2}\times \overline{OP}\times \overline{OQ}\times \sin(\angle QOP)$

$$= \frac{1}{2}\times 2\sin\theta \times 2\sin\frac{\theta}{3}\times \sin\frac{2}{3}\theta$$

$$= 2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta^3}$$

$$= 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\right)$$

$$= 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1 = \frac{4}{9}$$

27. **정답** ⑤

$a_n = dn - d + 1$, $b_n = r^{n-1}$

$a_2 b_2 = (1+d)r = 1$ … ㉠

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

$\dfrac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) + \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{1-r} = 2$,

$1 - r + d = 2d(1-r)$, $(1-2r)d = 1-r$, $d = \dfrac{1-r}{1-2r}$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(1 + \dfrac{1-r}{1-2r}\right)r = 1$, $\dfrac{(2-3r)r}{1-2r} = 1$, $-3r^2 + 2r = 1 - 2r$, $3r^2 - 4r + 1 = 0$

$(3r-1)(r-1) = 0$, 급수가 수렴하므로 $r = \dfrac{1}{3}$, $d = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

28. [출제의도] 등비급수를 이해하여 급수의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$은 첫째항이 $\dfrac{a}{3}$, 공비가 $\dfrac{r}{3}$인 등비급수이고 수렴하므로 $-1 < \dfrac{r}{3} < 1$, $-3 < r < 3$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n}}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{ar}$, 공비가 $\dfrac{1}{r^2}$인 등비급수이고 수렴하므로 $-1 < \dfrac{1}{r^2} < 1$, $r^2 > 1$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

㉠, ㉡에서 $r = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = \frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}} = a = 4$$

$a_n = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$이므로

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

29.

$b_n = 3a_n - 5n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 2$, $a_n = \dfrac{b_n + 5n}{3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n\times\frac{1}{n}+5\right)}{12}$$

$$= \frac{(2+0)(2\times 0+5)}{12} = \frac{5}{6}$$

30.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an}\right) = \dfrac{5}{4}$에서 $\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{5}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2 - 17a + 4 = 0$, $(4a-1)(a-4) = 0$,

$a = \dfrac{1}{4}$ 또는 $a = 4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 $\dfrac{1}{4} + 4 = \dfrac{17}{4}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

31.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

수열 $\{b_n\}$은 $n\geq 2$일 때,

$$\frac{1}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_k}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

에서 $b_n=\frac{1}{2n-1}$이고 $b_1=1$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\frac{1}{2n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

32.

$a_n^2<4na_n+n-4n^2$에서 $a_n^2-4na_n+4n^2<n$

$(a_n-2n)^2<n,\ 2n-\sqrt{n}<a_n<2n+\sqrt{n}$

$2-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2+3}{2+0}=\frac{5}{2}$

33.

$|x|>2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}=\frac{\frac{3}{2}x-0}{1+0}=\frac{3}{2}x$$

$x=2$일 때, $f(2)=\frac{3-1}{1+1}=1$

$x=-2$일 때, $f(-2)=\frac{-3-1}{1+1}=-2$

$|x|<2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (|x|>2)\\ 1 & (x=2)\\ -2 & (x=-2)\\ -1 & (|x|<2)\end{cases}$$

$|k|>2$이면 $f(k)=\frac{3}{2}k$이므로 $|k|>2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=2$이면 $f(2)=1$이므로 $k=2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=-2$이면 $f(-2)=-2$이므로 $k=-2$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

$|k|<2$이면 $f(k)=-1$이므로 $k=-1$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $-2+(-1)=-3$

34.

직선 $y=x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 선분 P_nQ_n을 대각선으로 하는 정사각형의 각 변은 x축 또는 y축과 평행하다.

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$ … ㉠

α_n, β_n은 이차방정식

$x^2-2nx-2n=x+1$

$x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_n+\beta_n=2n+1$, $\alpha_n\beta_n=-2n-1$

㉠에서

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$

$=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$

$=(2n+1)^2-4(-2n-1)$

$=4n^2+12n+5$

$=(2n+1)(2n+5)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+5)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)$$

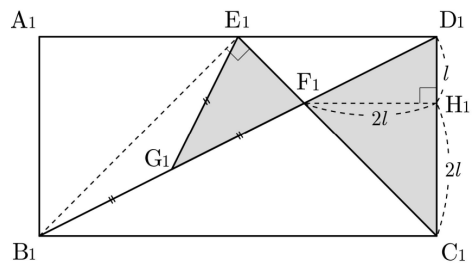
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

35.



점 F_1에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.

$\overline{D_1H_1}=l(l>0)$이라 하면 $\overline{F_1H_1}=\overline{C_1H_1}=2l$ $C_1D_1=3l=1$

$l=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{D_1H_1}=\frac{1}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{3}$

삼각형 $C_1D_1F_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\angle B_1E_1F_1=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 점 G_1은 삼각형 $B_1F_1E_1$의 외접원의 중심이다.

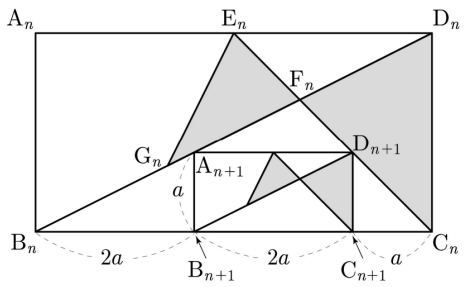
$\overline{B_1G_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는 삼각형 $B_1F_1E_1$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\overline{B_1E_1}=\sqrt{2}$, $\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\right)=\frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{6}$

$S_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$



두 삼각형 $C_nD_nF_n$, $G_nF_nE_n$으로 만들어진 ⋈ 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a(a>0)$이라 하면

$\overline{B_nB_{n+1}}=2a$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2a$, $\overline{C_{n+1}C_n}=a$ $\overline{B_nC_n}=5a$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{2}{5}\overline{B_nC_n}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{2}{5}\right)^2$이다.

$T_{n+1}=\frac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{42}$

36.

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$이고 $a_n=2b_n-2$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2b_n-2)n+1}{2n+2b_n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2b_n-2}{n}}=\frac{2\times6-2}{2}$

$=5$

37.

그림 R_1에서 $\overline{E_1C_1}=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$이고, 삼각형 $E_1C_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로 $S_1=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

삼각형 $E_1B_1C_1$에서 $\overline{E_1B_1}=\overline{E_1C_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\overline{B_1C_1}=1$이므로 $\angle B_1E_1C_1=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=\frac{\frac{17}{4}+\frac{17}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{15}{17}$ …… ㉠

삼각형 $A_2E_1B_2$에서 $\angle A_2E_1D_1=\angle B_2E_1C_1=\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle A_2E_1B_2=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{8}{17}$ ($\because$ ㉠)

또한 $\overline{A_2E_1}=\overline{B_2E_1}=\sqrt{\frac{17}{2}}$이므로 코사인법칙에 의해

$\overline{A_2B_2}^2=\frac{17}{2}+\frac{17}{2}-2\times\sqrt{\frac{17}{2}}\times\sqrt{\frac{17}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=17-17\sin\theta=9$

$\therefore\overline{A_2B_2}=3$

따라서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $4:3$이므로 넓이의 비는 $16:9$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=\frac{17}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비급수이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$

38.

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자. $\angle A_nB_nD_n=\theta$라 하면

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta=\frac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형 $A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형 $D_1F_1H_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times1^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}$

그러므로

$a_1=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{1}{20}$

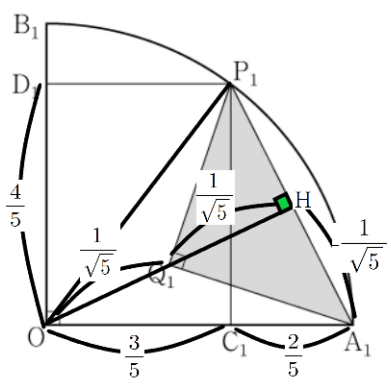
$\frac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{B_1D_1}-(\overline{B_1B_2}+\overline{D_1D_2})}{\overline{B_1D_1}}=\frac{3}{5}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

39.



선분 A_1P_1에 내린 수선은 선분 A_1P_1을 수직이등분하고, 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 이등변삼각형이므로 수선이 점 Q_1을 지난다.

그 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{OP_1}$의 길이는 반지름이므로 길이는 1이고 직각삼각형 OP_1C_1의 밑변과 높이의 길이의 비가 $3:4$이므로

$\overline{OC_1}=\frac{3}{5}$, $\overline{C_1P_1}=\frac{4}{5}$, $\overline{C_1A_1}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

삼각형 AC_1P_1에서 피타고라스 정리에 따라

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\overline{A_1P_1}^2 = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} = \frac{4}{5}$, $\overline{A_1P_1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\overline{A_1H} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

직각삼각형 OA_1H에서 $\overline{OH} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

직각 이등변삼각형 AHQ_1에서

$\overline{Q_1H} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\overline{OQ_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

닮음비가 , 넓이비가 공비가 된다. $r = \frac{1}{5}$

삼각형 $P_1Q_1A_1$의 넓이는 $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

40.

수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면

$-1 < \frac{x^2-4x}{5} \le 1$에서

$\begin{cases} x^2-4x+5 > 0 \\ x^2-4x-5 \le 0 \end{cases}$

$x^2-4x+5 > 0$에서 $(x-2)^2+1 > 0$이므로 모든 정수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

$x^2-4x-5 \le 0$에서

$(x+1)(x-5) \le 0$, $-1 \le x \le 5$

따라서 모든 정수 x의 개수는 7이다.

41.

$a_{n+1} = a_1a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 a_1인 등비수열이다.

그러므로 $a_n = a_1^{\,n} (a_1 > 0)$

(ⅰ) $0 < a_1 < 1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = -5 \neq 12$$

(ⅱ) $a_1 = 1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = -\frac{2}{3} \neq 12$$

(ⅲ) $a_1 > 1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3{a_1}^3 - \frac{5}{a_n}}{2+\frac{1}{a_n}} = \frac{3}{2}{a_1}^3$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\frac{3}{2}{a_1}^3 = 12$, ${a_1}^3 = 8$

따라서 $a_1 = 2$

42.

$2n^2-3 < a_n < 2n^2+4$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3) < S_n < \sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)$$

이때

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3) = 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n$$

$$= \frac{n(2n^2+3n-8)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4) = 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+13)}{3}$$

$$\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{2}{3}$$

43.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$ 이므로

$n = 1$ 일 때, $\frac{a_1}{0!} = \frac{3}{3!}$ 에서 $a_1 = \frac{1}{2}$

$n \ge 2$ 일 때,

$$\frac{a_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(k-1)!}$$

$$= \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!}$$

$$a_n = \frac{3(n-1)!}{(n+2)!} - \frac{3(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+1)n} - \frac{3}{(n+1)n}$$

$$= \frac{-3n-3}{(n+2)(n+1)n}$$

$$= \frac{-3}{n(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + n^2a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{3n}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

44.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3na_n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$

$$= \frac{2+3\times2}{1+0} = 8$$

45.

$S_1 = \frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

$\angle O_1A_2O_2 = \frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\overline{O_2A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

46.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

(i) $1 \le r < 3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n = 0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7\times r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\times r\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}{1+7\times\left(\frac{r}{3}\right)^n} = 1$$

이므로 r는 1, 2

(ii) $r=3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^n+7\times 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n}{8\times 3^n} = \frac{1}{2}$이므로

주어진 식은 성립하지 않는다.

(iii) $r>3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7\times r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n + r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n + 7} = \frac{r}{7} = 1$$

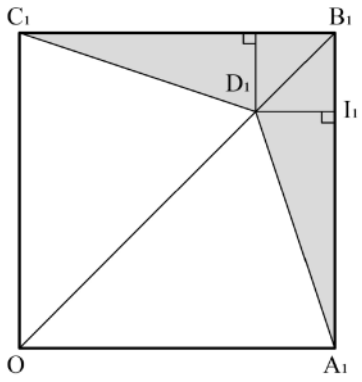
이므로 r는 7

(i), (ii), (iii)에 의하여

주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 r는 1, 2, 7

따라서 모든 r의 값의 합은 $1+2+7=10$

47.



$\overline{OB_1} = 4\sqrt{2}$이므로 $\overline{D_1B_1} = \sqrt{2}$

점 D_1에서 직선 A_1B_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면 $\overline{D_1I_1}=1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$의 넓이는 모두 2이므로 $S_1=4$

네 선분 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n으로 둘러싸인 ㄱ 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

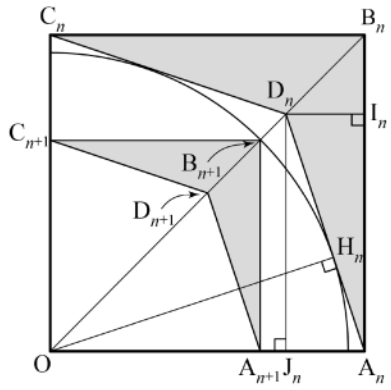


그림 R_n에서 중심이 O이고

두 직선 A_nB_n, C_nD_n에 동시에 접하는 원과 직선 A_nD_n이 접하는 점을 H_n이라 하고, 점 D_n에서 두 직선 A_nB_n, OA_n에 내린 수선의 발을 각각 I_n, J_n이라 하자.

$\overline{A_nI_n} = \overline{D_nJ_n} = \frac{3}{4}\overline{OA_n}$, $\overline{D_nI_n} = \frac{1}{4}\overline{OA_n}$이므로

$\overline{A_nD_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}$

삼각형 OA_nD_n에서

$\frac{1}{2}\times\overline{A_nD_n}\times\overline{OH_n} = \frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\overline{D_nJ_n}$

$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}\times\overline{OH_n} = \frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\frac{3}{4}\overline{OA_n}$

$\overline{OH_n} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\overline{OA_n}$

$\overline{OA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OB_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OH_n} = \frac{3\sqrt{5}}{10}\overline{OA_n}$

두 정사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는

$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : \frac{3\sqrt{5}}{10}$

$T_n : T_{n+1} = 1 : \frac{9}{20}$

$T_{n+1} = \frac{9}{20}T_n$

그러므로 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = 4$이고

공비가 $\frac{9}{20}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}T_n = \frac{4}{1-\frac{9}{20}} = \frac{80}{11}$

48.

(공비 구하기)

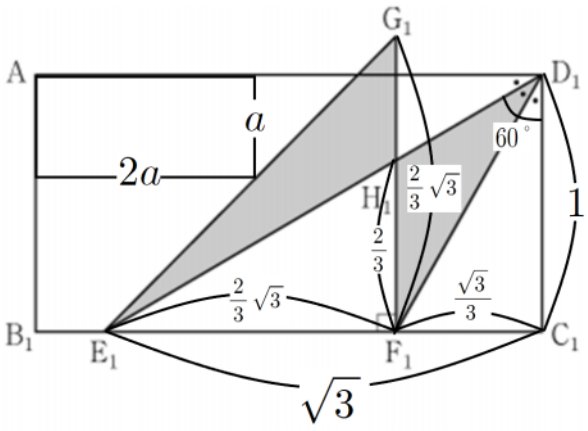
(1. 삼각형 $E_1D_1C_1$에서 $\angle E_1D_1C_1 = 60^\circ$이고, $\overline{C_1D_1}=1$ 이므로

$\overline{E_1D_1}=2$, $\overline{E_1C_1}=\sqrt{3}$

(2. 선분 D_1F_1은 삼각형 $D_1E_1C_1$에서 각의 이등분선이므로

$\overline{E_1F_1} : \overline{C_1F_1} = 2:1$을 만족하고,

그러므로 $\overline{F_1H_1} : \overline{C_1D_1} = 2:3$을 만족한다.



(1., (2.의 결과에 따라 각 지점들의 길이는 위의 그림과 같다.

(3. 주어진 그림을 B_1을 원점 위치에 놓고 좌표평면위에 올리면,

직선 E_1G_1은 $(2-\sqrt{3}, 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선이다.

점 C_2가 $y = x-2+\sqrt{3}$위에 점이므로 $C_2(2a, 1-a)$이라 할 때,

$1-a = 2a-2+\sqrt{3}$, $a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

그림에서의 두 직사각형의 닮음비 $\frac{a}{1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$이고,

넓이의 비가 공비가 되므로 공비 $r = \frac{12-6\sqrt{3}}{9} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

(첫 항 구하기)

삼각형 $E_1H_1G_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{G_1H_1}\times\overline{E_1F_1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(\sqrt{3}-1)\times\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{9}(3-\sqrt{3})$

삼각형 $D_1F_1H_1$ 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{F_1H_1}\times\overline{F_1C_1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

첫 항은 $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}$

(급수의 합)

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}}$$

$$= \frac{6-\sqrt{3}}{3(2\sqrt{3}-1)} = \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(6-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

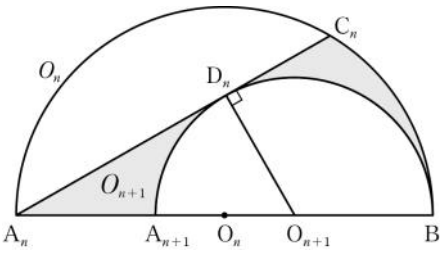
꿈을 현실로! 희망 부산교육

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+\lim_{n\to\infty}4=0+4=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3-0}=3$

50. 반원 O_n의 중심을 O_n, 반지름을 r_n이라 하자.



삼각형 $O_{n+1}A_nD_n$은 $\angle O_{n+1}A_nD_n=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로

$\sin(\angle O_{n+1}A_nD_n)=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{D_nO_{n+1}}}{\overline{A_nO_{n+1}}}=\frac{1}{2}$, $\frac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\frac{1}{2}$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}r_n$ …… ㉠

$r_1=1$이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

$\angle A_1O_1C_1=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{A_1O_1}=\overline{C_1O_1}=1$이므로

삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle BO_1C_1=\frac{\pi}{3}$, $\overline{C_1O_1}=\overline{BO_1}=1$이므로

부채꼴 O_1BC_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

반원 O_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2\pi}{9}$

$S_1=$(삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이)+(부채꼴 O_1BC_1의 넓이)
$-$(반원 O_2의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{9}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$이고 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

51. $a_n=ar^{n-1}$이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}ar^{2n-1}=\frac{a}{1-r^2}-\frac{ar}{1-r^2}$

$=\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$,

얻어진 식을 간단히 하면

$a(1-r)=3(1-r)(1+r)$, $r\neq1$이므로 $a=3+3r$ … ㉠

$(a_n)^2=a^2r^{2n-2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=\frac{a^2}{1-r^2}=6$

간단히 하면, $a^2=6-6r^2$… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(3+3r)^2=6-6r^2$, $15r^2+18r+3=0$

$5r^2+6r+1=(5r+1)(r+1)=0$, $r=-1$일 때, 조건으로 주어진 두 급수의 합이 수렴하지 않으므로 $r=-\frac{1}{5}$, $a=3-\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{12}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{6}{5}}=2$

52.

$\lim_{n\to\infty}na_n(b_n+2n)$

$=\lim_{n\to\infty}(na_nb_n+2n^2a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{(n^2a_n)\times\left(\frac{b_n}{n}\right)+2n^2a_n\right\}$

$=\left(\lim_{n\to\infty}n^2a_n\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\right)+2\lim_{n\to\infty}n^2a_n$

$=3\times5+2\times3=21$

53.

$a_n+2b_n-7=c_n$이라 하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n+7}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}a_n+7\right)=2$

54.

$\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\frac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\frac{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}$에서

$n\to\infty$일 때, $\left(\frac{8}{9}\right)^n\to0$이므로 주어진 수열이

수렴하려면 등비수열 $\left\{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 한다.

$-1<\frac{4x-1}{9}\leq1$에서 $-2<x\leq\frac{5}{2}$이므로

수열 $\left\{\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하기 위한

모든 정수 x의 개수는 4이다.

55.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2{a_n}^2+3n^2}{{a_n}^2+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{a_n}{n}\right)+2\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+1}=3$

56.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

57.

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고, $3^n > 2^n$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n} = 6$에서 $a_n = \frac{1}{6}\cdot 3^n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 6\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

58. ②

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n의 좌표는 $(0,\ n)$이다.

$\log_a(x-1)=n$에서 $x=a^n+1$이므로 점 B_n의 좌표는 $(a^n+1,\ n)$이다.

$\overline{B_nB_{n+1}} = \sqrt{\{(a^{n+1}+1)-(a^n+1)\}^2+1} = \sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$

사각형 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$은 사다리꼴이므로

$$S_n = \frac{1}{2}\times 1\times\{(a^n+1)+(a^{n+1}+1)\} = \frac{(a+1)a^n+2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}$$

(ⅰ) $0<a<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}a^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n} = \frac{2\times 1}{2} = 1$

$\frac{3}{2a+2}=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n} = \frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{(a+1)+\frac{2}{a^n}} = \frac{2|a-1|}{a+1}$

$$= \frac{2(a-1)}{a+1}$$

$\frac{2(a-1)}{a+1} = \frac{3}{2a+2}$에서 $a=\frac{7}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a의 값의 합은 $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

59. 50

[출제의도] 이차부등식의 해를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$의 해는

$2n-\sqrt{4n^2+n} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$

$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$에서 $-1 < 2n-\sqrt{4n^2+n} < 0$

$4n < 2n+\sqrt{4n^2+n} < 4n+1$

부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n$이므로 그 개수는 $4n+1$이다.

$a_n=4n+1$에서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{na_n}=\infty$이다.

$p\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=\infty$이므로 $p>0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn) = \lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=q$이려면 $4-p^2=0$에서 $p>0$이므로 $p=2$

$q = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

따라서 $100pq = 100\times 2\times\frac{1}{4} = 50$

60. 25

[출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수의 그래프에 대한 문제를 해결한다.

$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$에서

$|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=-x$

$|x|=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=0$

$|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0$이므로 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x-x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = x$

그러므로 $f(x)=\begin{cases} -x & (|x|<1)\\ 0 & (|x|=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $2k-2\le|x|<2k-1$일 때 $\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$이므로

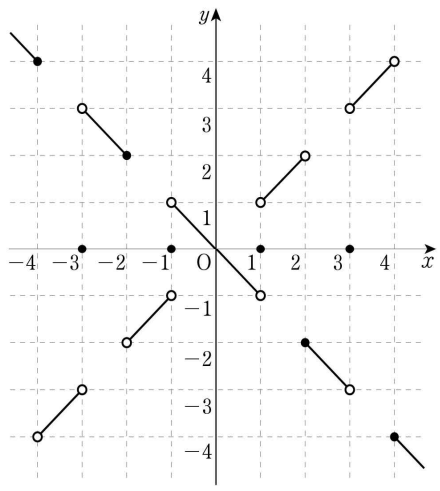
$g(x) = (2k-1)\times\left(-\frac{x}{2k-1}\right) = -x$

(ⅱ) $|x|=2k-1$일 때 $\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$이므로 $g(x)=(2k-1)\times 0=0$

(ⅲ) $2k-1<|x|<2k$일 때 $\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$이므로

$g(x) = (2k-1)\times\left(\frac{x}{2k-1}\right) = x$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

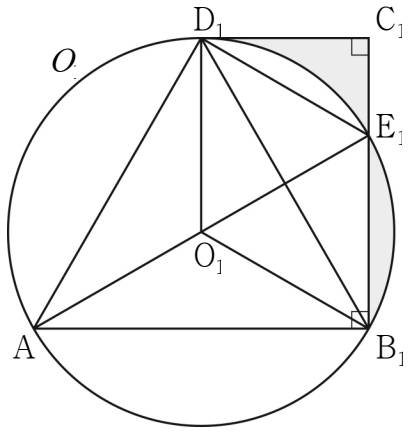


$t=2m-1$ (m은 정수)일 때 직선 $y=t$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는다.

따라서 $0<t<10$인 모든 t의 값의 합은 $1+3+5+7+9=25$

61. [정답] ④

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1}=1$, $\angle D_1C_1B_1=\frac{\pi}{2}$이므로

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\overline{B_1D_1}=2$, $\angle D_1B_1A=\frac{\pi}{3}$

삼각형 AB_1D_1은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

삼각형 AB_1D_1의 외접원을 O_1이라 하면

$\angle E_1B_1A=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_1은 원 O_1의

지름이고 원 O_1의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

$\angle B_1AE_1=\frac{\pi}{6}$에서 $\angle B_1O_1E_1=\frac{\pi}{3}$이고

$\overline{O_1B_1}=\overline{O_1E_1}$이므로

삼각형 $O_1B_1E_1$은 정삼각형이다.

$\overline{C_1E_1}=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1E_1}=\overline{B_1C_1}-\overline{O_1B_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

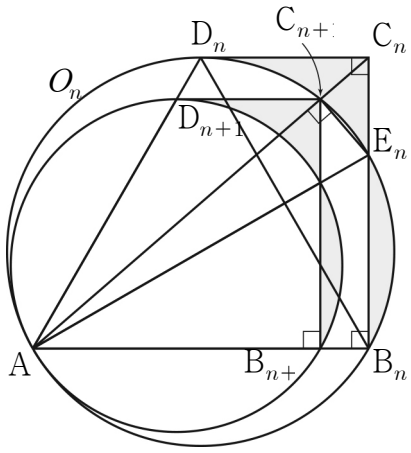
$\angle E_1O_1D_1=\frac{\pi}{3}$이므로

두 부채꼴 $O_1E_1D_1$, $O_1B_1E_1$은 서로 합동이다.

S_1은 삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이와 같으므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{C_1E_1}\times\overline{C_1D_1}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



$\overline{C_nD_n}=a_n$이라 하면 $\overline{B_nC_n}=\sqrt{3}a_n$

직각삼각형 $B_nC_nD_n$에서 $\overline{B_nD_n}=2a_n$

$\angle D_nB_nA=\frac{\pi}{3}$, $\angle B_nAD_n=\angle B_1AD_1=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 AB_nD_n은 한 변의 길이가 $2a_n$인 정삼각형이다.

그러므로 $\overline{AB_n}=2a_n$

$\overline{C_{n+1}D_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{3}a_{n+1}$, $\overline{AB_{n+1}}=2a_{n+1}$

$\frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}}=\frac{\overline{B_{n+1}C_{n+1}}}{\overline{AB_{n+1}}}$이므로

점 C_{n+1}은 직선 AC_n 위의 점이다.

그러므로 사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과

사다리꼴 $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이다.

직각삼각형 AB_nC_n에서

$\overline{AC_n}=\sqrt{\overline{AB_n}^2+\overline{B_nC_n}^2}=\sqrt{7}a_n$

직각삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$에서 $\overline{AC_{n+1}}=\sqrt{7}a_{n+1}$이므로

$\overline{C_nC_{n+1}}=\overline{AC_n}-\overline{AC_{n+1}}=\sqrt{7}(a_n-a_{n+1})$

정삼각형 AB_nD_n의 외접원을 O_n이라 하면

$\angle E_nB_nA=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_n은 원 O_n의 지름이다.

$\overline{B_nE_n}=\overline{AB_n}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_n$에서

$\overline{C_nE_n}=\overline{B_nC_n}-\overline{B_nE_n}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_n$

선분 AE_n을 지름으로 하는 반원에 대한

원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle AC_{n+1}E_n=\frac{\pi}{2}$

$\angle E_nC_{n+1}C_n=\pi-\angle AC_{n+1}E_n=\frac{\pi}{2}$

두 삼각형 C_nAB_n, $C_nE_nC_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{AC_n}:\overline{E_nC_n}=\overline{B_nC_n}:\overline{C_{n+1}C_n}$

$\sqrt{7}a_n:\frac{\sqrt{3}}{3}a_n=\sqrt{3}a_n:\sqrt{7}(a_n-a_{n+1})$

$a_n^{\,2}=7a_n(a_n-a_{n+1})$

$7a_{n+1}=6a_n$

$a_{n+1}=\frac{6}{7}a_n$이므로 사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과

사다리꼴 $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 7:6이고

넓이의 비는 49:36이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\frac{36}{49}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{49}{78}\sqrt{3}$

62. 정답 24

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=a\cdot r^{n-1}$ $(-1<r<1)$

조건 (가)에서 홀수 번째 항의 급수가 수렴하고 그 합이 -3이므로

$a_{2n-1}<0$, $a<0$

이어야 한다.

이때 $b_3=-1$이고 급수의 합이 -3이므로

$b_1=-1$, $\sum_{n=3}^{\infty}b_{2n-1}=-1$

이어야 한다. 따라서

$\frac{ar^4}{1-r^2}=-1$ …… ㉠

조건 (나)에서 짝수 번째 항의 급수가 수렴하고 그 합이 8이므로

$a_{2n}>0$, $0<r^2<1$이어야 한다.

$\frac{ar}{1-r^2}=8$ …… ㉡

㉠÷㉡하면

$r^3=-\frac{1}{8}$, $r=-\frac{1}{2}$

㉡에 대입하면 $\frac{-\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{4}}=8$, $a=-12$

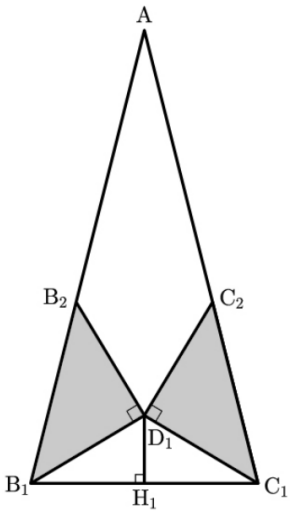
따라서 $a_n=(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=12+6+3+\cdots=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

63. [정답] ③

[해설]



점 D_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1,

$\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$라 하자.

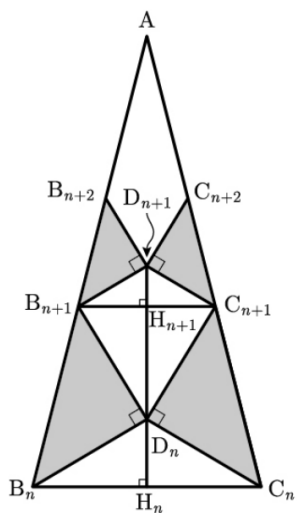
$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$이므로 $\tan\alpha=4$

$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{5}$

$\overline{B_1H_1}=1$, $\overline{D_1H_1}=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{5}$

$S_1=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2\right\}=\frac{34}{25}$



점 D_n에서 선분 B_nC_n에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1}에서 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$과 $B_{n+1}D_nH_{n+1}$은 서로 합동이므로

$\overline{B_{n+1}H_{n+1}}=\overline{D_nH_n}=\overline{B_nH_n}\times\tan\beta=\frac{3}{5}\overline{B_nH_n}$

두 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$, $C_nD_nC_{n+1}$로 만들어진



모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$, $D_{n+1}B_{n+1}H_{n+1}$은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{3}{5}$이므로

넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

$T_{n+1}=\frac{9}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{34}{25}$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{17}{8}$

64. 정답 18

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$이므로 $a>3$

(ⅰ) $b>a$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{n+1}}{b^n}=b=\frac{9}{3}=3$

$a>b=3$이므로 모순

(ⅱ) $a>b$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}=a=\frac{9}{a}$, $a^2=9$, $a=3$

a는 3보다 크므로 모순

(ⅲ) $a=b$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$, $a=b=9$

$\therefore\ a+b=18$

65. 정답 162

$a_n=ap^{n-1}$, $b_n=bq^{n-1}$이라 할 때,

$a_nb_n=ab\times(pq)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b}{1-q}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$은 $\frac{ab}{1-pq}=\left(\frac{a}{1-p}\right)\left(\frac{b}{1-q}\right)$

$ab\neq0$이므로 $1-pq=1-p-q+pq$, $2pq=p+q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$

(ⅰ) $0<p<1$일 때, $a_{2n}=ap^{2n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=\frac{ap}{1-p^2}$

$a_{3n}=ap^{3n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\frac{ap^2}{1-p^3}$

$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$은 $\frac{3ap}{1-p^2}=\frac{7ap^2}{1-p^3}$, $\frac{3}{1+p}=\frac{7p}{1+p+p^2}$

$3+3p+3p^2=7p+7p^2$, $4p^2+4p-3=0$, $(2p+3)(2p-1)=0$

$p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$, $2+\frac{1}{q}=2$이므로 성립하지 않는다.

(ⅱ) $-1<p<0$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=\frac{-ap}{1-p^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\frac{ap^2}{1+p^3}$

$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$은 $\frac{-3ap}{1-p^2}=\frac{7ap^2}{1+p^3}$, $-\frac{3}{1-p^2}=\frac{7p}{1+p^3}$

$-3-3p^3=7p-7p^3$, $4p^3-7p-3=0$

$(p+1)(4p^2-4p-3)=(p+1)(2p-3)(2p+1)$, $p=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$, $-2+\frac{1}{q}=2$에서 $q=\frac{1}{4}$

$b_n=b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=\frac{b\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+b\left(\frac{1}{4}\right)^{3n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$

$=\frac{4}{3}+\frac{1}{60}=\frac{81}{60}=S$, $\therefore\ 120S=162$

66.

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

규칙 (나)에서 $x_{2n}=x_{2n-1}+a$, $y_{2n}=y_{2n-1}$

규칙 (다)에서 $x_{2n+1}=x_{2n}$, $y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$x_{2n+2} = x_{2n+1} + a = x_{2n} + a$

$y_{2n+2} = y_{2n+1} = y_{2n} + (a+1)$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}$, $\{y_{2n}\}$은 공차가 각각 a, $a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$x_2 = x_1 + a = a$, $y_2 = y_1 = 0$이므로

$x_{2n} = a + (n-1)a = an$,

$y_{2n} = 0 + (n-1)(a+1) = (a+1)(n-1)$

그러므로

$\overline{A_1A_{2n}}^2 = {x_{2n}}^2 + {y_{2n}}^2$

$= a^2n^2 + (a+1)^2(n-1)^2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^2n^2 + (a+1)^2(n-1)^2}}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^2 + (a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n} = \frac{\sqrt{34}}{2}$에서 $\sqrt{2a^2+2a+1} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2 + 4a - 15 = 0$, $(2a+5)(2a-3) = 0$,

$a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

따라서 양수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

67.

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{OP_n} = 2n+2$이므로 $\sqrt{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2} = 2n+2$에서

$t = n+1$

직각삼각형 P_nOH_n에서 $\overline{OH_n} : \overline{P_nH_n} = 1 : \sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle P_nOH_n) = \sqrt{3}$즉 $\angle P_nOH_n = \frac{\pi}{3}$

$\angle R_nP_nH_n = 2 \times \angle OP_nH_n = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$f(n)+h(n) = \int_0^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 dx$

$= \left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2$ …… ㉠

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$g(n)+h(n) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{OH_n} \times \overline{P_nH_n}\right) - \frac{1}{2} \times \overline{P_nH_n}^2 \times \frac{\pi}{3}$

$= \sqrt{3}(n+1)^2 - \frac{\pi(n+1)^2}{2}$

$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(n) - g(n) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2}$

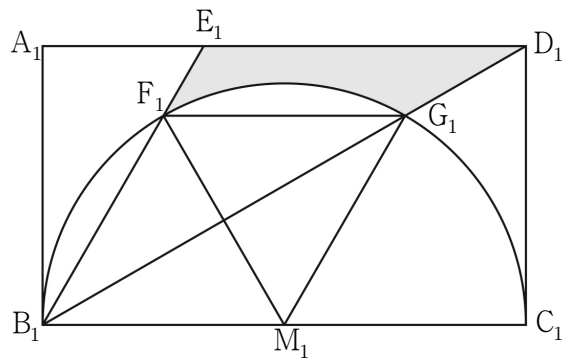
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

그러므로 $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $60k^2 = 60 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 80$

68.



선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle C_1B_1D_1) = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle C_1B_1G_1 = \frac{\pi}{6}$이고 $\angle C_1M_1G_1 = \frac{\pi}{3}$ … ㉠

점 E_1은 선분 A_1D_1을 1:2로 내분하는 점이므로

$\overline{A_1E_1} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\tan(\angle E_1B_1A_1) = \frac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle E_1B_1A_1 = \frac{\pi}{6}$

$\angle G_1B_1E_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C_1B_1G_1 - \angle E_1B_1A_1 = \frac{\pi}{6}$에서

$\angle G_1M_1F_1 = \frac{\pi}{3}$ … ㉡

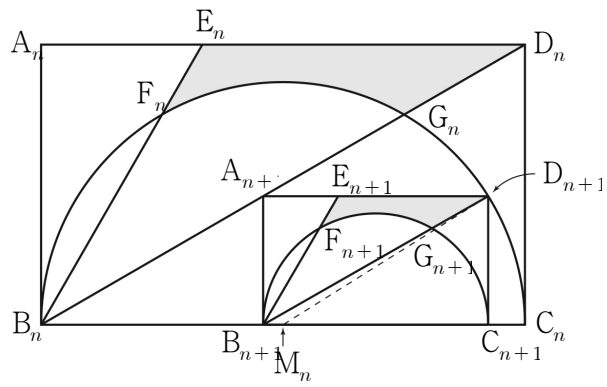
㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로 $\angle F_1M_1B_1 = \angle M_1F_1G_1$이 되어 두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.

삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고, 두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$S_1 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\right) - \left\{\frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3}\right\}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_nB_n} = a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n} : \overline{B_nC_n} = 1 : \sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n} = \sqrt{3}a_n$이고

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 1 : \sqrt{3}$ 에서

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{3}a_{n+1}$ 이다.

직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$ 에서

$\overline{B_nB_{n+1}} = \dfrac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\dfrac{\pi}{6}} = \sqrt{3}a_{n+1}$ 이므로

$\overline{B_nC_{n+1}} = \overline{B_nB_{n+1}} + \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$ 에서

$\overline{M_nC_{n+1}}^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \overline{M_nD_{n+1}}^2$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\overline{B_nC_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$ 이므로

$\left(\overline{B_nC_{n+1}} - \overline{B_nM_n}\right)^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \dfrac{3}{4}{a_n}^2$

$\left(2\sqrt{3}a_{n+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2 + {a_{n+1}}^2 = \dfrac{3}{4}{a_n}^2$

$13{a_{n+1}}^2 - 6a_na_{n+1} = 0$

$a_{n+1} = \dfrac{6}{13}a_n$ 이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 과

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 닮음비가 $13:6$ 이고

넓이의 비는 $169:36$ 이다.

따라서 S_n 은 첫째항이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$ 이고

공비가 $\dfrac{36}{169}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의

합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{2}}{1 - \dfrac{36}{169}} = \frac{169}{798}\left(8\sqrt{3} - 3\pi\right)$$

69.

직각삼각형 ABC 에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 4 + n^2$

$\overline{BC} = \sqrt{n^2+4}$

선분 AD 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : n$

즉 $a_n = \overline{CD} = \dfrac{n}{n+2} \times \overline{BC} = \dfrac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}(n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)}{n+2}$$

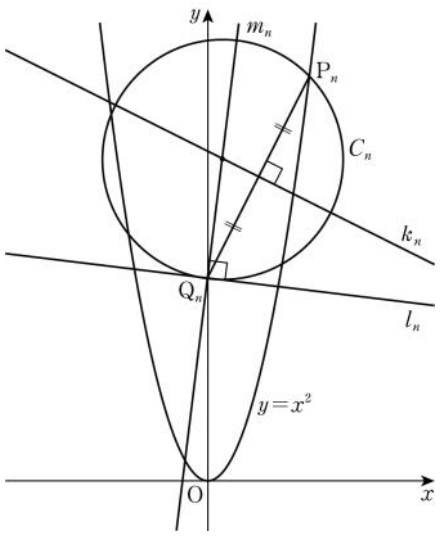
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2} \times \frac{(n+2)^2 - (n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2} \times \frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{n}} \times \frac{4}{1+\dfrac{2}{n}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}}\right)$$

$= 2$

70.



점 Q_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선을 m_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n 은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n 에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$ 이므로 직선 m_n 의 기울기는 $4n$ 이다. 직선 m_n 이 점 Q_n 을 지나므로 직선 m_n 의 방정식은

$y = 4nx + 2n^2$

선분 P_nQ_n 의 수직이등분선을 k_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 k_n 위에 존재한다.

직선 P_nQ_n 의 기울기는 n, 선분 P_nQ_n 의 중점의 좌표는 $(n, 3n^2)$ 이므로 직선 k_n 의 방정식은

$y = -\dfrac{1}{n}(x-n) + 3n^2$

$y = -\dfrac{1}{n}x + 3n^2 + 1$

원 C_n 의 중심은 두 직선 m_n, k_n 의 교점이므로 원 C_n 의 중심의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$4nx_n + 2n^2 = -\dfrac{1}{n}x_n + 3n^2 + 1$ 에서

$\left(4n + \dfrac{1}{n}\right)x_n = n^2 + 1$

$x_n = \dfrac{n^3+n}{4n^2+1}$

$y_n = 4n \times \dfrac{n^3+n}{4n^2+1} + 2n^2 = \dfrac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$

원점을 지나고 원 C_n 의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$a_n = \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{12n^4+6n^2}{n^3+n} = \dfrac{12n^3+6n}{n^2+1}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{12n^2+6}{n^2+1} = 12$

71.

$f(x) = x(x-n)(x-3n^2)$

$= x^3 - (3n^2+n)x^2 + 3n^3x$

$f'(x) = 3x^2 - 2(3n^2+n)x + 3n^3$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = \dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

또는 $x = \dfrac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로

$x = \dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n = \dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$

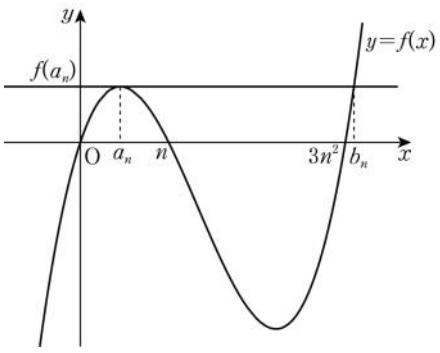
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2 b_n$에서

$a_n^2 b_n = a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3 a_n$

양변을 $n^3 a_n$으로 나누면

$$\frac{a_n b_n}{n^3} = \frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$

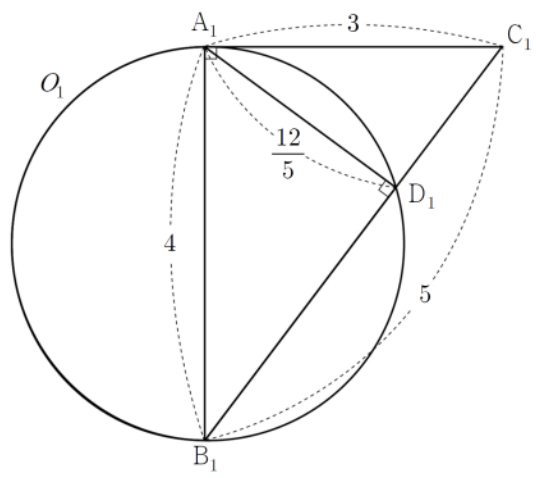
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n}\times\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 - \frac{3n^2+n}{n^2}\times\frac{a_n}{n}+3 \right\}$$

$$= 0-3\times\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

$p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$

72.



원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로

반원의 넓이는 2π

직각삼각형 $C_1A_1B_1$에서 $\overline{A_1C_1}=3$, $\overline{A_1B_1}=4$이므로

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

선분 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로 $\angle A_1D_1B_1=\frac{\pi}{2}$

삼각형 $C_1A_1B_1$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{A_1D_1}$이므로

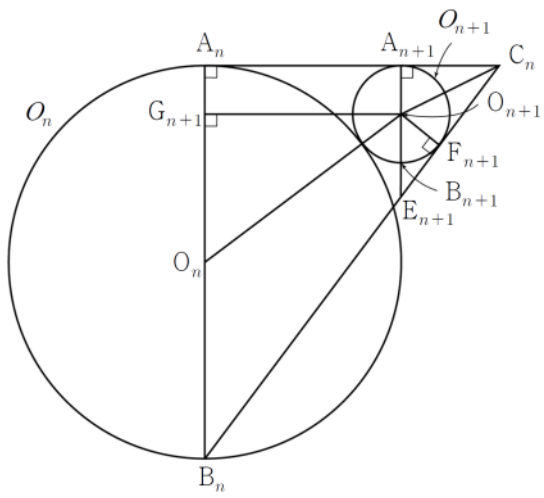
$\overline{A_1D_1}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 $B_1D_1A_1$에서 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

삼각형 $B_1D_1A_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\frac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.

직선 $A_{n+1}B_{n+1}$이 선분 B_nC_n과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고, 원 O_{n+1}과 직선 B_nC_n이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{A_{n+1}C_n}=a_n$이라 하면 $\overline{F_{n+1}C_n}=a_n$이고

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{A_{n+1}C_n} : \overline{E_{n+1}C_n}=3:5$에서 $\overline{E_{n+1}C_n}=\frac{5}{3}a_n$이고

$\overline{E_{n+1}F_{n+1}}=\overline{E_{n+1}C_n}-\overline{F_{n+1}C_n}=\frac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$과 삼각형 $F_{n+1}E_{n+1}O_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{O_{n+1}F_{n+1}} : \overline{E_{n+1}F_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.

점 O_{n+1}에서 선분 A_nO_n에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$\overline{O_{n+1}G_{n+1}}=\overline{A_nC_n}-\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$

$\overline{O_nG_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{O_nO_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로

직각삼각형 $O_nG_{n+1}O_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$

$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{4}r_n$

원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 4 : 1이면 넓이의 비는 16 : 1이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\frac{96}{25}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

73.

$|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

따라서

$$f(x)\begin{cases} a+\dfrac{b}{x} & (|x|>1) \\ \dfrac{a+b+1}{3} & (x=1) \\ \dfrac{a-b-1}{3} & (x=-1) \\ \dfrac{x}{2} & (|x|<1) \end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로

$|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,

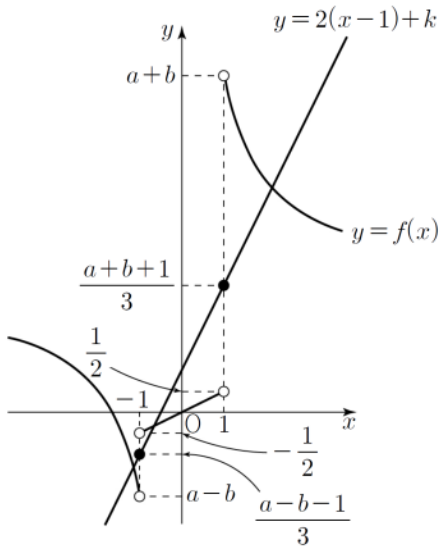
$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인

일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \frac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \frac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{a+b+1}{3}=k$, $\frac{a-b-1}{3}=k-4$에서

$b=5$

$k=\frac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. …… ㉠

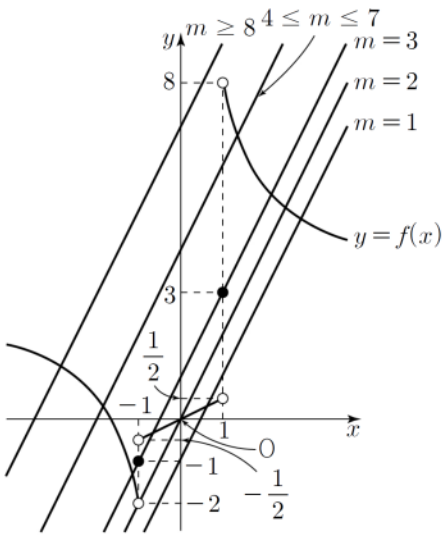
$\lim_{x\to-1-} f(x)<f(-1)<\lim_{x\to-1+} f(x)$이어야 하므로

$a-5<\frac{a}{3}-2<-\frac{1}{2}$에서 $a<\frac{9}{2}$ …… ㉡

$a>0$이므로 $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\lim_{x\to1-} f(x)<f(1)<\lim_{x\to1+} f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\frac{9}{2}$이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때

$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때

$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때

$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\le m\le 7$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+} f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)<\lim_{x\to1+} f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m\ge 8$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+} f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)\ge\lim_{x\to1+} f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+1+1+4+1\times4=13$$

74.

$\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$

$\log a_n a_{n+1} b_n=0$, $a_n a_{n+1} b_n=1$

$$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

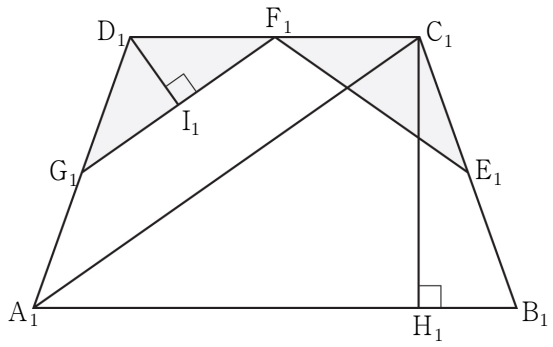
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3n+a_1}\right)$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{a_1} = \frac{1}{12}$

따라서 $a_1 = 4$

75.



점 C_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 $C_1H_1B_1$에서 $\overline{B_1H_1} = 2$이므로

$\overline{C_1H_1} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ 이고,

직각삼각형 $A_1H_1C_1$에서

$\overline{A_1C_1} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{6}$

삼각형 $A_1C_1D_1$과 삼각형 $G_1F_1D_1$은 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{G_1F_1} = 2\sqrt{6}$

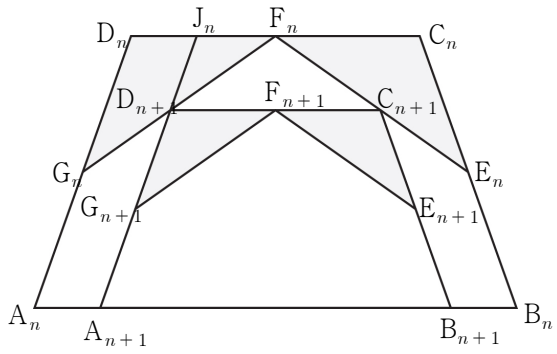
점 D_1에서 선분 G_1F_1에 내린

수선의 발을 I_1이라 하면 직각삼각형 $D_1I_1F_1$에서

$\overline{D_1I_1} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$

$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{2}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$에서 $\overline{A_nB_n} : \overline{A_nD_n} = 5:3$

이고, 사다리꼴 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{A_{n+1}D_{n+1}} = 5:3$이므로

두 선분 A_nD_n과 $A_{n+1}D_{n+1}$이 서로 평행하다.

직선 $A_{n+1}D_{n+1}$이 선분 C_nD_n과 만나는 점을 J_n이라 하자.

두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}F_nJ_n$은 서로 닮음이고,

$\angle D_nF_nG_n = \angle C_{n+1}D_{n+1}F_n$이므로 두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}C_{n+1}F_n$은 서로 닮음이다.

$\overline{D_nC_n} = a_n$, $\overline{D_{n+1}C_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면

이등변삼각형 $D_{n+1}C_{n+1}F_n$에서

$\overline{D_{n+1}C_{n+1}} : \overline{D_{n+1}F_n} = 2\sqrt{6} : 3$이므로

$\overline{D_{n+1}F_n} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \overline{D_{n+1}C_{n+1}} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_{n+1}$이고,

이등변삼각형 $D_{n+1}F_nJ_n$에서

$\overline{D_{n+1}F_n} : \overline{D_{n+1}J_n} = 2\sqrt{6} : 3$이므로

$\overline{D_{n+1}J_n} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \overline{D_{n+1}F_n} = \frac{3}{8} a_{n+1}$

$\overline{A_{n+1}J_n} = \overline{A_{n+1}D_{n+1}} + \overline{D_{n+1}J_n}$이므로

$a_n = \overline{A_{n+1}J_n} = a_{n+1} + \frac{3}{8} a_{n+1} = \frac{11}{8} a_{n+1}$

$a_{n+1} = \frac{8}{11} a_n$이므로 두 사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $11:8$이며 넓이의 비는 $121:64$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $6\sqrt{2}$이고 공비가 $\frac{64}{121}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{6\sqrt{2}}{1 - \frac{64}{121}} = \frac{242}{19}\sqrt{2}$

76.

점 (n, n)에서 직선 $y = x$와 접하는 원의 중심은 직선 $y = -x + 2n$ 위에 있으므로 $b_n = -a_n + 2n$

원의 중심이 두 점 (n, n), $(1, 0)$으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으므로

$(a_n - n)^2 + \{(-a_n + 2n) - n\}^2 = (a_n - 1)^2 + (-a_n + 2n)^2$

$a_n = \frac{2n^2 + 1}{2}$, $b_n = -\frac{2n^2 + 1}{2} + 2n$

$a_n - b_n = 2n^2 - 2n + 1$

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - b_n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2} = 2$

77.

삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{B_1C_1}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = 7$에서

$\overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$

이고, 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} = 3:2$이므로

$\overline{B_1D_1} = \frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$

호 B_2D_1과 호 D_1C_1의 원주각이 같으므로 중심각 또한 같고 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이 S_1은 삼각형 $B_1D_1B_2$의 넓이와 같다.

사각형 $AB_2D_1C_1$은 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle B_2D_1C_1 = \pi - \angle B_2AC_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\angle B_1D_1B_2 = \frac{\pi}{3}$

$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{B_1D_1} \times \overline{B_2D_1} \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \frac{2\sqrt{7}}{5} \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{21}{50}\sqrt{3}$

삼각형 $B_1D_1B_2$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{B_1B_2}^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)\cos\frac{\pi}{3}$

$\overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$, $\overline{AB_2} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$

그림 R_2에서 $S_1 : S_2 = AB_1C_1 : AB_2C_2$이므로

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\triangle AB_2C_2}{\triangle AB_1C_1} = \left(\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AB_1}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{8}{5}}{3}\right)^2 = \frac{64}{225}$

이다. 따라서

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{21}{50}\sqrt{3}}{1 - \frac{64}{225}} = \frac{27}{46}\sqrt{3}$

78.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

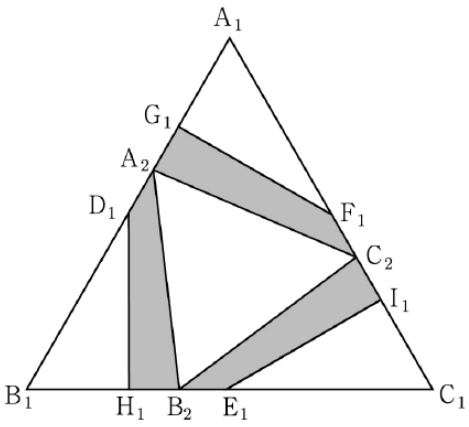


그림 R_1에서 사각형 $A_2C_2F_1G_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 3\times \sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 4\times 2\times \sin\frac{\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$의 넓이는 모두 같으므로

$S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

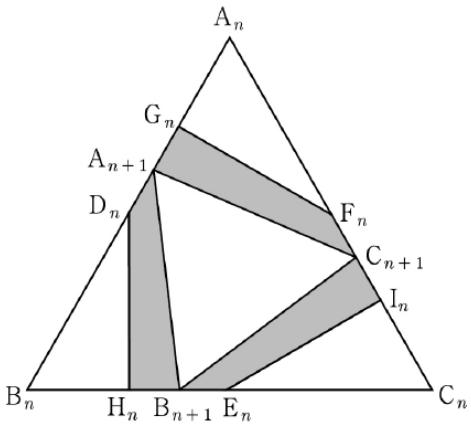


그림 R_n에서 세 사각형 $A_{n+1}C_{n+1}F_nG_n$,
$B_{n+1}A_{n+1}D_nH_n$, $C_{n+1}B_{n+1}E_nI_n$의 넓이의 합을 T_n이라 하자.
삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$이 닮음이므로
정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하면

$\overline{A_nC_{n+1}}=\frac{5}{8}l_n$, $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{3}{8}l_n$

삼각형 $A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙을 이용하여
$\overline{A_{n+1}C_{n+1}}$의 길이 l_{n+1}을 구하면

$(l_{n+1})^2=\left(\frac{5}{8}l_n\right)^2+\left(\frac{3}{8}l_n\right)^2-2\times\frac{5}{8}l_n\times\frac{3}{8}l_n\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{19}{64}(l_n)^2$

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{19}}{8}l_n$이고 $l_n : l_{n+1}=1 : \frac{\sqrt{19}}{8}$

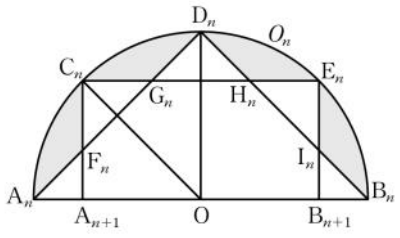
$T_n : T_{n+1}=1 : \frac{19}{64}$이고 $T_{n+1}=\frac{19}{64}T_n$

$\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\frac{19}{64}$인
등비수열이다.

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19}{64}}=\frac{112\sqrt{3}}{15}$

79.

선분 A_nB_n의 중점을 O, 선분 A_nD_n이 두 선분 C_nA_{n+1}, C_nE_n과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 B_nD_n이 두 선분 C_nE_n, E_nB_{n+1}과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는 모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
두 점 C_n, D_n이 호 A_nB_n의 4등분점이므로

$\angle C_nOA_{n+1}=45°$, $\angle A_nOD_n=90°$, $\overline{D_nA_n}=\overline{D_nB_n}$

$\angle C_nA_{n+1}O=90°$이므로 $\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $D_nG_nH_n$은 $\overline{D_nG_n}=\overline{D_nH_n}$인 직각삼각형이고,

$\overline{D_nG_n}^2=2\left(\overline{OD_n}-\overline{A_{n+1}C_n}\right)^2=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$

$\overline{D_nG_n}=(\sqrt{2}-1)r_n$

(삼각형 $D_nG_nH_n$의 넓이)

$=2\times$(삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$의 넓이)

두 삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$, $B_nB_{n+1}I_n$이 합동이므로

$a_n=$(반원 O_n의 넓이)$-$(사각형 $C_nA_{n+1}B_{n+1}E_n$의 넓이)$-2\times$(삼각형 $D_nG_nH_n$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\overline{A_{n+1}B_{n+1}}\times\overline{A_{n+1}C_n}-\overline{D_nG_n}^2$

$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$

$=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$이므로

$a_{n+1}=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_{n+1}}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}}=4\pi+16\sqrt{2}-32$

80.

$A_n(n,0)$, $B_n(n,3)$에서 $\overline{OA_n}=n$, $\overline{OB_n}=\sqrt{n^2+9}$

직선 OB_n의 방정식은 $y=\frac{3}{n}x$이므로

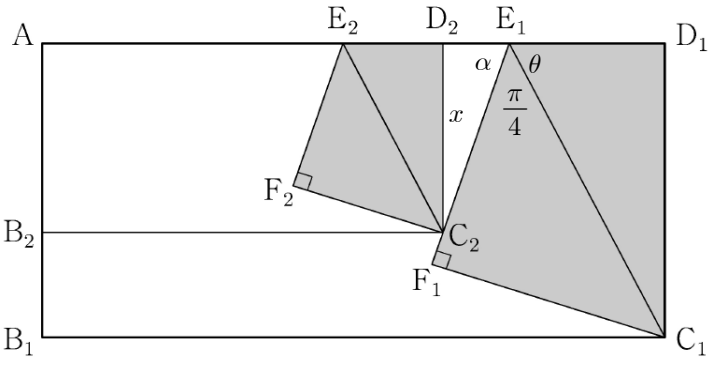
점 C_n의 좌표는 $\left(1,\frac{3}{n}\right)$이고 $\overline{PC_n}=\frac{3}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{PC_n}}{\overline{OB_n}-\overline{OA_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{n^2+9}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)=\frac{2}{3}$

$p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

81.



사각형 $E_1F_1C_1D_1$의 넓이는 삼각형 $C_1D_1E_1$의 넓이와 직각이등변삼각형 $C_1E_1F_1$의 넓이의 합과 같으므로 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

그림에서 $\overline{E_1D_1}=1$, $\overline{C_1D_1}=2$ 이므로 $\tan\theta=2$

삼각형 $E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로 $\angle C_1E_1F_1=\frac{\pi}{4}$

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+1}{1-2\cdot 1}=-3$이므로 $\tan\alpha=3$이고

$\overline{C_2D_2}=x$라 하면 $\overline{D_2E_1}=\frac{x}{3}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\overline{AD_1} = 2x + \frac{x}{3} + 1 = 4$ 이므로 $x = \frac{9}{7}$

따라서 사각형 $E_1F_1C_1D_1$과 사각형 $E_2F_2C_2D_2$의 닮음비는

$2 : \frac{9}{7} = 1 : \frac{9}{14}$이고 넓이의 비는 $1 : \frac{81}{196}$

$\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항 $\frac{7}{2}$이고 공비가 $\frac{81}{196}$인 등비급수이므로

$$\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}} = \frac{441}{115}$$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 11 미분법

해 설

1. 정답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{7x}-1}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{7}{2}$$

2.

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$

$f'(2)=(a+3)e^2=8e^2$에서 $a=5$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x(2^x-1)}{x}=\ln 2$$

[다른 풀이]

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1-2^x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

$=\ln 4-\ln 2=2\ln 2-\ln 2=\ln 2$

4.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

5. [정답] ①

[출제의도] 삼각함수의 미분 이해하기

$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$

$=e^x(\sin x+3\cos x)$

따라서 $f'(0)=1\times 3=3$

6. [정답] ③

[출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$에서 $\lim_{x\to e}(x-e)=0$이므로

$\lim_{x\to e}\{f(x)-g(x)\}=0$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=e$에서 연속이므로

$f(e)=g(e)$

$a^e=2\log_b e=\frac{2}{\ln b}$ … ㉠

$f'(x)=a^x\ln a$, $g'(x)=\frac{2}{x\ln b}$이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\{f(x)-f(e)\}-\{g(x)-g(e)\}}{x-e}$$

$=f'(e)-g'(e)$

$=a^e\ln a-\frac{2}{e\ln b}=0$

㉠에 의하여 $a^e\ln a-\frac{a^e}{e}=0$에서 $\ln a=\frac{1}{e}$

$a=e^{\frac{1}{e}}$, $b=e^{\frac{2}{e}}$

따라서 $a\times b=e^{\frac{3}{e}}$

7. 정답 ④

[해설]

$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-2t(5t)}{(t^2+1)^2}=\frac{5-5t^2}{(t^2+1)^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{6t}{t^2+1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{5-5t^2}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{5(1-t^2)}$$

따라서 $t=2$에서 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{2\times 6\times(2^2+1)}{5(1-2^2)}=-4$

8. 정답 ①

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$의 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=0$에서 $b=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}\times\frac{a}{3}$$

$=\frac{8}{3}a$

$\frac{8a}{3}=16$에서 $a=6$

$\therefore\ a+b=9$

9. 정답 ②

[해설]

$f(x)=x^2-5x+2\ln x\ (x>0)$라 하면

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$x>0$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

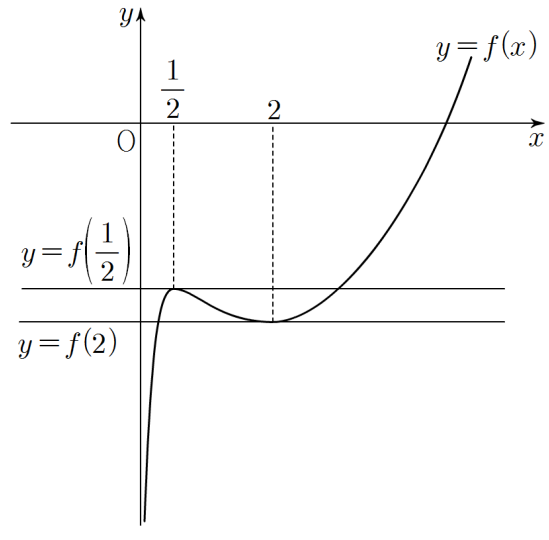
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	2	…
$f'(x)$		+		−		+
$f(x)$		↗		↘		↗

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-2\ln 2$, $f(2)=-6+2\ln 2$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



꿈을 현실로! 희망 부산교육

x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 될 때는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 두 점에서 만날 때이다. 그러한 t의 값은 직선 $y=t$가 함수 $f(x)$의 극점을 지날 때이다.

따라서 $t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 또는 $t=-6+2\ln 2$이므로 t의 값의 합은

$$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$$

10. 정답 ③

[해설]

곡선 $y=\sin x$ 위의 점 P(t, $\sin t$)에서의 접선의 기울기는 $y'=\cos x$에서 $\cos t$이다.

기울기가 -1인 직선과 이 직선이 이루는 예각의 탄젠트 값은

$$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+(-1)\cos t}\right|=\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\ (0<t<\pi)$$

$$\therefore \lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\left\{\frac{1}{(\pi-t)^2}\times\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{(1+\cos t)(1-\cos t)}{(\pi-t)^2(1-\cos t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\sin^2 t}{(\pi-t)^2(1-\cos t)^2}$$

$t-\pi=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to 0-$이므로

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin^2(x+\pi)}{x^2\{1-\cos(x+\pi)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

11. [정답] ②

[해설]

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$에서 $g(2)=4,\ g'(2)=12$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)$$

$$f'(4)=\frac{8-1}{16-4+2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $h'(2)=\frac{1}{2}\times 12=6$

12. [정답] ①

[해설]

$2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(2e^{x+y-1})=\frac{d}{dx}(3e^x+x-y)$$

$$2e^{x+y-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^x+1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1-2e^{x+y-1}}{2e^{x+y-1}+1}$$

따라서 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{3+1-2}{2+1}=\frac{2}{3}$

13. 정답 ②

$$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t},$$

$t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면 $\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-2}=-1$

14. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$에서 $f'(0)=3$

$h(x)=g(5f(x))$라 하면 $f(0)=1$이므로

$h'(0)=g'(5f(0))\times 5f'(0)=15g'(5)$

$g(5)=t$로 놓으면 $f(t)=5$에서

$e^{2t}+e^t-1=5,\ (e^t-2)(e^t+3)=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=2$, 즉 $t=\ln 2$

$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}=10$

따라서 $h'(0)=15g'(5)=15\times\frac{1}{f'(\ln 2)}=\frac{3}{2}$

15. 정답 ②

$$\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t,\ \frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+1},\ \frac{dy}{dx}=\frac{\pi\cos\pi t\times(t^3+1)}{3t^2}$$

$t=1$을 대입하면 $\frac{\pi\cos\pi\times 2}{3}=-\frac{2}{3}\pi$

16. 정답 ①

접점을 $\left(s,\ \frac{1}{e^s}+e^t\right)$라 할 때, $y'=-e^{-x}$이므로 $f(t)=-e^{-s}$,

양변을 t에 관해 미분하면 $f'(t)=e^{-s}\times\frac{ds}{dt}$

접선 방정식은 $y=-e^{-s}(x-s)+\frac{1}{e^s}+e^t$,

원점을 지나므로 $(0, 0)$을 대입하면

$0=-e^{-s}\times(-s)+e^{-s}+e^t=(s+1)e^{-s}+e^t$

양변을 t에 관해 미분하면 $\{e^{-s}-(s+1)e^{-s}\}\frac{ds}{dt}+e^t=0$

$f(a)=-e\sqrt{e}$일 때, $-e^{-s}=-e^{\frac{3}{2}}$이므로 $s=-\frac{3}{2}$,

$-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+e^a=0,\ e^a=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$\left(e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)\times\frac{ds}{dt}+\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}=0,\ \frac{3}{2}\times\frac{ds}{dt}+\frac{1}{2}=0,\ \frac{ds}{dt}=-\frac{1}{3}$

$f'(a)=e^{\frac{3}{2}}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$

17.

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$에서 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

18.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$$

$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{\frac{2x}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\ln\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= \frac{2}{3}\ln e = \frac{2}{3}$

19.

$x^2 - y\ln x + x = e$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x - \frac{dy}{dx} \times \ln x - y \times \frac{1}{x} + 1 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \frac{y}{x} + 1}{\ln x}$

그러므로 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는

$\frac{2e - \frac{e^2}{e} + 1}{\ln e} = e + 1$

20.

함수 $g(x)$는 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 3$의 역함수이므로

$x = y^3 + 2y + 3 \cdots\cdots$㉠

$x = 3$일 때,

$3 = y^3 + 2y + 3$

$y(y^2 + 2) = 0$

$y = 0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1 = (3y^2 + 2)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 2}$

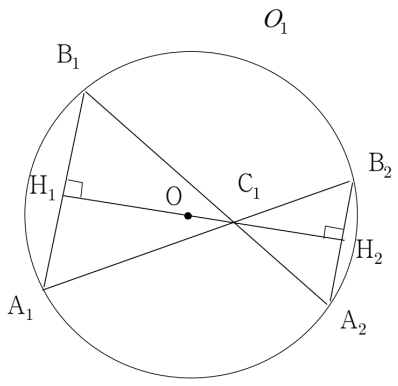
따라서,

$g'(3) = \frac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \frac{1}{2}$

21.

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$이므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1H_1} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$

$\angle A_2C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때,

$\overline{C_1A_2} = \overline{B_1A_2} - \overline{B_1C_1} = 3 - 2 = 1$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$S_1 = 2 \times (\triangle A_1A_2B_1 - \triangle A_1C_1B_1)$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2} /\!/ \overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$,

$\overline{A_2B_1} /\!/ \overline{A_3B_2}$

이고

$A_1B_1 = 2$, $A_2B_2 = 1$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

22.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$a_n = 4 + (n-1)d$

이때, 급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$

이 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$

$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{4 + (n-1)d}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$

$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{d + \frac{4-d}{n}}{1} - \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\right)$

$= d - 3 = 0$

그러므로

$d = 3$

이때, $a_n = 3n + 1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3 + \frac{1}{n}\right) - \left(3 + \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \lim_{n \to \infty}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\right.$

$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$

23.

$\frac{dx}{dt} = 2t\ln t + t + 3$

$\frac{dy}{dt} = 6e^{t-1} + 6te^{t-1} = 6e^{t-1}(1+t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t\ln t + t + 3}$ $(2t\ln t + t + 3 \neq 0)$

따라서 $t = 1$일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{6 \times 2}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$

24.

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x) - 2}{x - 2} = \frac{1}{3}$에서 $f(2) = 2$, $f'(2) = \frac{1}{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $g(2)=2$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}=3$

$f(2)\neq 0$이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$h'(2)=\dfrac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}=\dfrac{3\times 2-2\times\frac{1}{3}}{2^2}=\dfrac{6-\frac{2}{3}}{4}=\dfrac{4}{3}$

25.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3}=\dfrac{f'(0)}{3}$

$\dfrac{f'(0)}{3}=2$ 에서 $f'(0)=6$

26.

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}$ (단, $\cos t+\sin t\neq 0$)

$\dfrac{dy}{dx}=3$인 t의 값을 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$라 하면

$\cos\alpha=-3\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$,

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

27.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)=4$

28.

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$

$f'(x)=(\log_3 6+\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

따라서 $f'(9)=\dfrac{1}{9\ln 3}$

29.

$x=t$일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 각각

e^{2t+k}, e^{-3t+k}이고

$\overline{PQ}=t$를 만족시키는 k의 값이 $f(t)$이므로

$e^{2t+f(t)}-e^{-3t+f(t)}=t$

$e^{f(t)}\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)=t$

$e^{f(t)}=\dfrac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$\lim\limits_{t\to 0+}e^{f(t)}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{2\times\frac{e^{2t}-1}{2t}+3\times\frac{e^{-3t}-1}{-3t}}$

$=\dfrac{1}{2\times 1+3\times 1}=\dfrac{1}{5}$

30.

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{OP'}=t$, $\overline{OQ'}=f(t)$

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\overline{OQ}=\overline{OP}-\overline{PQ}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로

$\overline{OP'}:\overline{OQ'}=\overline{OP}:\overline{OQ}$

$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$f(t)=\dfrac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\times\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=1^2\times\dfrac{1}{\sqrt{1}\times(\sqrt{1}+1)}=\dfrac{1}{2}$

31.

$\dfrac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{e^t-\sin t}$

따라서 $t=0$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{1}{1-0}=1$

32.

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x\geq 0$일 때 $y=e^x$이고 접점을 (t,e^t)이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t)$, $t=1$

따라서 접선의 기울기는 e이고 이 접선과 y축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$이다.

$\tan\theta=\dfrac{-e-e}{1+(-e)\times e}=\dfrac{-2e}{1-e^2}=\dfrac{2e}{e^2-1}$

33.

$e^x=k\sin x$ 에서 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{\sin x}{e^x}$ … ㉠이므로

$h(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$라 하면

$h'(x)=\dfrac{e^x\cos x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

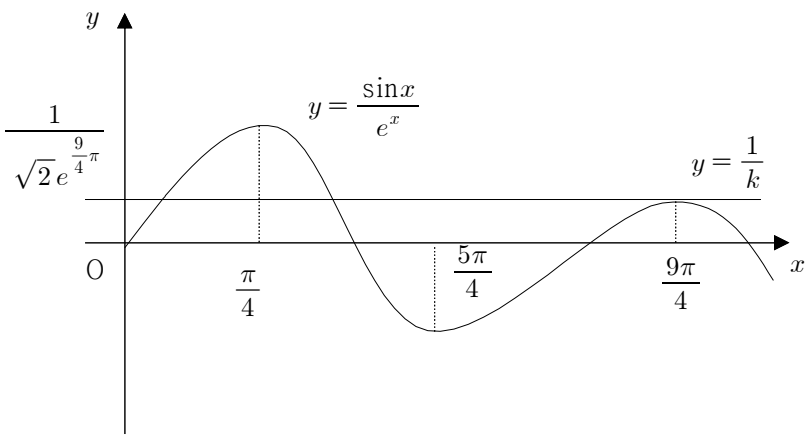
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(0.$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 $x=\frac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\frac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

34.

함수 $f(x)=xe^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=(4x-4)e^{-2x}=0$에서 $x=1$

$x<1$에서 $f''(x)<0$이고,

$x>1$에서 $f''(x)>0$이다.

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점 A의 좌표는 $(1,\ e^{-2})$

$f'(1)=-e^{-2}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$

$y=-e^{-2}(x-2)$

그러므로 점 B의 좌표는 $(2,\ 0)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times e^{-2}=e^{-2}$

35.

$\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=x$라 할 때,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+x}{1-x\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}+x}{1-\frac{2}{3}x}=1,$$

$\frac{2}{3}+x=1-\frac{2}{3}x$, $\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}$, $x=\tan\beta=\frac{1}{5}$

36.

$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right)/\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{1}{e^t+4e^{-t}}$에 $t=\ln 2$를 대입하면,

$\frac{1}{2+4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

37. $\frac{dx}{dt}=\ln t+1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}$ 이므로

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(\ln t+1)^2+\left\{\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}\right\}^2}$$

따라서 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\ln e^2+1)^2+\left\{\frac{4\ln e^2-4}{(\ln e^2)^2}\right\}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

38. 양변을 미분하면 $f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$

$x=1$을 대입하면 $f'(2)\times 4=e$

$\therefore\ f'(2)=\frac{e}{4}$

39.

$x=0$을 대입하면 $0=a-4$에서 $a=4$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\times\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\times\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\times\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2\times\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$=1\times 1\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{8}$

따라서 $a\times f(0)=4\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$

40.

$$g'(x)=\frac{f'(x)(e^x+1)^2-f(x)2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{f'(x)(e^x+1)^2-f(x)2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{f'(x)(e^x+1)-2f(x)e^x}{(e^x+1)^4}$$

이다. 따라서

$g'(0)=\frac{2f'(0)-2f(0)}{8}=\frac{f'(0)-f(0)}{4}=\frac{1}{2}$

41.

점 $(a,\ 0)$이 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로 $a^3=1$에서 $a=1$이다.

음함수 미분법을 이용하면

$\frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(y^3)=\frac{d}{dx}e^{xy}$

$3x^2-2y^2\frac{dy}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{2y^2+xe^{xy}}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

점 $(1,\ 0)$에서 접선의 기울기는 3이므로 $b=3$이다.
따라서 $a+b=4$이다.

42.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\frac{x^2+4x}{x^2+x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\lim_{x\to 0}\frac{x(x+4)}{x(x+1)}$$
$$=1\times 4=4$$

43.

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{8},\ 1+\frac{\pi}{2}\right)$이고

$f'(x)=2\sec^2 2x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1+\frac{\pi}{2}=4x+1$

따라서 접선의 y절편은 1

44.

시각 t에서의 속도는

$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(3+2\sin\pi t,\ \frac{6}{t}-2\cos\pi t\right)$이므로

따라서 시각 $t=\frac{1}{2}$에서의 속력은

$\sqrt{(3+2)^2+(12-0)^2}=13$

45.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}=-3t^2+3t$$

$=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ 이므로

$t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{3}{4}$을 가진다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$

46.

$f'(x)=\ln(2x-1)+x\times\frac{2}{2x-1}$

이므로

$f'(1)=\ln 1+2$
$=0+2$
$=2$

47.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{t}}}{2t}=\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

따라서 $t=4$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8}$

48.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{e^k+2}=\frac{1}{4}$ 이므로 $e^k=2$, 즉 $k=\ln 2$

$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$ 이므로 $f'(\ln 2)=-\frac{1}{8}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'(\ln 2)}=-8$

49.

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$
$=(x^2-9)e^x$

x		-3		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$a=f(-3)=8e^{-3}$, $b=-4e^3$

$ab=-32$

50.

$f(x)=\frac{(x-1)^2-7}{x-1}=(x-1)-\frac{7}{x-1}$

$f'(x)=1+\frac{7}{(x-1)^2}$ 이므로 $f'(0)=8$

51.

$f(\theta)=2\tan\theta\times 2\times\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{CAB}=3\theta$이므로, $g(\theta)=\frac{1}{2}(3\theta-\theta)=\theta$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

52. [정답] 79
[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기
원 C의 중심을 F라 하고 $\angle\mathrm{COF}=\alpha$라 하자.
$\angle\mathrm{COF}=\angle\mathrm{FOE}$이므로
$\cos(\angle\mathrm{COE})=\cos(\alpha+\alpha)$
$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1=\frac{7}{25}$
에서 $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$
$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$이므로 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$
두 직선 BD, CD가 원 C와 접하는 점을
각각 G, H라 하자.
원 C의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{\mathrm{OF}}=8-r$, $\overline{\mathrm{FH}}=r$이므로
직각삼각형 OHF에서 $\sin\alpha=\frac{r}{8-r}=\frac{3}{5}$, $r=3$
$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OF}}\times\cos\alpha=5\times\frac{4}{5}=4$
사각형 DHFG는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로
$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{DH}}=4-3=1$
$\angle\mathrm{AOC}=\beta$라 하면
$\angle\mathrm{OBD}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{AOC}$이므로
삼각형 BOD에서 $\sin\beta=\frac{1}{8}$, $\cos\beta=\frac{3}{8}\sqrt{7}$
또한 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$
$\sin(\angle\mathrm{AOE})=\sin(2\alpha+\beta)$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$=\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta$

$=\frac{24}{25}\times\frac{3}{8}\sqrt{7}+\frac{7}{25}\times\frac{1}{8}$

$=\frac{7}{200}+\frac{9}{25}\sqrt{7}$

에서 $p=\frac{7}{200}$, $q=\frac{9}{25}$

따라서 $200\times(p+q)=200\times\left(\frac{7}{200}+\frac{9}{25}\right)=79$

53. [정답] 107

[출제의도] 지수함수의 미분을 이용하여 추론하기

조건 (나)에 의하여

$f(x+2k)=-\frac{1}{2}f(x+2(k-1))$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 f(x+2(k-2))$

$\vdots$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^k f(x)$ (k는 자연수)

자연수 m에 대하여

$2m-2\le x\le 2m-1$일 때

$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{x-2(m-1)}-1\}$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{-2(m-1)}\times 2^x-1\}$

$2m-1<x\le 2m$일 때

$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2(m-1)}-1\right\}$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right\}$

이므로

$2m-2<x<2m-1$에서

$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{-2(m-1)}\times 2^x\ln 2$

$2m-1<x<2m$에서

$f'(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln 2$

자연수 l에 대하여

$2l-2<x<2l-1$ 또는 $2l-1<x<2l$일 때

$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=2f'(x)$

$x=2l-1$일 때

$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l-1+h)-f(2l-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1+h}-1\right\}}{h}\right.$

$\left.-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\{2^{-2(l-1)}\times 2^{2l-1-h}-1\}}{h}\right]$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\times\lim_{h\to 0+}\frac{(2^{-h+1}-1)-(2^{-h+1}-1)}{h}$

$=0$

$x=2l$일 때

$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l+h)-f(2l-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^l(2^{-2l}\times 2^{2l+h}-1)}{h}\right.$

$\left.-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-h}-1\right\}}{h}\right]$

$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^l\times\lim_{h\to 0+}\frac{2^h-1}{h}$

$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^l\ln 2$

이제 $\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $n=2s-1$(s는 자연수)일 때

$\lim_{t\to 0+}g(n+t)$

$=\lim_{t\to 0+}g(2s-1+t)$

$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s-1+t)$

$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times 2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s-1}\ln 2$

$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2$

$\lim_{t\to 0+}g(n-t)$

$=\lim_{t\to 0+}g(2s-1-t)$

$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s-1-t)$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\times 2^{-2(s-1)}\times 2^{2s-1}\ln 2$

$=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2$

그러므로

$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$

$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2-\left\{-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2\right\}+0$

$=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2$

$16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2=\frac{\ln 2}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^s=\left(\frac{1}{2}\right)^{28}$

$s=28$이므로 $n=2\times 28-1=55$

(ⅱ) $n=2s$(s는 자연수)일 때

$\lim_{t\to 0+}g(n+t)=\lim_{t\to 0+}g(2s+t)$

$=\lim_{t\to 0+}2f'(2s+t)$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\times 2^{-2s}\times 2^{2s}\ln 2$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^s\ln 2$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$\lim_{t\to 0+} g(n-t)=\lim_{t\to 0+} g(2s-t)$$

$$=\lim_{t\to 0+} 2f'(2s-t)$$

$$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times 2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s}\ln 2$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

그러므로

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2=\frac{\ln 2}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}=\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$

$s=26$이므로 $n=2\times 26=52$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은

$55+52=107$

54. 정답 ②

[해설]

$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$에서

$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$ …… (*)

양변에 $x=0$과 $x=2$를 각각 대입하면

$\{f(0)+1\}^2=a+b+1=\{f(2)+1\}^2$

조건 (나)에서 $f(2)+1=f(0)$이므로

$\{f(0)+1\}^2=\{f(0)\}^2$ ∴ $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속함수이므로 사잇값 정리에 의해 $f(\alpha)=-1$인 실수 α가 열린구간 $(0, 2)$에 존재한다.

따라서 함수 $\{f(x)+1\}^2$의 최솟값은 0이다.

한편 $\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}$에서 $\cos\pi x=t$라 하고,

$g(t)=t^3e^{1-t^2}$ $(-1\le t\le 1)$이라 하자.

$g'(t)=3t^2e^{1-t^2}-2t^4e^{1-t^2}=t^2(3-2t^2)e^{1-t^2}$

$-1\le t\le 1$인 모든 실수 t에 대하여 $g'(t)\ge 0$이므로 함수 $g(t)$는 이 구간에서 증가함수이다.

따라서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(-1)=-1$이다.

이로부터 $a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$의 최솟값은 $-a+b+1$이다.

∴ $-a+b+1=0$

$f(0)=-\frac{1}{2}$에서 $a+b+\frac{3}{4}=0$이므로 연립하면

$a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{7}{8}$, $ab=-\frac{7}{64}$

55. 정답 5

[해설]

곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$위의 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$는 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로 a, b는 이차방정식

$x^2-2x(x+k)+2(x+k)^2-15=0$

의 두 근이다.

따라서 이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-15=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$a+b=-2k$ …… ㉠

$ab=2k^2-15$ …… ㉡

곡선 C의 양변을 x에 대해 미분하면

$2x-2y-2xy'+4yy'=0$

∴ $y'=\frac{x-y}{x-2y}$ (단, $x\ne 2y$)

따라서 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\frac{k}{a+2k}$

점 $\mathrm{B}(b, b+k)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\frac{k}{b+2k}$

두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$

㉠에서 $a+b=-2k$이므로 $a+2k=-b$, $b+2k=-a$를 대입하면

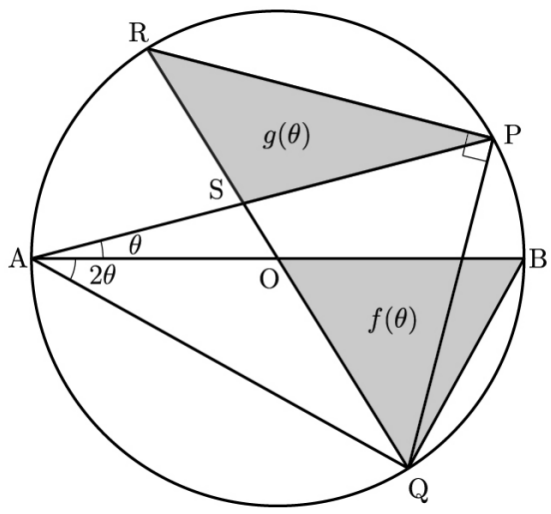
$\frac{k^2}{ab}=-1$, $ab=-k^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $2k^2-15=-k^2$

∴ $k^2=5$

56. [정답] ②

[해설]



$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로

$\angle\mathrm{OQA}=2\theta$, $\angle\mathrm{BOQ}=4\theta$

삼각형 BOQ의 넓이는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin(\angle\mathrm{BOQ})$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 4\theta=\frac{1}{2}\sin 4\theta$

선분 RQ는 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{RPQ}=\frac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{PAQ}=3\theta$

$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RQ}}\cos 3\theta=2\cos 3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{RPA}=\angle\mathrm{RQA}=2\theta$

삼각형 PRS에서 $\angle\mathrm{PSR}=\pi-5\theta$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{RS}}}{\sin 2\theta}=\frac{2\cos 3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$이므로

$\overline{\mathrm{RS}}=\frac{2\cos 3\theta\sin 2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{2\cos 3\theta\sin 2\theta}{\sin 5\theta}$

삼각형 PRS의 넓이는

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RP}}\times\overline{\mathrm{RS}}\times\sin(\angle\mathrm{PRS})$

$=\frac{1}{2}\times 2\cos 3\theta\times\frac{2\cos 3\theta\sin 2\theta}{\sin 5\theta}\times\sin 3\theta$

$=\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin 2\theta\times\sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

따라서

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin 2\theta\times\sin 3\theta}{\sin 5\theta}}{\frac{1}{2}\sin 4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\cos^2(3\theta)\times\sin 2\theta\times\sin 3\theta}{\sin 4\theta\times\sin 5\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{24\times\cos^2(3\theta)\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}{20\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}$$

$$=\frac{6}{5}$$

57. [정답] 208

[해설]

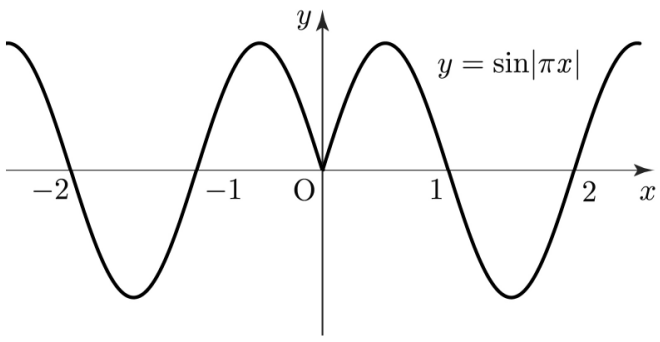
모든 자연수 n에 대하여

$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$이므로

$f(a_n)$의 값은 정수이다.

$$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\ -1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}\ (\text{단, } p\text{는 정수}) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

함수 $y=\sin|\pi x|$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$이고,

$f(a_3)$과 $f(a_5)$의 값은 각각 -1 또는 0 또는 $1$$a_3<x<a_4$ 또는 $a_4<x<a_5$일 때

$0<|f(x)|<1$이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$는 $x=a_4$에서 극대가 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\neq 0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\geq 0)\\ -\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}\\ \quad -\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}\\ \quad +\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

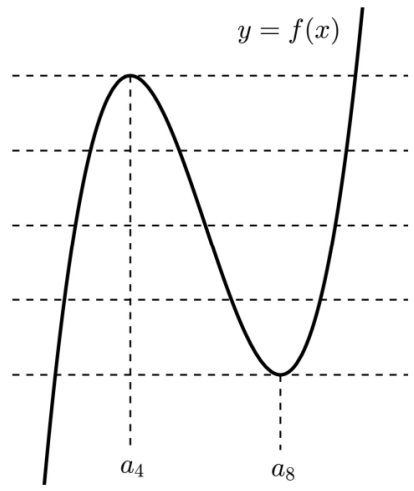
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\neq 0$이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

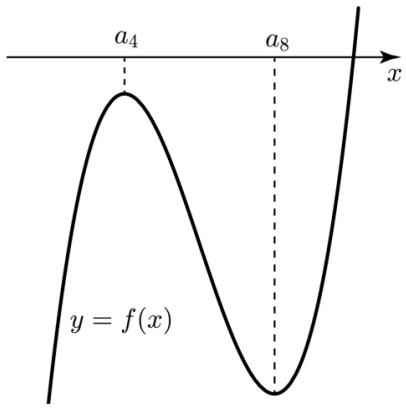
$f''(a_4)<0,\ f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$이다.

(i) $f(a_4)<0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=-1$

$f(a_4)=2q+1$ (단, q는 음의 정수)

$f(a_8)=f(a_4)-4=2q-3$에서

$\cos\{\pi f(a_8)\}=-1$이고

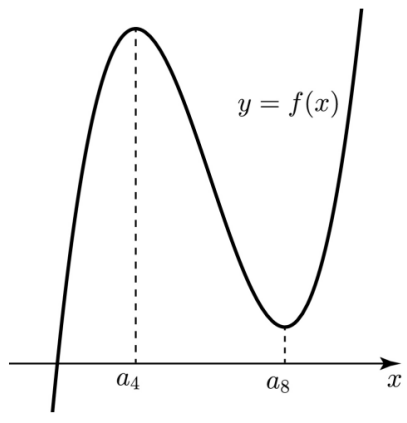
$f''(a_8)>0$이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a_8)>0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극대이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}<0$

$f''(a_8)>0$이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\}=1$

$f(a_8)=2r$ (단, r는 자연수)

$f(a_4)=f(a_8)+4=2r+4$에서

$\cos\{\pi f(a_4)\}=1$이고

$f''(a_4)<0$이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

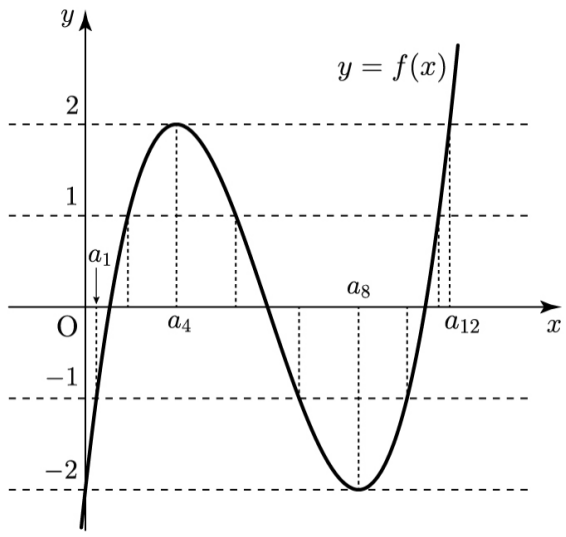
함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a_8)<0<f(a_4)$인 경우

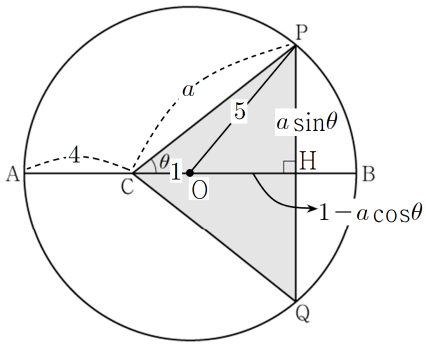
꿈을 현실로!
희망 부산교육

$f(a_4)-4=f(a_8)<0<f(a_4)$이므로
$0<f(a_4)<4$
$f(a_4)=1$ 또는 $f(a_4)=2$ 또는 $f(a_4)=3$
함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로
$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$
$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}>0$
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=1$
$f(a_4)=2s$ (단, s는 자연수)
그러므로 $f(a_4)=2$이고 $f(a_8)=-2$
조건 (나)에 의하여 $f(a_8)=f(0)=-2$
$m=8$



$f(x)=x(x-a_8)^2-2$
$f'(x)=(x-a_8)^2+2x(x-a_8)=3(x-a_8)\left(x-\frac{a_8}{3}\right)$
$f'(a_4)=0$에서 $a_4=\frac{a_8}{3}$
$f(a_4)=a_4(a_4-a_8)^2-2=2$이므로
$\frac{a_8}{3}\left(-\frac{2a_8}{3}\right)^2-2=2,\ a_8=3$
$f(x)=x(x-3)^2-2$
$f(m)=f(8)=8\times5^2-2=198$이고
$k\geq8$일 때 $f(a_k)=k-10$이므로
따라서 $f(a_k)\leq f(8)$인 k의 최댓값은 208

58. **정답** 32



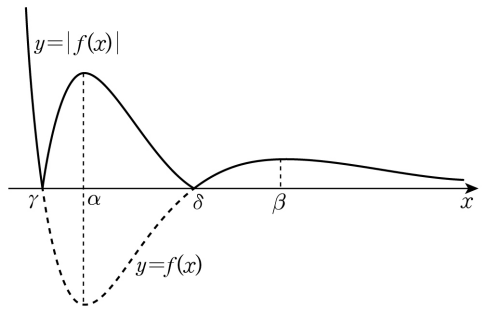
원의 중심을 O, 선분 PQ와 선분 AB의 교점을 H라 할 때,
삼각형 PCH에서 빗변길이를 a라 할 때, $\overline{CH}=a\cos\theta$, $\overline{PH}=a\sin\theta$
반지름 $\overline{OA}=5$이므로 $\overline{OC}=\overline{OA}-\overline{CA}=1$, $\overline{OH}=a\cos\theta-1$
삼각형 OPH에서 피타고라스 정리에 따라
$(a\cos\theta-1)^2+a^2\cos^2\theta=25$
$a^2\cos^2\theta-2a\cos\theta+1+a^2\sin^2\theta=a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2a\cos\theta+1=25$
$a^2-2a\cos\theta-24=0$, θ에 관해 양변을 미분하면,
$2a\times\frac{da}{d\theta}-2\frac{da}{d\theta}\times\cos\theta+2a\sin\theta=0$, $\frac{da}{d\theta}=\frac{2a\sin\theta}{2\cos\theta-2a}$
$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때,
$a^2-\sqrt{2}a-24=(a-4\sqrt{2})(a+3\sqrt{2})=0$이므로 $a=4\sqrt{2}$

$\frac{da}{d\theta}=\frac{2\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}-2\times4\sqrt{2}}=\frac{8}{-7\sqrt{2}}$
$S(\theta)=a^2\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}a^2\sin2\theta$
$S'(\theta)=a\times\frac{da}{d\theta}\times\sin2\theta+a^2\times2\cos2\theta$
$\theta=\frac{\pi}{4}$, $a=4\sqrt{2}$, $\frac{da}{d\theta}=-\frac{8}{7\sqrt{2}}$를 대입하면,
$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\times\left(-\frac{8}{7\sqrt{2}}\right)\times1+32\times0=-\frac{32}{7}$
$\therefore\ -7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-7)\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$

59. [출제의도] 삼각함수의 극한을 이해하여 도형의 넓이의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\theta$이므로
$\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$
점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있으므로 $\angle BDA=\frac{\pi}{2}$
$\overline{CD}=\overline{BC}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}$
점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEH와 ABD는 서로 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.
$\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{EH}=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$
따라서 $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=30$

60. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.
$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$
$=-\{x^2+(a-2)x+b-a\}e^{-x}$
$f'(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로
$x^2+(a-2)x+b-a=0$ …… ㉠
조건 (가)에서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자.
이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(a-2)^2-4(b-a)=a^2+4-4b>0$
$f(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로
$x^2+ax+b=0$ …… ㉡
이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=a^2-4b$
(i) $D_2>0$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표를 γ, $\delta(\gamma<\delta)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은
[그림 1]과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



[그림 1]

함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극대이고 $x=\gamma$, $x=\delta$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β와 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근 γ, δ의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

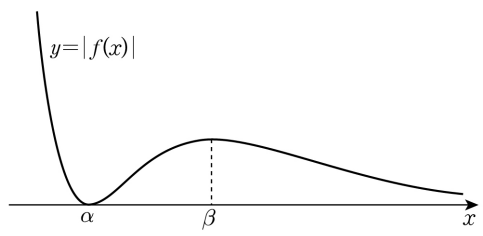
$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(2-a)+(-a)=3$

$a=-\frac{1}{2}$

이때 a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $D_2=0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고, 이 접점의 x좌표는 α이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

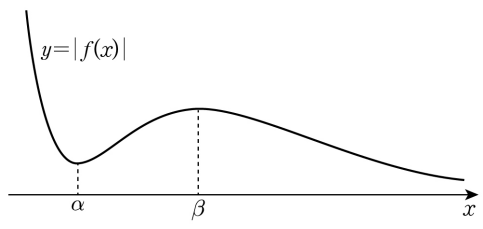
$\alpha+\beta=2-a=3,\ a=-1$

$D_2=(-1)^2-4b=0,\ b=\frac{1}{4}$

이때 b는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $D_2<0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a=3,\ a=-1$

$D_1=(-1)^2+4-4b>0,\ b<\frac{5}{4}$

$D_2=(-1)^2-4b<0,\ b>\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}<b<\frac{5}{4}$이고 b는 정수이므로 $b=1$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 값이 $a=-1$, $b=1$이므로

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

따라서 $f(10)=(10^2-10+1)e^{-10}=91e^{-10}$이므로

$p=91$

61.

함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $|x|<1$이면 $\lim x^n=0$이므로 $f(x)=-1$

(ii) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^n=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$

(iii) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=-1$이고 $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$

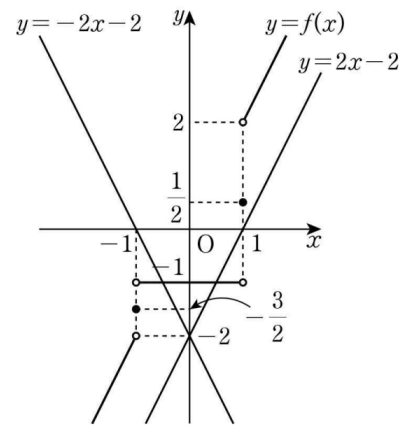
이므로 $f(x)=-\frac{3}{2}$

(iv) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,-2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<t\le 0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le 1$ 또는 $t=2$

또는 $t\ge 4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$

이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m\times a_m=7\times 4=28$

62.

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\ne 1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$\begin{cases}x=1\text{일 때, } f(1)=0\\ x\ne 1\text{일 때, } f(x)\ne 0\end{cases}$ ……㉠

한편,

$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\ne 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$

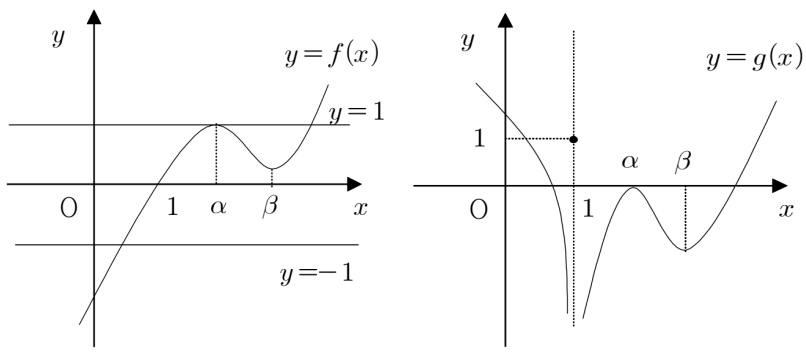
이므로

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}(f(x)\ne 0)$

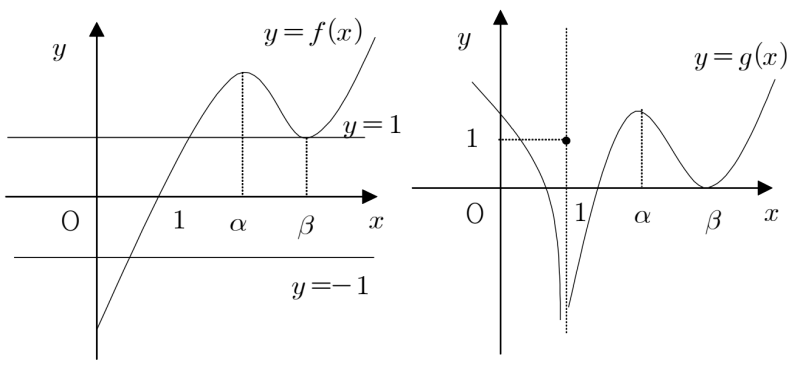
이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$f'(2)=0$ ……㉡
한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식 $g(x)=0$은
$\ln|f(x)|=0$
$|f(x)|=1$
$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$
이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을
갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는
극값을 가져야 한다.
한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(1<\alpha<\beta)$
로 놓을 수 있다.
이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.
이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.
(i)



(ii)



이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고 $\alpha=2$
이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로
$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)(k$는 상수)
즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$
이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로
$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$
$1-k=-2$
$k=3$
이때,
$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$
이므로
$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2$
$=\frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\}=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$
이때, $f'(x)=0$에서
$x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$
그러므로 $\beta=\frac{8}{3}$
따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은
$\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|$
$=\ln\frac{25}{27}$

63. [정답] 50

[해설]
직각삼각형 AHP에서 $\angle APH=\theta$이므로
$\angle HAP=\frac{\pi}{2}-\theta$
한편, 삼각형 OPA는
$OP=OA=1$
인 이등변삼각형이므로
$\angle AOP=\pi-2\times\angle HAP$
$=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=2\theta$
그러므로
$\overline{AH}=1-\overline{OH}=1-OP\cos2\theta=1-\cos2\theta$……㉠
또,
$\angle HAQ=\frac{1}{2}\angle HAP=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$
이므로
$\overline{HQ}=\overline{AH}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$
$=(1-\cos2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$……㉡
㉠과 ㉡에서
$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HQ}$
$=\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$
그러므로
$\lim_{\theta\to0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}$
$=\frac{1}{2}\times16\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{(1+\cos2\theta)^2}$
$\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}\times16\times1^2\times\frac{1}{4}\times1=2$……㉢
한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle H'OP=\theta$이므로
$\overline{AP}=2\overline{PH'}$
$=2\times\overline{OP}\times\sin\theta$
$=2\sin\theta$
삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로
$\overline{AO}:\overline{AP}=\overline{OR}:\overline{RP}$
$1:2\sin\theta=OR:1-OR$
$2\sin\theta\times\overline{OR}=1-\overline{OR}$
$\overline{OR}=\frac{1}{1+2\sin\theta}$……㉣
또,
$\overline{OS}=\overline{OA}\tan(\angle SAO)=1\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$
$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ …-(a)
㉣과 ㉤에서
$g(\theta)=\triangle OSP-\triangle OSR$
$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OP}\times\sin(\angle POS)$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OR}\times\sin(\angle POS)$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\sin(\angle POS)\times(\overline{OP}-\overline{OR})$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1\cdots\cdots㉥$$

따라서, ㉢과 ㉥을 이용하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$100k=100\times\frac{1}{2}=50$$

64.

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)$$

$$=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}$$

$$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x^2-(a+2)x+a=0\cdots\cdots$ ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$

또, ㉠의 서로 다른 두 근은

$$x=\frac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}\cdots\cdots㉡$$

이때, $a>0$이므로

$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

㉡의 두 근을 α, $\beta(0<\alpha<\beta)$라 하면

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

이때,

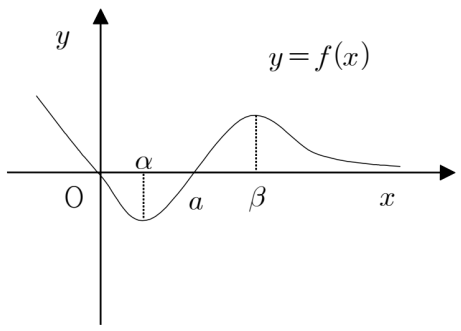
$f(0)=0$, $f(a)=0$

이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은

다음과 같다.



또,

$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}-e^{-x}\{2x-(a+2)\}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0\cdots\cdots$㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이다

한편, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이면 $g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$이므로

$g(a)+\lim_{t\to5}g(t)$의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5$ ……㉢

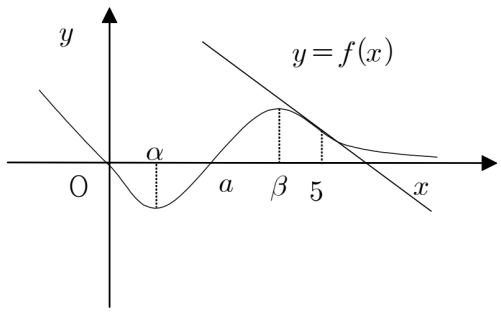
이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim_{t\to5}g(t)=3$, $g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로

대입하면

$5^2-(a+4)\times5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$$a=\frac{7}{3}\cdots\cdots㉣$$

한편,

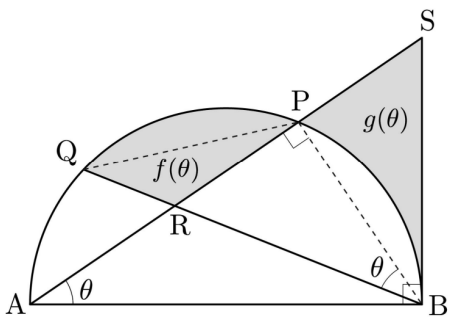
$$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극

꿈을 현실로! 희망 부산교육

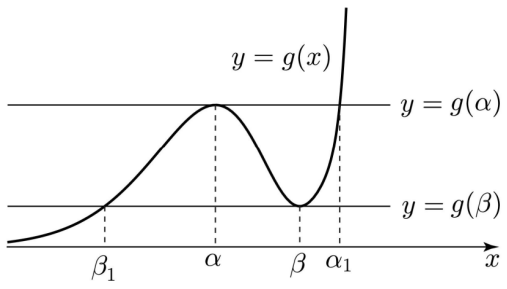
값을 갖는 x의 값이다.
㉠에 ㉢을 대입하면
$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$
$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$
따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{13}{3}$이므로 $p+q=3+13=16$

65.



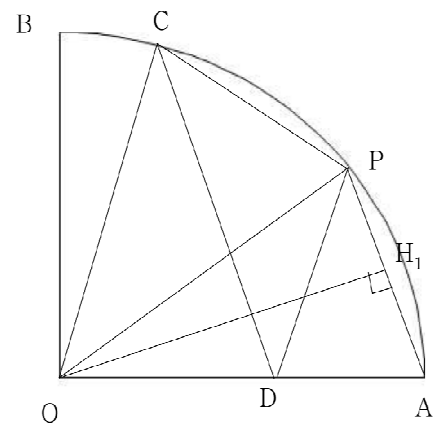
호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여
$\angle PAB=\angle QBP=\theta$
$\angle ABS=\angle APB=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle SBP=\theta$
두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.
선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.
그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.
$\overline{PB}=\overline{PQ}=2\sin\theta$
$f(\theta)+g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PQ}\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$
$=2\sin^2\theta\sin2\theta$
$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$
$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$
$=2\times1^2\times2=4$

66.
$f(x)=ax^2+bx+c(a,\ b,\ c$는 상수)라 하면
$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$
$=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$
함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를
만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



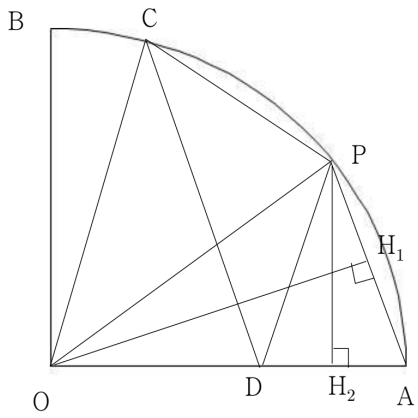
함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면
$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$
함수 $h(k)$는 $k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서
$\lim_{k\to t-}h(k)=\lim_{k\to t+}h(k)=h(t)$
그러므로 함수 $h(k)$는
$k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.
조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속 또는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.
(i) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우 $\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$ $\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$이므로 $\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서
$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$ 그러므로 $\alpha=0$
함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로
$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq0$
조건 (나)에 의하여 $\beta=1,\ g(\beta)=3e$
$g'(0)=0,\ g'(1)=0$이므로 $g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$
$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$
$g(1)=3e$이므로 $a=3$
최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우 $\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$
$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$
$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로 $\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서
$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$
그러므로 $\beta=0$
함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로
$\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq0$
조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1,\ g(\alpha)=3e$
$g'(0)=0,\ g'(-1)=0$이므로 $g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$
$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$
$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$
$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$
따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times3e^4=129$

67.
$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서 $\angle COP=\angle POA=\theta$
또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의
발을 H_1이라 하면 $\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$이므로
$\overline{AP}=2\overline{AH_1}=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉠



한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면
$\angle APD=2\angle APH_2$
$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$
$=\theta$

꿈을 현실로!
희망 부산교육



또한 $\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$

$=\pi-2\theta$ ……㉡

㉠과 ㉡으로부터

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$\overline{DA}=2\overline{AP}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\times2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음이고 $\overline{OA}=1$, $\overline{DA}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$g(\theta)=\triangle DAE=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle OAP=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$

$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$

따라서,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$

$=\frac{1}{2}$

68.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점을 $(s, f(s))$라 하자.
t가 정해져 있다면 점 $(t, 0)$에서 $(s, f(s))$사이의 거리가 최소일 때, $(t, 0)$과 $(s, f(s))$를 연결한 직선은 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서의 접선과 수직이다.

따라서 $\frac{-f(s)}{t-s}=-\frac{1}{f'(s)}$이고, $t=s+f(s)f'(s)$……㉠

이때, $g(t)=e^s+s$, $h(g(t))=t$이므로,
$h(1)$을 찾기 위해 $g(t)=1$이 되는 s를 찾으면 $s=0$이고,
㉠에서 $s=0$일 때, $t=2$이다.

한편, $g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$……㉡

㉠을 미분하면 $1=\{1+f'(s)f'(s)+f(s)f''(s)\}\frac{ds}{dt}$……㉢

$s=0$을 대입하면 $f'(0)=2$, $f''(0)=1$이므로 ㉢에 대입하면

$1=6\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{6}$

㉡에 대입하면 $g'(2)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}=\frac{1}{g'(2)}=3$

[다른 풀이]

점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두 점 $(t, 0)$과 $(x, f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x, f(x))$에서의 $y=f(x)$에서의 접선은 서로 수직이다.

이때 $x=s$이므로

$\frac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1$, $t=s+f(s)\times f'(s)$……㉠

$h(1)=a$라 하면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\frac{1}{g'(a)}$이다.

$t=a$일 때 $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서

$e^b+b=1$, $b=0$이다.

㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$이다.

㉠의 양변을 s로 미분하면

$\frac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$

이므로

$t=2$, $s=0$일 때 $\frac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$의 양변을 s로 미분하면

$g'(t)\times\frac{dt}{ds}=f'(s)$이므로 $g'(2)\times6=f'(0)$,

$g'(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$

69.

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$ 이므로

$\angle OST=2\theta$, $\angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA 의 넓이)
+ (삼각형 OTR 의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$

$=\theta+\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)
− (삼각형 OST의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$

$=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\sin3\theta}$

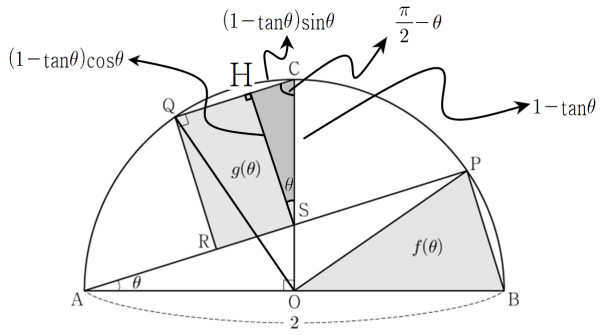
$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$ 이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

70.



$\angle POB=2\theta$이므로 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$, 삼각형 $\overline{PB}=2\sin\theta$

삼각형 AOS에서 $\overline{OS}=\tan\theta$ 그러므로 $\overline{CS}=1-\tan\theta$

점 S에서 선분 CQ에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\angle ASC=\frac{\pi}{2}+\theta$

삼각형 OBP와 삼각형 OCQ는 합동이므로

$\angle OPB=\angle OCQ=\frac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 SCH에서 $\overline{CH}=(1-\tan\theta)\times\sin\theta$, $\overline{SH}=\overline{QR}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{QH}=\overline{RS}=\overline{CQ}-\overline{CH}=2\sin\theta-\sin\theta(1-\tan\theta)=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta$

사각형 CQRS은 사다리꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{CQ}+\overline{RS})\times\overline{QR}=\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\sin\theta\tan\theta+2\sin\theta)\times(\cos\theta-\sin\theta)$

$g(\theta)=\frac{\sin\theta(3+\tan\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{2}$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta(3+\tan\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\cos\theta-(3+\tan\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\cos\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-\sin\theta+\tan\theta\sin\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta+\tan\theta\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}(2+\tan\theta)=2$$

71.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f(3)=27a+9b+3c+d=\frac{1}{2}$ … ㉠

$f'(3)=27a+6b+c=0$ … ㉡

조건(가)에서 $h(0)=g(f(0))=g(d)=e^{\sin\pi d}-1=0$

$e^{\sin\pi d}=1$, $\sin\pi d=0$ 따라서, d는 정수이다.

또한 $g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi\cos\pi x$, $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)=g'(d)\times c=e^{\sin\pi d}\times\pi\cos\pi d\times c$

$=\pi\cos\pi d\times c=0$

그런데 $\cos\pi d\neq 0$이므로 $c=0$

따라서 ㉠, ㉡에서 $27a+9b+d=\frac{1}{2}$ … ㉢, $9a+2b=0$ … ㉣이고

$a>0$이므로 $b<0$이고 ㉠−㉡에서 $3b+d=\frac{1}{2}$이므로 $d>0$

즉, d는 자연수이다. 따라서 $f'(0)=c=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 $f(0)=d$, $x=3$에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$이다. 즉, $0<x<3$에서 $f(3)<f(x)<f(0)$이므로 $\frac{1}{2}<f(x)<d$

그런데 조건 (ㄴ)에 의하여 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=g(f(x))=e^{\sin f(x)}-1=1$

즉, $e^{\sin\pi f(x)}=2$, $\sin\pi f(x)=\ln 2$가 서로 다른 실근의 개수가 7이고, 함수 $y=\sin\pi t$의 주기는 2이므로 $d=8$

㉢, ㉣에서 $a=\frac{5}{9}$, $b=-\frac{5}{2}$이므로 $f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$

따라서 $f(2)=\frac{40}{9}-10+8=\frac{22}{9}$

즉, $p=9$, $q=22$이므로 $p+q=31$

72.

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로

$\angle CBD=\angle DCB=\alpha$이고 $\angle CDA=2\alpha$

삼각형 ADC에서 $\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\frac{28}{49}$이고

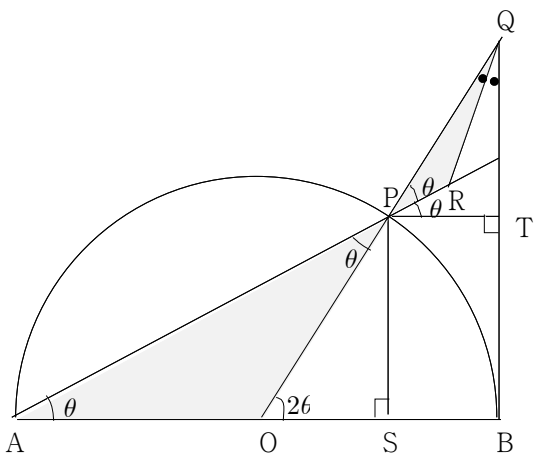
$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan 2\alpha}=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

73.



$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}$

또한, $\angle APO=\angle QPR=\theta$이므로

점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\angle QPT=2\theta$

즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때,

$\overline{OS}=\cos 2\theta$, $\overline{PS}=\sin 2\theta$, $\overline{BQ}=\tan 2\theta$

이므로

$\overline{PT}=1-\cos 2\theta$

$\overline{QT}=\tan 2\theta-\sin 2\theta=\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)$

이고

$\overline{PQ}=\frac{1}{\cos 2\theta}-1=\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)\times\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times r\times\left\{\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}+1-\cos 2\theta+\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)\right\}$

에서

$r=\frac{(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

이다.

그러므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\times\frac{(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{1+\sin2\theta+\cos2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos2\theta)^2\sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta\times\sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times16\times\frac{1}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}\right\}$$

$$=1^4\times16\times\frac{1}{8}=2$$

74.

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x=\dfrac{2t\ln x-2x^2}{x}$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$2t\ln k-2k^2=0$

$t\ln k=k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ ·····㉠

그런데 $g(\alpha)=e^2$ 이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha=e^4,\ \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+t\times\dfrac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$\ln g(\alpha)+\alpha\times\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$

$2+\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2\times g'(\alpha)$

$\dfrac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$

$g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9,\ q=8$ 이므로

$p+q=17$

75.

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$P(\alpha,\alpha+t),\ Q(\beta,\beta+t)$ $(\alpha<\beta)$

로 놓으면

$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$

이때, α, β는 방정식

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

의 서로 다른 두 실근이므로

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$

$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$

$e^x=k(k>0)$로 놓으면

$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

따라서,

$$k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$e^\alpha=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2},\ e^\beta=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

즉

$$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2},\ \beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$\beta-\alpha=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}=\ln\frac{(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})^2}{4(1-e^{-2t})}$$

$$=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

따라서

$$g(t)=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

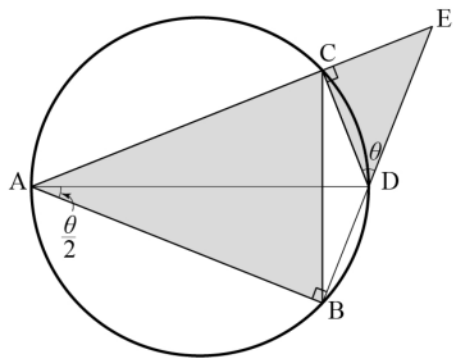
즉, $f(t)=\sqrt{2}g(t)$에서

$f'(\ln2)=\sqrt{2}g'(\ln2)=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

이므로 $p=3,\ q=8$

따라서 $p+q=11$

76.



$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다.

$\angle ECD=\dfrac{\pi}{2},\ \angle DAB=\angle CAD=\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{AB}=10\cos\dfrac{\theta}{2},\ \overline{CD}=\overline{BD}=10\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\angle AEB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle CDE=\theta$

$\overline{CE}=10\sin\dfrac{\theta}{2}\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^2\dfrac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times50\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times \frac{\tan\theta}{\theta} \times \frac{\theta}{\sin\theta} \right\} = \frac{1}{4}$$

77.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$h(0) = \lim_{x \to 0-} h(x) = \lim_{x \to 0+} h(x)$에서

$h(0)=0$이고 $f(g^{-1}(0))=0$

$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0$에서

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉠

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$h(1) = \lim_{x \to 1-} h(x) = \lim_{x \to 1+} h(x)$에서

$h(1)=0$이고 $f(g^{-1}(1))=0$

$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(g^{-1}(1))=0$은 성립한다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$에서

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(g^{-1}(x))}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x} = 1$$

$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)}$이므로

$f'(\alpha) \times \frac{1}{g'(\alpha)} = 1$

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$

$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b$ …… ㉡

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 1-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$에서

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}$$

$\lim_{x \to 1-} \frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1} = \lim_{t \to 0-} \frac{-\sin\pi t}{\pi t} = -1$$

$\lim_{x \to 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x-1} = -1$에서

$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$

$g^{-1}(1)=0$이고 $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(0)}$이므로

$f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = -1$

$f'(0)=-1$이므로

$g'(0)=b=1$

삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고

$g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.

$g(\alpha)=0$, $g(0)=1$이므로 $\alpha<0$

㉠에 의하여 $\alpha=-1$

㉡에 의하여 $a=1$

$g(x)=x^3+x^2+x+1$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

78.

최대, 최솟값을 모두 가지므로 $f(x)=px^2+qx+r$라 할 때, $p<0$

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+2\}e^{f(x)}+f'(x)e^{f(x)}$

$=\{f'(x)f(x)+3f'(x)\}e^{f(x)}$

열린구간에서 최대, 최솟값은 극대, 극솟값이므로

$g(a)=0$, $g'(b)=0$, $g'(b+6)=0$에서

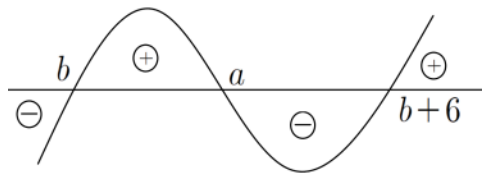
$f'(x)f(x)+3f'(x)=0$의 세 실근이 a, b, $b+6$이다.

$f'(x)f(x)+3f'(x)=(2px+b)(px^2+qx+r+3)=2p^2x^2+\cdots$

이므로 $2p^2(x-a)(x-b)(x-b-6)$

$x=a$에서 극대, $x=b$, $b+6$에서 극소이므로

$2p^2(x-a)(x-b)(x-b-6)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$y=f(x)+3$의 꼭짓점에서 $f'(x)=0$이고, $f(x)$는 이차함수이므로

$f'(x)=2p(x-a)$, $f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$임을 알 수 있다.

$x=a$가 $y=f(x)+6$의 대칭축이므로 $b+b+6=2a$, $a=b+3$,

$a-b=3$을 만족한다.

$f'(x)=2p(x-b-3)$, $f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$

(가) 조건에서 $f(a)=6$이므로 $f(a)=p(a-b)(a-b-6)-3$

$f(a)=p\times3\times(3-6)-3=-9p-3=6$, $p=-1$

$f(x)=0$의 두 근을 α, β

$f(x)+3=0$의 두 근의 차가 6이므로

$f(x)+3$의 축을 $x=0$이 되도록 평행이동해도 두 근의 차에는 변화가 없으므로 $f(x)+3=-(x-3)(x+3)$으로 간주할 때,

$f(x)=-(x^2-9)-3=0$, $x^2=6$의 두 근 α, β는 $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$

$|\beta-\alpha|=2\sqrt{6}$, $\therefore\ (\alpha-\beta)^2=24$

79. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$\overline{BE}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{BC}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

그러므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle CBA)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\sin\theta$

$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle CDM=\theta$, $\angle BAE=\angle DFE$

이다. 이때 $\angle BAE=\angle FAC$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다. 점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$ 이고

$\overline{BD}=\overline{CD}=1$, $\overline{DM}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{DF}=\overline{FM}-\overline{DM}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle FDC=\pi-\angle CDM=\pi-\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DF}\times\sin(\angle FDC)$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{\sin\theta}{4}(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)}{\theta^2 \times \frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)(\sqrt{5-4\cos\theta}+1)}{4\theta^2}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

80. $f(x) = -\dfrac{ax^3+bx}{x^2+1}$ 에서

$f'(x) = -\dfrac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$f'(x) = -\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1 \neq 0$이므로 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$이고 $f'(0) = -b < 0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이다.

$h(x) = g(f(x)) = f(f(x)) - x$이므로

$h(0) = f(f(0)) - 0 = f(0) = 0$이다.

조건 (가)에서 $g(2) = f(2) - f^{-1}(2) = h(0) = 0$이므로

$f(2) = f^{-1}(2) = t$ (t는 상수)라 하면 $f(t) = 2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$이므로

$f(-2) = -f(2) = -t$이다.

즉 두 점 $(t, 2)$, $(-2, -t)$는 함수 $y = f(x)$의 그래프 위에 있다.

$t \neq -2$일 때, 두 점 $(t, 2)$, $(-2, -t)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2-(-t)}{t-(-2)} = 1$이므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c) = 1$인 상수 c가 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이므로 모순이다. 즉 $t = -2$

$f(2) = -2$에서 $-\dfrac{8a+2b}{5} = -2$

그러므로 $4a+b = 5$ …… ㉡

$f^{-1}(2) = -2$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2) = f'(2) - (f^{-1})'(2) = f'(2) - \dfrac{1}{f'(-2)}$

㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$이므로 $f'(-2) = f'(2)$이다.

즉 $g'(2) = f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)}$

$h(x) = f(f(x)) - x$에서 $h'(x) = f'(f(x))f'(x) - 1$이므로

$h'(2) = f'(f(2))f'(2) - 1 = f'(-2)f'(2) - 1 = \{f'(2)\}^2 - 1$

조건 (나)에서 $g'(2) = -5h'(2)$이므로

$f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)} = -5\{f'(2)\}^2 + 5$

$5\{f'(2)\}^3 + \{f'(2)\}^2 - 5f'(2) - 1 = 0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\} = 0$

$f'(x) < 0$이므로 $f'(2) = -\dfrac{1}{5}$ 또는 $f'(2) = -1$이다.

㉠에서 $f'(2) = -\dfrac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2} = -\dfrac{28a-3b}{25}$

(i) $f'(2) = -\dfrac{1}{5}$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25} = -\dfrac{1}{5}$이므로

$28a-3b = 5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 3$이다.

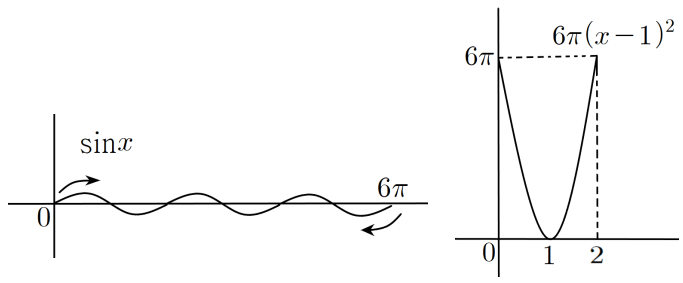
(ii) $f'(2) = -1$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25} = -1$이므로

$28a-3b = 25$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a = 1$, $b = 1$이므로 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a) = 4 \times \left(3 - \dfrac{1}{2}\right) = 10$

81. $g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x) = f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$



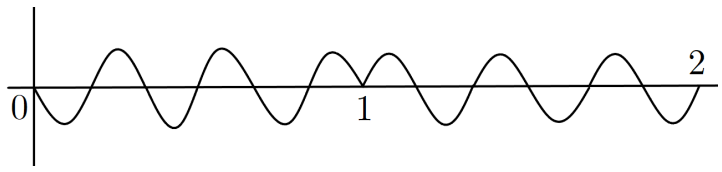
위의 두 그래프는 $y = \sin x$와 $y = 6\pi(x-1)^2$의 그래프이다.

위의 두 그래프를 이용해서 합성함수의 $y = \sin 6\pi(x-1)^2$의 그래프를 그려보자.

① $6\pi(x-1)^2$은 x가 0에서 1까지 증가할 때, 6π에서 0까지 감소한다. 그러므로 $\sin 6\pi(x-1)^2$의 그래프는 x가 0에서 1까지 증가할 때 $\sin x$의 그래프에서 6π에서 0까지 역으로 진행하는 형태를 갖게 된다. 그러므로 구간$(0, 1)$에서 역으로 진행하는 사인곡선이 3번 반복된다.

② x가 1에서 2까지 증가할 때, $6\pi(x-1)^2$은 0에서 6π까지 증가한다. 그러므로 $\sin 6\pi(x-1)^2$의 그래프는 x가 1에서 2까지 증가할 때 $\sin x$의 그래프에서 0에서 6π까지 진행하는 형태를 갖게 된다. 그러므로 구간$(1, 2)$에서 사인곡선이 3번 반복된다.

두 함수의 합성함수 $y = \sin 6\pi(x-1)^2$의 그래프는 아래 그림과 같다. $\sin 6\pi(x-1)^2$

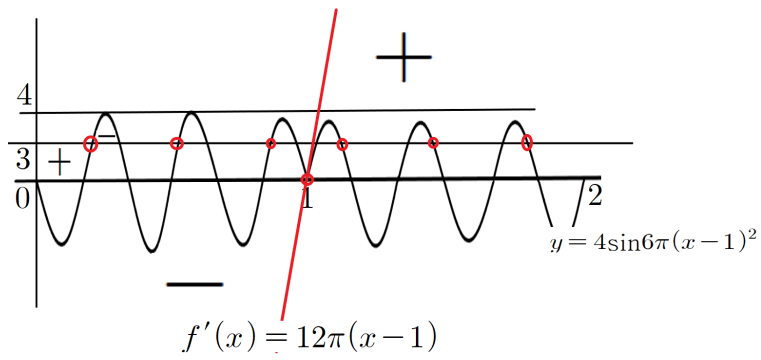


③ $3 - 4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호는

$y = 3$과 $y = 4\sin 6\pi(x-1)^2$의 위치관계를 통해 알 수 있다.

$3 > 4\sin 6\pi(x-1)^2$일 때, $3 - 4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호는 +

④ $y = f'(x)$와 $3 - 4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호를 그래프로 나타내면 아래 그림과 같다.



$3 - 4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호는 $y = 4\sin 6\pi(x-1)^2$과 $y = 3$이 만나는 점에서 부호가 바뀐다.

$y = 12\pi(x-1)$은 $x = 1$에서 부호가 바뀐다.

$x < 1$에서 $4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호가 +에서 −로 바뀔 때,

$f'(x)$가 곱해져서 $g'(x) = f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$의 부호는 − 에서 +로 바뀐다.

$x > 1$에서 $4\sin 6\pi(x-1)^2$의 부호가 −에서 +로 바뀔 때, $f'(x)$가 곱해져서 $g'(x)$의 부호도 −에서 +로 바뀐다.

그러므로 $y = g(x)$는 위의 그림과 같이 7개의 점에서 극솟값을 갖는다.

82.

ⅰ) $g(\theta)$ 구하기

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\angle ARB=\pi-3\theta$이므로 삼각형 ABR에서 사인법칙에 따라

$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{AR}}{\sin2\theta}$, $\overline{AR}=\frac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}$

삼각형 ABR에서 선분$\overline{UT}$와 $\overline{AB}$가 평행하므로 닮음을 이용하자.

정삼각형UTS의 한 변 길이를 a라 할 때,

삼각형 ABR의 높이는 $\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$, 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{UT}:\overline{AB}=\triangle ABR$의높이$-\triangle UTS$의높이$:\triangle ABR$의높이

수식으로 정리하면 아래와 같다.

$a:2=\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}-\frac{\sqrt{3}}{2}a:\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\frac{4\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}-\sqrt{3}a=\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}a$

$\left(\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}+\sqrt{3}\right)a=\frac{4\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$, $a=\frac{4\sin2\theta\sin\theta}{2\sin2\theta\sin\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}$

ii) $f(\theta)$구하기

활꼴AP의 넓이를 S_1, 활꼴 BQ의 넓이를 S_2, 삼각형 ABR의 넓이를 S_3, 반원의 넓이를 S_4라 할 때,

$S_1+S_2+S_3-S_4=S$라 할 때, S는 선분QR, PR와 호PQ로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 $f(\theta)=S_1-S=S_4-S_2-S_3$

$S_1=\frac{1}{2}(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times\sin(\pi-2\theta)$

$S_2=\frac{1}{2}(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times\sin(\pi-4\theta)$

$S_3=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$((i)의 과정을 통해 구해진 결과)

$S_4=\frac{\pi}{2}$

$f(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-4\theta}{2}+\frac{\sin4\theta}{2}-\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$

$=\frac{4\theta+\sin4\theta}{2}-\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$

$=\frac{4\theta\sin3\theta+\sin4\theta\sin3\theta-4\sin2\theta\sin\theta}{2\sin3\theta}$

iii) 결과

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{f(\theta)}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}$이라 할 때,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta\sin3\theta}{4\theta\sin3\theta+\sin4\theta\sin3\theta-4\sin2\theta\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2}{\frac{4\theta\sin3\theta}{\theta\sin3\theta}+\frac{\sin4\theta\sin3\theta}{\theta\sin3\theta}-\frac{4\sin2\theta\sin\theta}{\theta\sin3\theta}}$

$=\frac{2}{4+4-\frac{8}{3}}=\frac{2}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{8}$

$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\frac{(4\sin2\theta\sin\theta)^2}{\theta^2(2\sin2\theta\sin\theta+\sqrt{3}\sin3\theta)^2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\left(\frac{2\theta\sin2\theta\sin\theta}{4\sin2\theta\sin\theta}+\frac{\sqrt{3}\theta\sin3\theta}{4\sin2\theta\sin\theta}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{\left(0+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{64}{27}=\frac{16\sqrt{3}}{27}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{f(\theta)}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{3}{8}\times\frac{16\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ p+q=11$

83.

두 점 P와 Q의 좌표는 P$\left(k,e^{\frac{k}{2}}\right)$, Q$\left(k,e^{\frac{k}{2}+3}\right)$이고, 점 R과 점 Q의 y좌표는 같으므로 $e^{\frac{k}{2}+3t}=e^{\frac{x}{2}}$에서 점 R의 x좌표는 $k+6t$이다.

$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}$, $\overline{QR}=(k+6t)-k$이므로

$\overline{PQ}=\overline{QR}$에서

$e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=6t$

$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$\frac{k}{2}=\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

을 만족하는 실수 k의 값 $f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}=2\lim_{t\to0+}\ln\left(\frac{3t}{e^{3t}-1}\times2\right)$

따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=2\ln2=\ln4$

84.

$f(x+3)=f(x)$이므로

$f(x)=\begin{cases}-2x+3+6m & (3m\le x<3m+1)\\ 1 & (3m+1\le x<3m+2)\\ 2x-3-6m & (3m+2\le x<3m+3)\end{cases}$

이다.

(i) $3m\le x<3m+1$일 때,

$\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\{-2(x+h)+3+6m\}-(-2x+3+6m)}{h}=-2$

(ii) $3m+1\le x<3m+2$일 때,

$\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{1-1}{h}=0$

(iii) $3m+2\le x<3m+3$일 때,

$\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\{2(x+h)-3-6m\}-(2x-3-6m)}{h}=2$

(i), (ii), (iii)에 의해

$\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=\begin{cases}2 & (3m\le x<3m+1)\\ 0 & (3m+1\le x<3m+2)\\ 2 & (3m+2\le x<3m+3)\end{cases}$

그러므로 $\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$는

$x=3m+1$, $3m+2$ (m은 정수)에서 불연속이다.

따라서 $g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$은

$2^x=3m+1$, $3m+2$ (m은 정수)인 x에서 불연속이고, $-5<x<5$에서 $2^{-5}<2^x<2^5$이므로 $2^x=1$, 2, 4, 5, 7, …, 31이고

$a_1=\log_2 1$, $a_2=\log_2 2$, $a_3=\log_2 4$, …, $a_{21}=\log_2 31$이므로 $n=21$이다.

$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$

$=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\times\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$

$=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\right|\times\lim_{h\to0+}\left|\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$

$=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\right|\times(2^x\ln2)$

$\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\right|=2$이므로

$g(x)=\begin{cases}2\cdot2^x\ln2 & (3m\le2^x<3m+1)\\ 0 & (3m+1\le2^x<3m+2)\\ 2\cdot2^x\ln2 & (3m+2\le2^x<3m+3)\end{cases}$

이다. 자연수 k에 대하여

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$x=a_{2k-1}$ 일 때 $2^x=3m+1$ 이므로 $g(a_{2k-1})=0$

$x=a_{2k}$ 일 때 $2^x=3m+2$ 이므로

$g(a_{2k})=2\cdot 2^{a_{2k}}\ln 2=2(3m+2)\ln 2$ 이다.

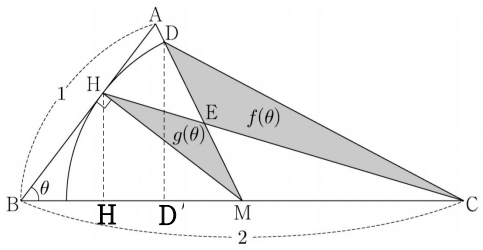
(단, $m=0, 1, 2, \cdots, 9$)

그러므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=\sum_{m=0}^{9}2(3m+2)=2(3\times 45+20)=310$ 이고

$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+310=331$

85.



점 H, D 에서 선분 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H′, D′라 하자.

삼각형 CEM 의 넓이를 S라 하면 삼각형 CDM 의 넓이는 $f(\theta)+S$ 이고, 삼각형 CHM 의 넓이는 $g(\theta)+S$이다.

따라서 $f(\theta)-g(\theta)$는 삼각형 CDM 의 넓이에서 삼각형 CHM 넓이를 뺀 값과 같다.

$\overline{BM}=1$ 이므로 $\overline{HM}=\sin\theta$ 이고

$\angle BMH=\frac{\pi}{2}-\theta$ 이므로

$\overline{HH'}=\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\cos\theta$ 이다.

삼각형 BMA 는 $\overline{AB}=\overline{BM}$ 인 이등변삼각형이고 $\angle DMD'=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$,

$\overline{DM}=\sin\theta$ 이므로

$\overline{DD'}=\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$ 이다.

$f(\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{DD'}-\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{HH'}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$ 이므로

$f(\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$=\frac{\sin\theta\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

따라서

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^3\times 2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\times 4}\right\}$

$=1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{16}$

이므로 $a=\frac{3}{16}$ 이고 $80a=15$

86.

점 $(2, 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$g(2)=2$, $g''(2)=0$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$

$h''(2)=f''(g(2))\{g'(2)\}^2+f'(g(2))g''(2)$

$=f''(2)\{g'(2)\}^2$

$\frac{h''(2)}{f''(2)}=4$이므로 $\{g'(2)\}^2=4$

$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(2)=2$

따라서 $h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)=8$

87.

$f'(x)=\frac{8x(x^2+3)-4x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$

양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$f(x)=x$에서 $x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$이므로

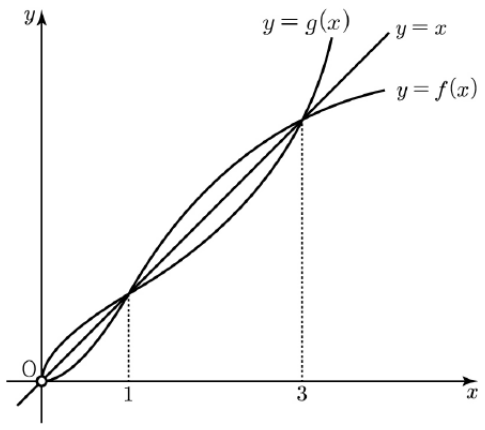
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이다.

$f''(x)=\frac{24(x^2+3)^2-24x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$

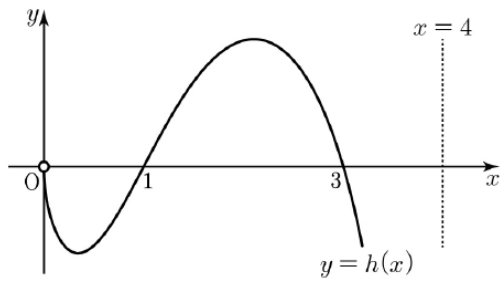
$=\frac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$

곡선 $y=f(x)$는 열린 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하고, 열린 구간 $(1, \infty)$에서 위로 볼록하며, 변곡점은 $(1, 1)$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서만 $h(x)\geq 0$이고, 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로

$f(1)=g(1)=1$

$h(1)=0$ (참)

ㄴ. 두 양수 a, b에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대가 되려면 닫힌 구간 $[a, b]$에서 $h(x)\geq 0$이고 $b-a$의 값이 최대이어야 하므로

$a=1$, $b=3$

그러므로 $b-a=2$ (참)

ㄷ. $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이고

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{1}{f'(g(x))}$

$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$에서만 변곡점을 가지므로

$f''(1)=0$

$f(1)=g(1)=1$이므로

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$g''(1) = -\dfrac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2} = -\dfrac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2} = 0$

$h''(1) = f''(1) - g''(1) = 0$

(i) $0 < x < 1$인 모든 실수 x에 대하여

$f''(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $0 < g(x) < 1$이므로

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2} < 0$$

열린 구간 $(0, 1)$에서

$$h''(x) = f''(x) - g''(x) > 0$$

(ii) $1 < x < 4$인 모든 실수 x에 대하여

$g'(x) > 0$, $g(x) > 1$이고 $x > 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x) < 0$이므로

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2} > 0$$

열린 구간 $(1, 4)$에서

$$h''(x) = f''(x) - g''(x) < 0$$

(i), (ii)에 의하여 함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	⋯	1	⋯	4
$h''(x)$		+	0	−	
$h'(x)$		↗	$\frac{5}{6}$	↘	

함수 $h'(x)$는 $x = 1$에서 최댓값을 갖는다.

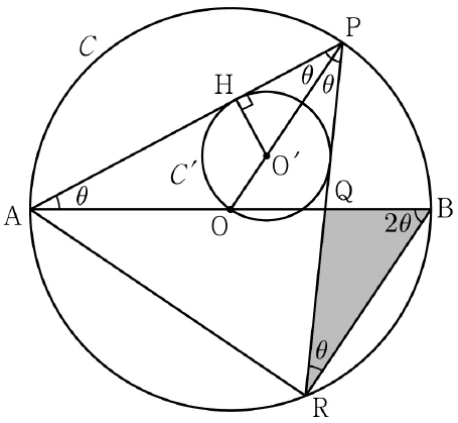
$f'(1) = \dfrac{3}{2}$이므로

$$h'(1) = f'(1) - \frac{1}{f'(g(1))} = f'(1) - \frac{1}{f'(1)} = \frac{5}{6}$$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

88.

원 C'의 중심을 O′, 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA = \theta$

$r(\theta) = \overline{O'O} = \overline{O'H}$이므로 $\overline{PO'} = 2 - r(\theta)$

삼각형 O′PH에서 $\angle PHO' = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta = \frac{\overline{O'H}}{\overline{PO'}} = \frac{r(\theta)}{2 - r(\theta)}$$

$$r(\theta) = \frac{2\sin\theta}{1 + \sin\theta}$$

$\angle PRB$는 호 BP의 원주각이므로 $\angle PRB = \theta$

$\angle RBA$는 호 AR의 원주각이므로 $\angle RBA = 2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형 ARB는 직각삼각형이고 $\overline{RB} = 4\cos 2\theta$이다.

삼각형 QRB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{RB}}{\sin(\angle BQR)} = \frac{\overline{RQ}}{\sin(\angle RBQ)}$$

$$\frac{4\cos 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{RQ}}{\sin 2\theta}, \quad \overline{RQ} = \frac{4\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{RQ} \times \overline{RB} \times \sin\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{8\sin\theta\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2}{\sin 3\theta}}{\dfrac{2\sin\theta}{1 + \sin\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{4\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2(1 + \sin\theta)}{\sin 3\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{4\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \times (\cos 2\theta)^2(1 + \sin\theta) \right\}$$

$$= 4 \times \frac{2}{3} \times 1^2 \times (1 + 0) = \frac{8}{3}$$

따라서 $a = \dfrac{8}{3}$이므로 $45a = 120$

89.

$\lim_{x \to -2} \dfrac{g(x)}{x + 2} = b$이고, (분모) $\to 0$이므로

$\lim_{x \to -2} g(x) = 0$, 즉 $g(-2) = 0$

이때 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로

$f(0) = -2$이고,

$$f(0) = \ln\left(\frac{\sec 0 + \tan 0}{a}\right) = \ln\left(\frac{1 + 0}{a}\right)$$
$$= -\ln a = -2$$

로 부터 $\ln a = 2$, 즉 $a = e^2$

$\lim_{x \to -2} \dfrac{g(x)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \dfrac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = g'(-2) = b$이고, 역함수 미분법에 의해

$$b = g'(-2) = g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{a}}{\dfrac{\sec x + \tan x}{a}}$$

$$= \frac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$$
$$= \sec x$$

이므로 $b = g'(-2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{\sec 0} = 1$

따라서 $a = e^2$, $b = 1$이므로 곱 $ab = e^2$

90.

원주각의 성질에 의해

$\angle QPB = \dfrac{1}{2}\angle QOB = \theta$

$\angle PBA = \dfrac{1}{2}\angle POA = \dfrac{\theta}{2}$

이며 삼각형 OBP는 이등변 삼각형이므로

$\angle OPR = \angle OBR = \dfrac{\theta}{2}$

이고 $\angle ORP = \dfrac{5}{2}\theta$이므로 삼각형 ORP에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{OR}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\left(\pi - \frac{5}{2}\theta\right)} = \frac{\overline{PR}}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$\overline{OR} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}, \quad \overline{PR} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

이다. 또한

$$\overline{RH} = \overline{PR}\sin\theta = \frac{\sin 3\theta\sin\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

$f(\theta) + g(\theta)$

= (삼각형OBP의 넓이) + (부채꼴OBQ의 넓이) − 2 × (삼각형OBR의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta$$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$$-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin 2\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\theta}{2}+\theta-\frac{\sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\mathrm{f}(\theta)+\mathrm{g}(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta+\theta-\frac{\sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}}{\frac{\sin 3\theta\sin\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\sin\frac{5}{2}\theta+\theta\sin\frac{5}{2}\theta-\sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin 3\theta\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{\sin\theta}{2\theta}\frac{\sin\frac{5}{2}\theta}{\theta}+\frac{\sin\frac{5}{2}\theta}{\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\theta}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}}$$

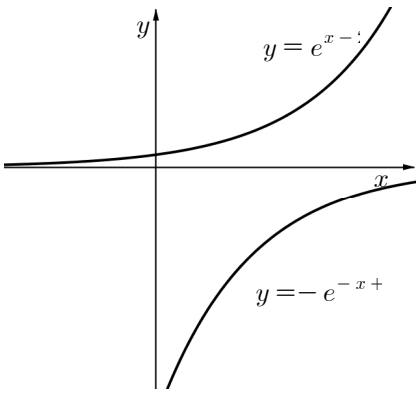
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-2\times\frac{1}{2}}{3}$$

$$=\frac{11}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=11$이므로 $p+q=23$

91.

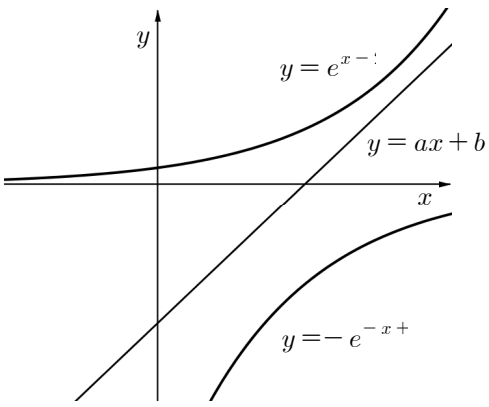
두 함수 $y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1}\le ax+b\le e^{x-2}$$

가 성립하려면 기울기가 a, y절편이 b인 직선 $y=ax+b$의 그래프가 두 함수의 그래프 사이에 있어야 하므로 $a\ge 0$이다.



이때 ab의 최댓값은 $a>0$, $b>0$인 경우, 최솟값은 $a>0$, $b<0$인 경우이다.

(1. ab의 최댓값 M :

$y=ax+b$의 y절편인 $b>0$에 대하여 기울기 a가 가장 클 때 ab가 최댓값을 가지므로 $y=e^{x-2}$에 접하는 경우이다. 따라서 $y=e^{x-2}$위의 점 (t,e^{t-2})에서 접선의 방정식은

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

이므로 $a=e^{t-2}$, $b=-te^{t-2}+e^{t-2}$로 나타낼 수 있다.

$h(t)=e^{t-2}\times(-t+1)e^{t-2}=(-t+1)e^{2t-4}$

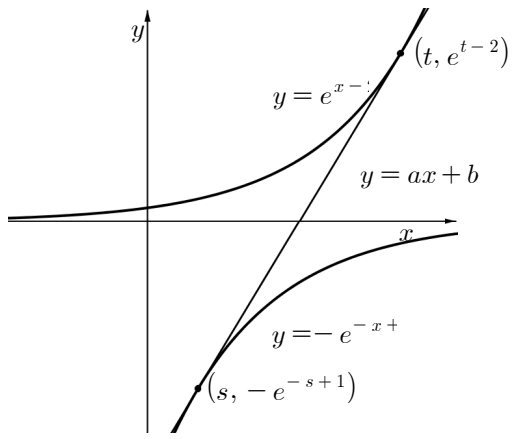
$h'(t)=-e^{2t-4}+(-t+1)\times 2e^{2t-4}$

$=(-2t+1)e^{2t-4}$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $M=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e^3}$을 갖는다.

(2. ab의 최솟값 m :

$y=ax+b$의 y절편인 $b<0$에 대하여 기울기 a가 가장 클 때 ab가 최솟값을 가지므로 그림과 같이 $y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$에 동시에 접하는 경우이다.



두 접점의 좌표를 (t,e^{t-2}), $(s,-e^{-s+1})$라 하면 접선의 방정식

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

이 서로 같으므로

$e^{t-2}=e^{-s+1}$ ……①

$-te^{t-2}+e^{t-2}=-se^{-s+1}-e^{-s+1}$ ……②

①에 의해 $t-2=-s+1$이므로 $t+s=3$

②에 의해 $-t+1=-s-1$이므로 $t=\frac{5}{2}$, $s=\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 공통접선의 방정식은

$y=e^{\frac{5}{2}-2}\left(x-\frac{5}{2}\right)+e^{\frac{5}{2}-2}=e^{\frac{1}{2}}x-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

이므로 ab의 최솟값 m은

$m=e^{\frac{1}{2}}\times\left(-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{3}{2}e$

이다. 그러므로

$$|M\times m^3|=\left|\frac{1}{2e^3}\times\left(-\frac{3}{2}e\right)^3\right|=\frac{27}{16}$$

$p=16$, $q=27$이므로 $p+q=43$

[참고]

함수의 대칭성을 이용해서 공통접선을 구할 수 있다. $f(x)=e^{x-2}$, $g(x)=-e^{-x+1}$라 하면 모든실수 x에 대하여 $f(x)+g(3-x)=0$가 성립하므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2},0\right)$에 대칭이다.

따라서 공통접선은 (t,e^{t-2})에서의 접선

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

가 $\left(\frac{3}{2},0\right)$을 지나므로 기울기를 비교하면

$$\frac{e^{t-2}-0}{t-\frac{3}{2}}=e^{t-2}$$

따라서 $t=\frac{5}{2}$일 때이다.

92.

$x\ne -1$일 때, $f'(x)=\frac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$

ㄱ. $n=3$이면 $x<-1$일 때, $f'(x)=\frac{3-6x^3}{(x^3+1)^2}>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,-1)$에서

증가한다. (참)

꿈을 현실로!
희망 부산교육

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이 성립한다.
n이 홀수일 때, $x\to -1$이면 (분모)$\to 0$이고
(분자)$\to -n$이므로 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

n이 짝수일 때, $\lim_{x\to -1} f(x)=-\frac{n}{2}$이고
$f(-1)=-2$이므로 $n=4$이다.
따라서 $n=4$일 때만 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$f'(x)=\frac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이다.

$x<0$일 때 $f(x)<0$이고, $x\geq 0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	…
$f'(x)$	+	+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{27}$	↘

$2<\sqrt[4]{27}$이므로 방정식 $f(x)=2$는 $x\geq 0$에서만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

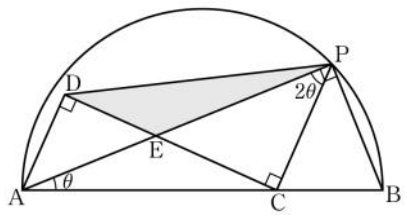
ㄷ. $f'(x)=0$에서 $x^n=\frac{1}{n-1}$ $(n\neq 1)$

(ⅰ) n이 홀수일 때
함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다.

(ⅱ) n이 짝수일 때
$n=2$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않고, $n\geq 4$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구간 $(-1,\infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

93.



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로
$\overline{EP}:\overline{EA}=\overline{EC}:\overline{ED}$에서 $\overline{EP}\times\overline{ED}=\overline{EA}\times\overline{EC}$
$\angle DEP=\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{EP}\times\overline{ED}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$
$=\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos 2\theta$
직각삼각형 APB에서 $\overline{AP}=2\cos\theta$
삼각형 ACP에서 $\angle ACP=\pi-3\theta$이므로
사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi-3\theta)}$에서
$\overline{AC}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}$
삼각형 ACE에서 $\angle ACE=\frac{\pi}{2}-3\theta$,
$\angle CEA=\frac{\pi}{2}+2\theta$이고 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{EC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{EA}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$이므로
$\overline{EC}=\frac{\overline{AC}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin 2\theta\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$
$\overline{EA}=\frac{\overline{AC}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$
$S(\theta)=\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$
$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta}\right)$
$=\frac{8}{9}$

94.

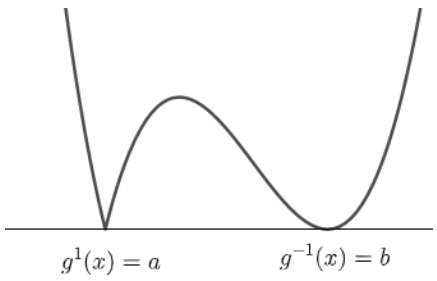
$f(1)=5$이므로 $f(x)=2x+\frac{3}{x}$이고 $f(2)=\frac{11}{2}$
(가)에서 $g'(x)=2-\frac{3}{x^2}$이고 (나)에서 $g(-2)=\frac{7}{2}$이므로
$g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$
$g(-3)=2$

95.

$|x|>1$일 때 $f(x)=\frac{(a-2)}{3}x$
$|x|<1$일 때 $f(x)=2x$
$f(1)=\frac{a}{4}$
$f(-1)=-\frac{a}{4}$
$(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}=f\left(\frac{a}{4}\right)$
(ⅰ) $\left|\frac{a}{4}\right|>1$이면
$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{a^2-2a}{12}=\frac{5}{4}$
에서
$a^2-2a-15=0$이고 조건에 맞는 a의 값은 5
(ⅱ) $\left|\frac{a}{4}\right|<1$이면
$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$에서 $a=\frac{5}{2}$
(ⅲ) $\frac{a}{4}=1$이면 즉 $a=4$이면
$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=\frac{a}{4}=1\neq\frac{5}{4}$
(ⅳ) $\frac{a}{4}=-1$ 이면 즉 $a=-4$이면
$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=-\frac{a}{4}=1\neq\frac{5}{4}$
이므로 조건에 맞지 않는다.
이상에서 모든 a의 값의 합은 $5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

96.

$g^{-1}(x)$의 치역이 모든 실수의 집합이므로 $|h(x)|$의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



$(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(1)=0$이

꿈을 현실로!
희망 부산교육

어야 한다.

$f(g^{-1}(1))=0$에서 $g^{-1}(1)=a$, $g(a)=1$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=x(x-b)^2$

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$에서 $h'(3)=f'(1)=8$

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로

$(1-b)^2+2(1-b)-8=b^2-4b-5=0$에서

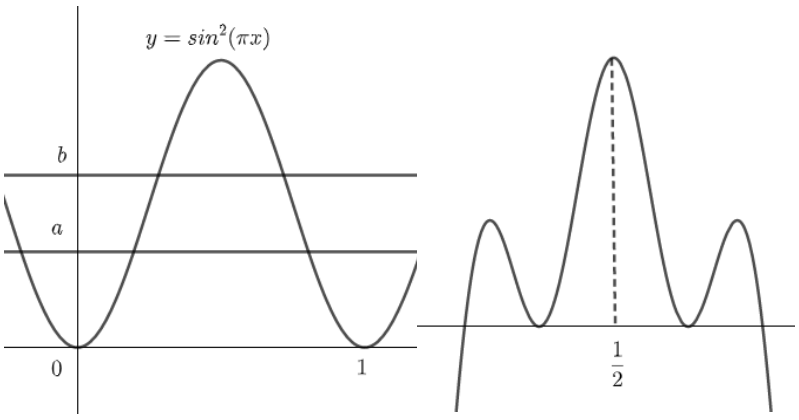
$a<b$이므로 $b=5$

$f(x)=x(x-5)^2$

$f(8)=72$

97.

$f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 a, 극솟값을 갖는 x의 값을 b라 하자. (가)가 성립하려면 $0<a<b<1$이어야 하고



$g(x)$의 그래프는 위의 오른쪽 그림과 비슷한 모양이 된다.

조건 (가), (나)를 만족하려면 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=f(a)=f(1)$이고 $y=\frac{1}{2}$와 $f(x)$는 서로 접해야 한다. 따라서

$f(x)-\frac{1}{2}=(x-a)^2(x-1)$

$g(x)$의 최솟값은 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최솟값과 같다.

$f'(x)=(x-a)(3x-a-2)$이므로

$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$ 이거나 $f\left(\frac{a+2}{3}\right)=0$이다.

$f\left(\frac{a+2}{3}\right)=\frac{4(a-1)^3}{27}+\frac{1}{2}=0$에서는 $a=-\frac{1}{2}$이므로 조건에 맞지 않고

$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$이면 조건에 맞는다. 따라서

$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$f(2)=5-2\sqrt{2}$ 이므로 $a^2+b^2=29$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 12 적분법

해 설

1. $\int_2^4 \frac{6}{x^2}dx = \left[-\frac{6}{x}\right]_2^4 = -\frac{3}{2}-(-3) = \frac{3}{2}$

2. [정답] ④
[해설]
$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$
$= \left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$
$= 2f(1) - 2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$
$f(1)=4$이므로 $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 3$
$\frac{x}{2}=t$라 하면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$
$x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $t=1$
$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 3$
따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$

3. 정답 ②
$f(x)=x+\ln x=t$라 할 때, 구간은 $[1,\ e+1]$
$\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx = \int_1^{e+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)t\times\frac{dt}{1+\frac{1}{x}} = \int_1^{e+1} t\,dt$
$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^{e+1} = \frac{1}{2}(e+1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2+2e}{2} = \frac{e^2}{2}+e$

4. 정답 ①
$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(-e^x+1-e^{-x}+1) & (x<0) \\ \frac{1}{2}(e^x-1-e^x+1) & (x\geq 0) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1 & (x<0) \\ 0 & (x\geq 0) \end{cases}$
$y' = \begin{cases} -\frac{e^x-e^{-x}}{2} & (x<0) \\ 0 & (x\geq 0) \end{cases}$
$x<0$일 때,
$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}$
$= \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$x\geq 0$일 때,
$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \sqrt{1+0} = 1$
$\int_{-\ln 4}^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \int_{-\ln 4}^0 \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx + \int_0^1 1dx$
$= \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln 4}^0 + [x]_0^1 = \frac{1-1}{2} - \frac{e^{-\ln 4}-e^{\ln 4}}{2} + 1 = -\frac{\frac{1}{4}-4}{2}+1$
$= \frac{15}{8}+1 = \frac{23}{8}$

5. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
$x_k = \frac{\pi k}{3n}$라 하면 $\Delta x = \frac{\pi}{3n}$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^n \sin\frac{\pi k}{3n} = 6\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx = 6\times\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3$

6. [출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.
x좌표가 $t\,(1\leq t\leq 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2 = \frac{4}{t}$
따라서 구하는 부피는
$\int_1^4 S(t)dt = \int_1^4 \frac{4}{t}dt = \left[4\ln t\right]_1^4 = 8\ln 2$

7. 정답 ④
$\frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{g'(y)}$에서 $y=g(x)$의 역함수의 미분이므로 $f'(x)$
$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln f(x)\right]_1^a = \ln f(a) - \ln f(1)$
$\ln f(a) - \ln 8 = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$, $a=2$를 대입하면
$\ln f(2) = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 8 = \ln\left(\frac{4\times 3\times 8}{2}\right) = \ln 48$
$\therefore\ f(2) = 48$

8. 정답 ③
정사각형의 한 변 길이가 $\sqrt{(1-2x)\cos x}$이므로 단면의 넓이는 $(1-2x)\cos x$
부피 $V = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx = \left[(1-2x)\sin x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + 2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin x dx$
$= \left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$

9.
$\int_1^e \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x dx - \int_1^e \frac{2}{x^2}\ln x dx = \int_1^e \frac{3}{x}\ln x dx$
$\ln x = t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$
$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$
따라서 $\int_1^e \frac{3}{x}\ln x dx = 3\int_0^1 t dt = 3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

10.
$\int_0^\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^\pi x\sin x dx$
$= \left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)dx$
$= -\pi\times\cos\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + 0$
$= \pi$

11.
$V = \int_1^2 y^2 dx = \int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx$에서
$2x^2+1=t$라 하면 $4x=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=1$일 때 $t=3$,
$x=2$일 때 $t=9$이므로
$V = k\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1}dx = \frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{t}dt = \frac{k}{4}\left[\ln t\right]_3^9 = \frac{k}{4}(\ln 9 - \ln 3)$
$= \frac{k}{4}\ln 3$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

따라서 $\frac{k}{4}\ln 3 = 2\ln 3$에서 $k=8$이다.

12.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$$

$=1-\ln 2$

13.

$1+\frac{3k}{n}=x$라 할 때, 구간은 $[1,\ 4]$, $dx=\frac{3}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\int_{1}^{4}\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{1}^{4}x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{1}^{4}=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{9}$$

14.

부피는 단면의 정적분이므로 단면넓이는

$\left(\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\right)^2=\sec^2 x+\tan x$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$$

$$=[\tan x]_{0}^{\frac{\pi}{3}}+[-\ln\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}+\ln 2$$

15.

$\sin 2x=t$라 하면

$2\cos 2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이다.

따라서

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2x\sin^2 2x\,dx=\int_{0}^{1}t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

16.

정사각형 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}$이므로 단면의 넓이는 $\frac{3x+1}{x^2}$

입체도형의 부피는

$$\int_{1}^{2}\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)dx=\int_{1}^{2}\frac{3}{x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx=[3\ln x]_{1}^{2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}$$

$$=3\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}+3\ln 2$$

17. 조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$f(-1)=1$, $f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1$, $f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=-1$이고,

$x=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx=\int_{3}^{-1}tf'(t)dt$$

$$=\left[tf(t)\right]_{3}^{-1}-\int_{3}^{-1}f(t)dt$$

$$=-f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^{3}f(t)dt$$

$=-1+6+3=8$

18. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{k^2}{n^2}+2\frac{k}{n}\right)}{\frac{k^3}{n^3}+3\frac{k^2}{n^2}+1}$$

$\frac{k}{n}=x$라 할 때, $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}+2\frac{k}{n}}{\frac{k^3}{n^3}+3\frac{k^2}{n^2}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$x^3+3x^2+1=g(x)$라 할 때, $g'(x)=3x^2+6x=3(x^2+2x)$

$$\int_{0}^{1}\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{3}\left[\ln(x^3+3x^2+1)\right]_{0}^{1}=\frac{\ln 5}{3}$$

19. 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$의 두 실근

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$의 두 실근을 α, β라 할 때,

두 교점은 $(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$이므로

그 중점의 x좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}$, y좌표는 $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

얻어진 방정식의 근과 계수 관계에 따라

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\frac{\ln t}{4}$

두 교점의 중점은 $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=\frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}\end{cases}$

$\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$

움직인 거리는 $\int_{1}^{e}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{1}^{e}\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}dt$

$$t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2=t^2+4t^6-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{64t^2}=4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}$$

$$=\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2$$

$$\int_{1}^{e}\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}dt=\int_{1}^{e}\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}dt=\int_{1}^{e}\left|2t^3+\frac{1}{8t}\right|dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{\ln t}{8}\right]_{1}^{e}=\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

20.

$f'(x)=\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$이므로 $f(x)=\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$에서

$x-1=t$로 치환하면 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{3t-1}{\sqrt{t}}dt=\int\left(3t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$=2t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$ (C는 적분상수)

$=2(x-1)^{\frac{3}{2}}-2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$

$f(5)=12+C$, $f(2)=C$

따라서 $f(5)-f(2)=12$

21.

$$\int_{1}^{2}(x-1)e^{-x}dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_{1}^{2}+\int_{1}^{2}e^{-x}dx$$

$$=-e^{-2}-\left[e^{-x}\right]_{1}^{2}$$

$$=-e^{-2}-\left(e^{-2}-e^{-1}\right)$$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$= \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}$

22.

$f(x)=(1+x)^4$, $a=0$, $b=2$ 라 하면

$\triangle x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k = a + k\triangle x = \frac{2k}{n}$

라 하면 정적분과 급수의 합 사이 관계를 이용하면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$

$= \int_0^2 f(x)dx$

$= \int_0^2 (1+x)^4 dx$

$= \left[\frac{(1+x)^5}{5}\right]_0^2$

$= \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5}$

$= \frac{242}{5}$

따라서 $a = \frac{242}{5}$ 이므로 $5a = 242$

23.

주어진 식에서 $t=1$ 이면 $a^2 - a = a(a-1) = 0$

이때 $a \neq 0$ 이므로 $a=1$

주어진 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$f(\ln t)\times\frac{1}{t} = 2(t\ln t+1)(\ln t+1)$

$f(\ln t) = 2t(t\ln t+1)(\ln t+1)$, $\ln t = 1$ 이면 $t=e$

따라서 $f(1) = 2e(e+1)\times 2 = 4e^2 + 4e$

24.

구하는 넓이는

$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 2}^{\ln 2} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 2} - e^{-2\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$

25.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$

$= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}}dx = 2\sqrt{3}\left[\sqrt{x+3}\right]_0^1 = 4\sqrt{3} - 6$

26. [정답] 12

[해설]

조건 (가)에 의하여

$x<1$일 때

$f(x) = -x^2 + 4x + C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$일 때

$2xf'(x^2+1) = 2ae^{2x} + b$

$f'(x^2+1) = \frac{2ae^{2x}+b}{2x}$

$f'(1) = \lim_{x\to 0+} f'(x^2+1) = \lim_{x\to 0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$

$\lim_{x\to 0+} 2x = 0$이므로 $\lim_{x\to 0+}(2ae^{2x}+b) = 0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$f'(x^2+1) = \frac{2ae^{2x}+b}{2x} = \frac{2ae^{2x}-2a}{2x}$

함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = f'(1)$

$\lim_{x\to 1-} f'(x) = -2+4 = 2$

$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{s\to 0+} f'(s^2+1)$

$= \lim_{s\to 0+}\frac{2a(e^{2s}-1)}{2s} = 2a$

$f'(1) = 2$

$2 = 2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x) = -1^2 + 4\times 1 + C = C+3$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{s\to 0+} f(s^2+1)$

$= \lim_{s\to 0+}(e^{2s} - 2s) = 1$

$f(1) = 1$

$C+3=1$이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$일 때, $f(x) = -x^2 + 4x - 2$

$x\geq 0$일 때, $f(x^2+1) = e^{2x} - 2x$

$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-x^2+4x-2)dx = -\frac{1}{3}$

$\int_1^5 f(x)dx$에서

$x = t^2+1$ $(t\geq 0)$이라 하면 $\frac{dx}{dt} = 2t$

$\int_1^5 f(x)dx = \int_0^2 f(t^2+1)2tdt$

$= \int_0^2 2t(e^{2t} - 2t)dt$

$= \int_0^2 (2te^{2t} - 4t^2)dt$

$= \left[te^{2t}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{2t}dt - \int_0^2 4t^2 dt$

$= \left[te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{4}{3}t^3\right]_0^2$

$= \frac{3}{2}e^4 - \frac{61}{6}$

$\int_0^5 f(x)dx = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}e^4 - \frac{61}{6}\right) = \frac{3}{2}e^4 - \frac{21}{2}$

에서 $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{21}{2}$

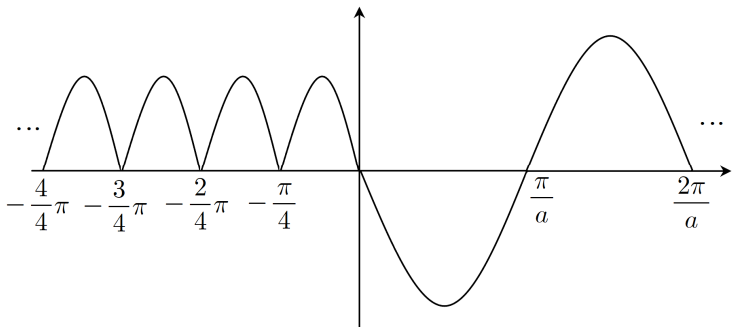
따라서 $p+q=12$

27. 정답 ②

$h(x) = \int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라 할 때, $h(-a\pi)=0$, $h'(x)=f(x)$

$g(x) = |h(x)|$가 실수 전체에서 미분 가능하면,
방정식 $h(x)=0$이 통과하는 실근을 갖지 않으면 된다.
$y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



y축 왼쪽의 그래프는 한 주기의 넓이가

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} -2\sin 4x\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

y축 오른쪽의 그래프는 한 주기의 넓이가

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{a}$$

(ⅰ) $x < -a\pi$일 때, $x = -a\pi$의 좌우에서 그래프가 모두 x축 위에 그려지므로 $x < 0$보다 작으면 $h(x) < 0$임을 알 수 있다. 이 때, $x > -a\pi$로 진행하면서 $h(x) > 0$이 되므로 $h(x) = 0$이 되는 점이 발생한다.
이 때, 절댓값으로 꺾이면서 미분 가능해야하므로 $h'(x) = 0$이 되어야 하고 그러므로 $a = \frac{n}{4}$이 되어야 한다.

(ⅱ) $x > 0$일 때, 적분 값이 $(-)$가 발생하고, 이제 다시 $h(x) \geq 0$이 되어야 절댓값에 의해 꺾이는 점이 발생하지 않는다.
$h(x)$의 값이 항상 양수가 되어야 미분이 가능해지므로
$\int_{-a\pi}^{0} f(x)dx \leq \int_{0}^{x} f(x)dx$를 만족할 때, 미분 가능하다.

이 때, $-$값은 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{a}\right)$에서 발생하므로 이 부분의 넓이가 y축 왼쪽부분의 넓이보다 더 커지는 순간부터 실수 전체에서 미분가능하다.

a의 최솟값을 찾아야하므로 $\frac{1}{4}$부터 하나씩 해보면,

$a = \frac{1}{4}$일 때, 왼쪽 넓이는 1, 오른쪽 넓이는 $\frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

$a = \frac{2}{4}$일 때, 왼쪽 넓이는 2, 오른쪽 넓이는 $\frac{2}{\frac{2}{4}} = 4$

$a = \frac{3}{4}$일 때, 왼쪽 넓이는 3, 오른쪽 넓이는 $\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$,

$3 > \frac{8}{3}$을 만족하므로 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$

28. [출제의도] 적분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$a \neq b$이므로 조건 (가)에서
$a \neq 0,\ b = 0$ 또는 $a = 0,\ b \neq 0$
(ⅰ) $a \neq 0,\ b = 0$일 때,

$\sin x = t$로 놓으면 $x = 0$일 때 $t = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t = 1$이고

$\frac{dt}{dx} = \cos x$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x \times e^{a\sin x})dx$$

$$= \int_{0}^{1} te^{at}dt = \left[\frac{t}{a}e^{at}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{1}{a}e^{at}dt$$

$$= \frac{e^{a}}{a} - \left[\frac{1}{a^{2}}e^{at}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{(a-1)e^{a}+1}{a^{2}}$$

조건 (나)에서 $\frac{(a-1)e^{a}+1}{a^{2}} = \frac{1}{a^{2}} - 2e^{a}$

$a - 1 = -2a^{2},\ (a+1)(2a-1) = 0$

$a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

(ⅱ) $a = 0,\ b \neq 0$일 때,

$\cos x = t$로 놓으면 $x = 0$일 때 $t = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t = 0$이고

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x \times e^{b\cos x})dx$$

$$= -\int_{1}^{0} te^{bt}dt = \int_{0}^{1} te^{bt}dt$$

$$= \left[\frac{t}{b}e^{bt}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{1}{b}e^{bt}dt$$

$$= \frac{e^{b}}{b} - \left[\frac{1}{b^{2}}e^{bt}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{(b-1)e^{b}+1}{b^{2}}$$

조건 (나)에서 $\frac{(b-1)e^{b}+1}{b^{2}} = \frac{1}{b^{2}} - 2e^{b}$

$b - 1 = -2b^{2},\ (b+1)(2b-1) = 0$

$b = -1$ 또는 $b = \frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-1, 0),\ \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ (0, -1),\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $a - b$의 최솟값은

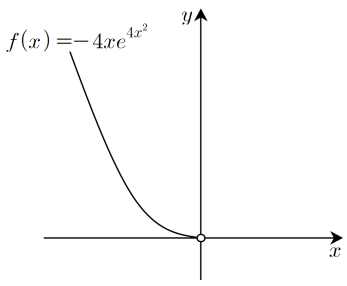
$-1 - 0 = -1$

29. 정답 ②

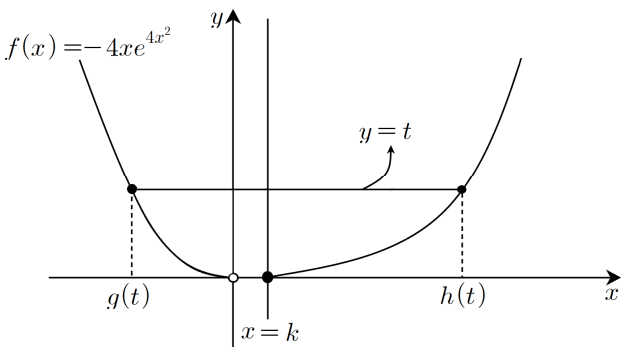
$f'(x) = -4e^{4x^{2}} + (-4xe^{4x^{2}}) \times 8x = -4e^{4x^{2}} - 32x^{2}e^{4x^{2}} = 4e^{4x^{2}}(-1-4x^{2})$

$f'(x) < 0$이므로 감소하고, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$이므로 $x < 0$일 때,

$y = f(x)$그래프는 아래 그림과 같다.



조건에 맞게 $x > 0$을 추측하면 아래 그림과 같다.



$f(g(t)) = f(h(t))$을 만족한다. $g(t) = s$라 하면, $h(t) = k - 2s$
$f(s) = f(k-2s)$가 모든 실수 s에 대하여 성립한다.

$k - 2s = x$라 하면, $s = \frac{k-x}{2}$,

$x > 0$일 때, $f(x) = f\left(\frac{k-x}{2}\right) = -4\left(\frac{k-x}{2}\right)e^{4\left(\frac{k-x}{2}\right)^{2}} = 2(x-k)e^{(x-k)^{2}}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\int_0^7 2(x-k)e^{(x-k)^2}dx = \int_k^7 2(x-k)e^{(x-k)^2}dx = e^4-1$

$(x-k)^2=t$로 치환하면

$\int_0^{(7-k)^2} 2(x-k)e^t \times \frac{dt}{2(x-k)} = \int_0^{(7-k)^2} e^t dt = e^{(7-k)^2}-1 = e^4-1$

$\therefore\ k=5$

$x>0$일 때, $f(x)=2(x-5)e^{(x-5)^2}$,

$f(8)=6e^9,\ f(9)=8e^{16},\ \frac{f(9)}{f(8)}=\frac{8e^{16}}{6e^9}=\frac{4}{3}e^7$

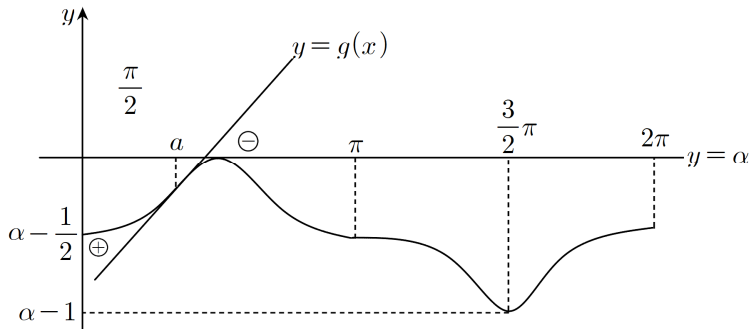
30. 정답 125

$f'(x)=\begin{cases} \sin x\cos x & (2n\pi \le x < 2n\pi+\pi) \\ -\sin x\cos x & (2n\pi+\pi \le x < 2n\pi+2\pi) \end{cases}$ (단, n은 정수)

$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\cos^2 x+\alpha & (2n\pi \le x < 2n\pi+\pi) \\ \frac{1}{2}\cos^2 x+\beta & (2n\pi+\pi \le x \le 2n\pi+2\pi) \end{cases}$ (단, n은 정수)

$x=2n\pi+\pi$일 때, $\cos x=-1$이므로 $-\frac{1}{2}+\alpha=\frac{1}{2}+\beta,\ \beta=\alpha-1$

$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\cos^2 x+\alpha & (2n\pi \le x < 2n\pi+\pi) \\ \frac{1}{2}\cos^2 x+\alpha-1 & (2n\pi+\pi \le x \le 2n\pi+2\pi) \end{cases}$



$h'(x)=f(x)-g(x)$이고

(i) $y=g(x)$가 접선이므로 $x=a$가 $y=f(x)$의 변곡점일 때, $f(x)-g(x)$의 부호가 바뀐다.

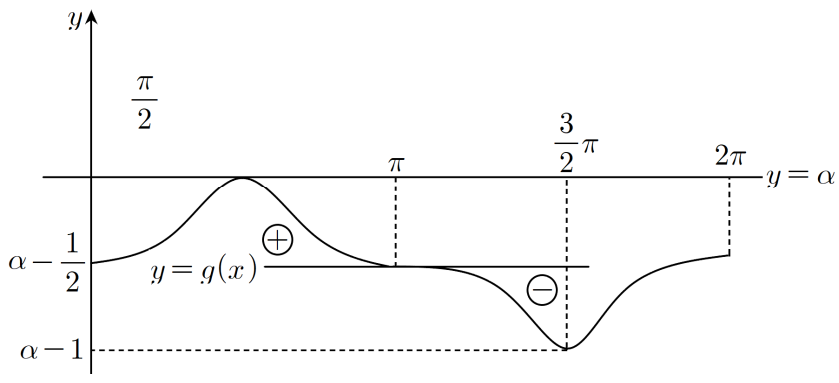
$f''(x)=\begin{cases} \cos x\cos x-\sin x\sin x & (2n\pi \le x < 2n\pi+\pi) \\ \sin x\sin x-\cos x\cos x & (2n\pi+\pi \le x < 2n\pi+2\pi) \end{cases}$

(단, n은 정수)

$\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$이므로

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \cdots$

(ii) 아래의 그림에서 $x=n\pi$일 때, $f(x)-g(x)$의 부호가 바뀐다는 것을 알 수 있다.



$x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

$\therefore\ a_n$은 $\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \cdots$

$a_2=\frac{3}{4}\pi,\ a_6=2\pi$

$\therefore\ \frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\times\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=100\times\frac{5}{4}=125$

31.

$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$

$=\int_{-1}^5 xf(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x dx$ ……㉠

조건 (가)에 의하여

$\int_{-1}^1 xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$

$\int_{-1}^5 xf(x)dx$

$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^5 xf(x)dx$

$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1 (x+2)f(x+2)dx$

$\quad+\int_{-1}^1 (x+4)f(x+4)dx$

$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1 (x+2)f(x)dx$

$\quad+\int_{-1}^1 (x+4)f(x)dx$

$=3\int_{-1}^1 xf(x)dx+6\int_{-1}^1 f(x)dx$

$=12\int_0^1 f(x)dx=24$ ……㉡

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x)=f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2)=f(x)\cos 2\pi x$

$\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx+\int_1^3 f(x)\cos 2\pi x dx+\int_3^5 f(x)\cos 2\pi x dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{-1}^1 f(x+2)\cos 2\pi(x+2)dx$

$\quad+\int_{-1}^1 f(x+4)\cos 2\pi(x+4)dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx$

$=3\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x dx=6\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x dx$

㉠, ㉡에 의하여

$\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x dx=\frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right)=-\frac{1}{12}$

따라서

$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x dx=\left[f(x)\sin 2\pi x\right]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x dx$

$=-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x dx=\frac{\pi}{6}$

32.

(나) 조건에서 $x=0$을 대입하면 $g(3)\times 0=f'(0)$에서 $f'(0)=0$이다.

그런데 $g(x+3)$는 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않으므로 $f'(x)$도 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않음을 알 수 있다. $g(x+3)$이 $x>-3$에서 부호가 한 번도 바뀌지 않기 때문에

$f'(x)=4x^2(x-\alpha)\ (\alpha \le -3)$이다.

그런데 $f'(x)=4x^2(x-\alpha)\ (\alpha<-3)$이면 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, 그렇다면 $x \le -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f(-3)$이라는 (가) 조건에 모순이다.

따라서 $f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$이고

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)이다.

이제 $g(x+3)=\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}$라 할 수 있고,

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\int_4^5 g(x)dx = \int_1^2 g(x+3)dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$

$f(x)-f(0)=t$라 하면

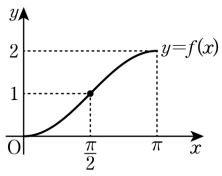
$f'(x)dx=dt$이고 $f(1)-f(0)=5$, $f(2)-f(0)=48$이므로

$\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{43}{240}$

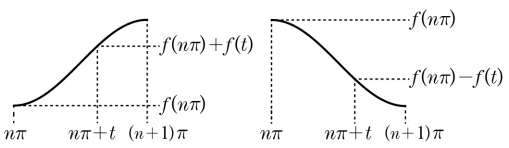
이므로 $p+q=240+43=283$

33.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

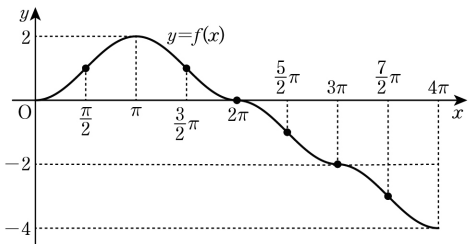


조건 (나)에 의하여 $n\pi < x \le (n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

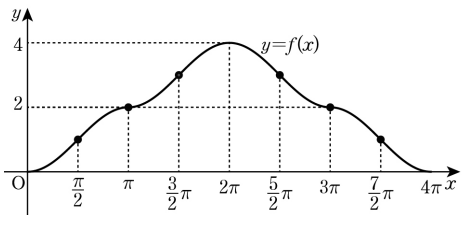
x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\pi\times 2$

$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx+2\pi$

$=4\left[x-\sin x\right]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$

(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

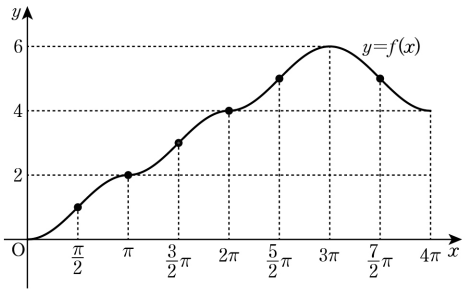


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times 2=8\pi$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times 2=8\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

34.

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)에서

$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)\,dt$

$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{4a}g(t)\,dt+\int_{4a}^{2a+2}g(t)\,dt$

$\int_{2a}^{3a+x}g(t)\,dt=\int_{3a-x}^{4a}g(t)\,dt$에서 $\int_{4a}^{2a+2}g(t)\,dt=0$

조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$ (p, q는 상수)

라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$

$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$

조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로

$16-24+q=5$에서 $q=13$

$h(x)=x^2-6x+13$에서

$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$\int_3^5\{f'(x)+2a\}g(x)\,dx$

$=\int_3^5\{f'(x)+2\}g(x)\,dx=\int_3^5 h'(x)\ln h(x)\,dx$

$=\left[h(x)\ln h(x)\right]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$

$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$

$=8\ln 8-4\ln 4-(8-4)=-4+16\ln 2$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로

$m+n=12$

35.

$-x=t$라 할 때,

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{a}{e^{2t}}+\frac{b}{e^t}+c+6}{\frac{1}{e^t}}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{e^t(a+be^t+(c+6)e^{2t})}{e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(c+6)e^{2t}+be^t+a}{e^t}=1$,

$\therefore\ c=-6,\ b=1$

$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$, $f(\ln 2)=ae^{\ln 4}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$, $a=1$

$\therefore\ f(x)=e^{2x}+e^x-6$,

$f(k)=14=e^{2k}+e^k-6$에서 $e^k=t$라 할 때,

$t^2+t-20=0$, $t=e^t=4$,

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx+\int_0^{14}g(x)dx=14\ln 4=28\ln 2$

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2x}+e^x-6)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-6x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=(8+4-6\ln 4)-(2+2-6\ln 2)=8-6\ln 2$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$$\int_0^{14} g(x)dx = 28\ln 2 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = 28\ln 2 - 8 + 6\ln 2 = -8 + 34\ln 2$$

$\therefore\ p+q = 34-8 = 26$

36.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10}f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{10f(x)}\{10 - f(x)\}$$

$g'(x)=0$이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$이므로 $x=0$일 때에만 $f'(x)=0$

(ⅰ) 방정식 $f(x)-10=0$이 실근을 갖지 않을 때,

$f'(0)=0,\ f(x)>10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	극대	↘

(ⅱ) 방정식 $f(x)-10=0$이 중근을 가질 때,

$f'(0)=0,\ f(0)=10,\ f(x)\geq 10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	극대	↘

(ⅰ), (ⅱ)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) 방정식 $f(x)-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=-\beta$

$f(-x)=f(x)$이므로 $g(-x)=g(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$g(\alpha)=g(\beta)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

(ⅲ)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(0)=b<f(\alpha)=10$이므로

$1\leq b<10$

$$g(0) = \ln f(0) - \frac{1}{10}(f(0)-1)$$

$$= \ln b - \frac{1}{10}(b-1)$$

$p(x)=\ln x-\frac{1}{10}(x-1)$이라 하면

$$p'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{10-x}{10x}$$

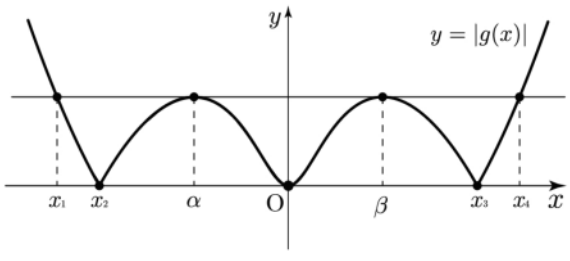
$1\leq x<10$일 때 $p'(x)>0$이므로

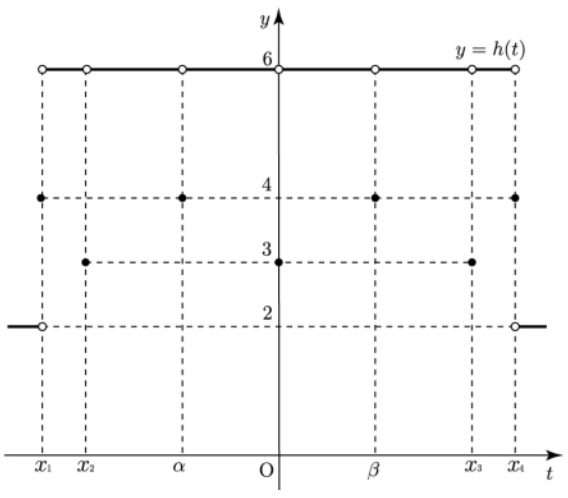
$p(x)$는 증가함수이다.

$g(0)\geq p(1)=0$

함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

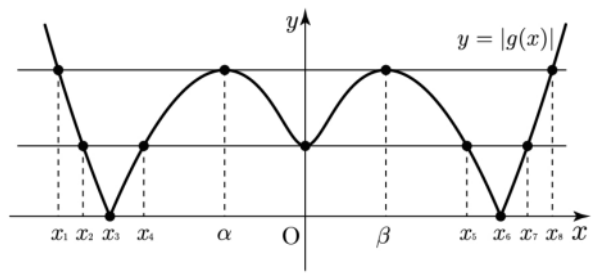
(1. $g(0)=0$일 때

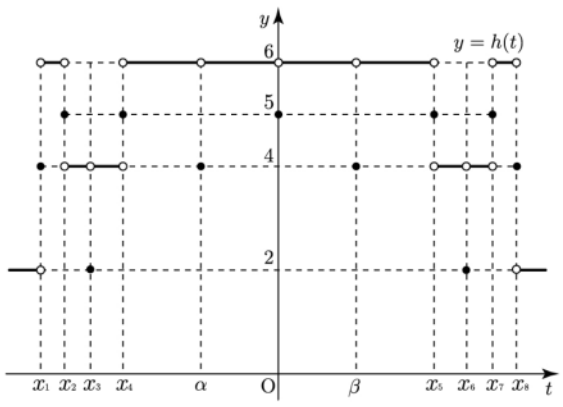




함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2. $g(0)>0$일 때





함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 11이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$0=g(0)=p(b)\geq p(1)=0$이므로

$p(b)=p(1)$

함수 $p(x)$는 $1\leq x<10$에서

증가함수이므로 $b=1,\ f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a ex\,f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a (ax^2+1)e^x\,dx$$

$$= \Big[(ax^2+1)e^x\Big]_0^a - \int_0^a 2ax\,e^x\,dx$$

$$= (a^3+1)e^a - 1 - \Big[2ax\,e^x\Big]_0^a + \int_0^a 2a\,e^x\,dx$$

$$= (a^3+1)e^a - 1 - 2a^2e^a + \Big[2a\,e^x\Big]_0^a$$

$$= (a^3-2a^2+2a+1)e^a - 2a - 1$$

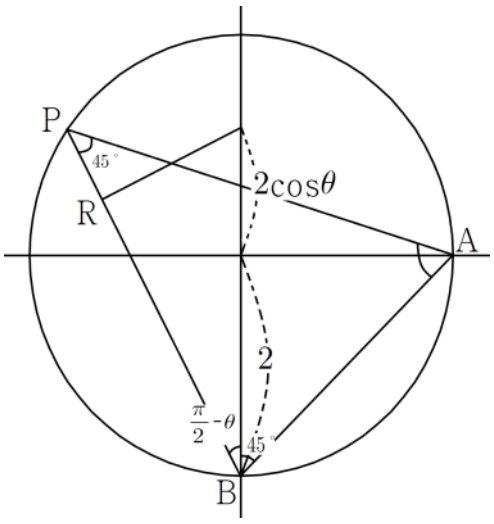
$me^a-19=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$

따라서 $a=9$이므로

$m=a^3-2a^2+2a+1=586$

37.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



$\angle APB = \alpha$라 할 때, 원주각 $\angle APB$에 대응하는 중심각이 $\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 $\angle APB = 45^\circ$

$\angle B = 180^\circ - 45^\circ - \theta$이고, $\angle QBR = 135^\circ - \theta - 45^\circ = 90^\circ - \theta$

직각 삼각형 QBR에서

$\overline{BR} = \overline{BQ} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (2 + 2\cos\theta) \times \sin\theta$

사인법칙에 따라 $\frac{\overline{BP}}{\sin\theta} = 4$이므로 $,\overline{BP} = 4\sin\theta$

$\overline{PR} = \overline{BP} - \overline{BR} = 4\sin\theta - (2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - \sin 2\theta)d\theta = \left[-2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$\left(-1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$

38.

(가) 조건에서 분모가 0에 수렴하므로 분자도 0에 수렴한다.

$\sin f(0)\pi = 0$ 그러므로 $f(0)$은 정수

$\sin\pi f(x) = g(x)$라 할 때,

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0)$

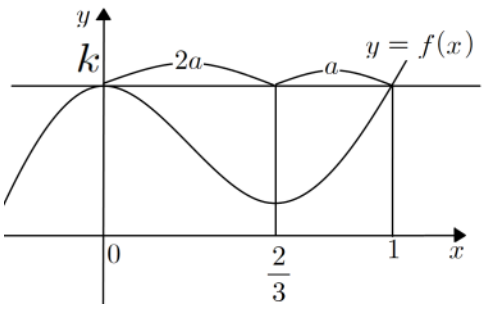
$g'(x) = \cos\pi f(x) \times \pi f'(x)$, $\pi f'(0)\cos\pi f(0) = 0$에서 $f'(0) = 0$

주기함수가 연속이기 위해 $g(0) = g(1)$이어야 하므로 $f(0) = f(1)$

$x = 0$에서 극솟값을 갖는다면, 그래프 상 $f(0) = f(1)$을 만족할 수 없다. 그러므로 $f(0)$는 극댓값

(1. $f(0) = k$라 할 때, $f(1) = k$

3차함수의 비례관계에 따라 아래 그래프와 같이 극솟값은 $x = \frac{2}{3}$ 일 때 가짐을 알 수 있다.



$y = f(x)$와 $y = k$가 $x = 0$에서 접하므로 $f(x) = 5$가 0을 중근으로 가진다. 그러므로 $f(x) - k = 9x^2(x-1)$, $f(x) = 9x^2(x-1) + k$

극솟값 $f\left(\frac{2}{3}\right) = 9 \times \frac{4}{9} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + k = -\frac{4}{3} + k$

극댓값 $f(0) = k$

$\therefore k^2 - \frac{4}{3}k = 5$, $3k^2 - 4k - 15 = 0$ $\quad\quad$ $\therefore (3k+5)(k-3) = 0$, $k = 3$,

$\therefore f(x) = 9x^2(x-1) + 3 = 9x^3 - 9x^2 + 3$

$\int_0^5 xg(x) = \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \cdots + \int_4^5 xg(x)$

$\int_0^1 g(x)dx = \int_1^2 g(x)dx = \cdots = \int_4^5 g(x)dx$이므로

$\int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \cdots + \int_4^5 xg(x)$

$\int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x+1)dx + \cdots + \int_0^1 (x+4)g(x+4)$

$\int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)f(x)dx + \cdots + \int_0^1 (x+4)f(x)dx$

$= \int_0^1 (5x+10)f(x)dx = 5\int_0^1 xf(x)dx + 10\int_0^1 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (9x^3 - 9x^2 + 3)dx = \left[\frac{9}{4}x^4 - 3x^3 + 3x\right]_0^1 = \frac{9}{4}$

$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (9x^4 - 9x^3 + 3x)dx = \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$= \frac{9}{5} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{36 - 45 + 30}{20} = \frac{21}{20}$

$\therefore \int_0^1 xg(x)dx = 5 \times \frac{21}{20} + 10 \times \frac{9}{4} = \frac{21 + 90}{4} = \frac{111}{4}$

$\therefore p + q = 115$

39. 조건 (가)에서

$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)dx$

$= \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$

$\frac{2}{a} \geq \frac{1}{2}$ 이므로

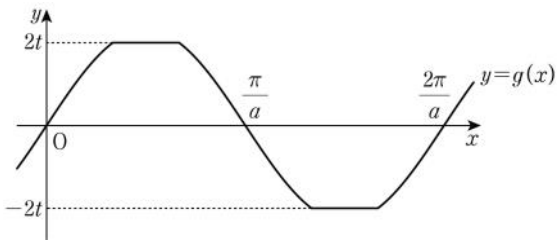
$0 < a \leq 4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\int_0^{3\pi} \{|f(x) + t| - |f(x) - t|\}dx = 0$

$g(x) = |f(x) + t| - |f(x) - t|$ 라 하면

$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \leq \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \leq \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \leq \sin(ax) \leq 1) \end{cases}$



함수 $y = g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k에 대하여

$\int_0^k g(x)dx > 0$ 이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)dx = 0$ 이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 $\int_0^{3\pi} g(x)dx = 0$ 이므로

$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n$ (n은 자연수), $a = \frac{2}{3}n$

㉠에서 $0 < \frac{2}{3}n \leq 4$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값은

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4 이므로 그 합은 14 이다.

40. $\int_1^8 xf'(x)dx = [xf(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$

ⅰ) $[xf(x)]_1^8$구하기

$g(2) = 2f(1) = 2$, 역함수관계를 생각해보면

$g(2) = 2$이므로 $f(2) = 2$

같은 방법을 이용하면 $g(4) = 2f(2) = 4$, $f(4) = 4$

$g(8) = 2f(4) = 8$, $f(8) = 8$

$[xf(x)]_1^8 = 8f(8) - f(1) = 63$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

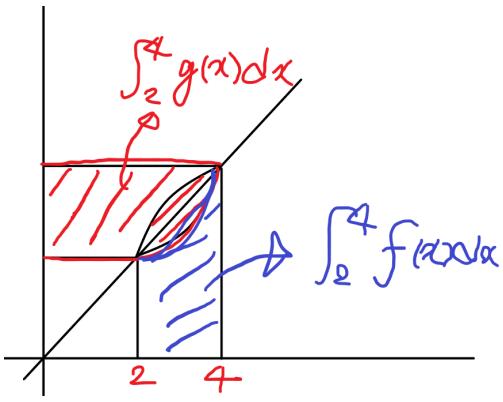
ii) $\int_1^8 f(x)dx$ 구하기

$\int_2^4 g(t)dt$를 $t=2x$로 치환하면 $x=\frac{t}{2}$, $dt=2dx$이므로

$\int_2^4 g(t)dt=2\int_1^2 g(2x)dx$

$g(2x)=2f(x)$를 대입하면,

$\int_2^4 g(t)dt=2\int_1^2 g(2x)dx=4\int_1^2 f(x)dx=4\times\frac{5}{4}=5$



위의 그림에서 역함수의 대칭성을 이용하면

$\int_2^4 f(x)dx=16-4-\int_2^4 g(x)dx=12-5=7$

얻어진 값을 이용하면

$\int_4^8 g(t)dt=2\int_2^4 g(2x)dx=4\int_2^4 f(x)dx=28$

위에서와 같이 역함수 대칭성을 이용하면

$\int_4^8 f(x)dx=64-16-\int_4^8 g(x)dx=48-28=20$

$\int_1^8 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$

$=\frac{5}{4}+7+20=28+\frac{1}{4}$

iii) 얻어진 결과를 이용하면,

$\int_1^8 xf'(x)dx=[xf(x)]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$

$63-28-\frac{1}{4}=35-\frac{1}{4}=\frac{139}{4}$

$\therefore\ p+q=143$

41.

$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$에서

$g(0)=0,\ g'(x)=\ln f(x),\ g''(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=2,\ g'(1)=0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1)=g'(1)=0$

$\int_{-1}^1 \frac{xf'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^1 xg''(x)dx$

$=\left[xg'(x)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 g'(x)dx$

$=g'(1)+g'(-1)-2\int_0^1 g'(x)dx$

$=2g'(1)-2\{g(1)-g(0)\}$

$=2\times0-2(2-0)=-4$

42.

$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$이고 $g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $ae^{af(x)}+b=0$

(i) $f'(x)=0$인 경우

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=0$

$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

(ii) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우

$e^{af(x)}=-\frac{b}{a}$를 만족시키는 x의 값이 존재해야하므로 $\frac{b}{a}<0$

조건 (나)와 (i)에 의하여 n이 짝수일 때 α_n은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.

$ae^{af(\alpha_n)}+b=0$ … ㉠

조건 (나)에 의하여 n이 짝수일 때

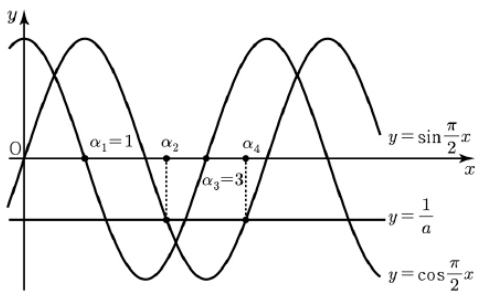
$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고 $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$

n이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$을 만족시키려면

$-1<\frac{1}{a}<0$

그러므로 $a<-1,\ b>0$



열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 α의 개수는 2이다.

함수 $g(x)$의 열린 구간 $(0,\ 4)$에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	α_1	…	α_2	…	α_3	…	α_4	…	4
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	e^a+b	↘	0	↗	$e^{-a}-b$	↘	0	↗	

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린구간 $(0,\ 12)$에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.

열린 구간 $(0,\ 12)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수는 각각 6이므로 $m=12$

함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일때 각각 극댓값 e^a+b, $e^{-a}-b$를 갖는다.

함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 e^3+e^{-3}이므로

$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$

a는 음수이므로 $a=-3$

$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\frac{1}{3}$이고 ㉡에 대입하면

$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\frac{1}{3}b=0$에서 $b=3e$

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$\sin\frac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$이고

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\frac{3}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{\pi}{2}\alpha_4=-\frac{1}{3}$이다.

$12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)dt$

$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$

$=8e^3-40e$

따라서 $p=8,\ q=-40$이므로 $p-q=48$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

43.

ㄱ. $x \le 0$에서 $f(x)=0$이므로

$x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$
$$=\int_0^x 0\times f(1-t)dt=0$$

(참)

ㄴ. $1-t=s$라 하면 $t=1-s$이고

$-1=\frac{ds}{dt}$이므로 $dt=-ds$

$t=0$일 때 $s=1$,

$t=\frac{1}{2}$일 때 $s=\frac{1}{2}$이므로

$$g(\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$$
$$=-\int_1^{\frac{1}{2}} f(1-s)f(s)ds$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)f(1-s)ds$$

따라서

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$$
$$=g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(참)

ㄷ. $g'(x)=f(x)f(1-x)\ge 0$이므로 $g(x)$는 증가함수이다.

$x \ge 1$에서 $f(1-x)=0$이므로

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$
$$=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt+\int_1^x f(t)f(1-t)dt$$
$$=g(1)$$

따라서 모든 x에 대하여 $g(x)\le g(1)$

이때 $x>0$에서

$$f'(x)=10\{\ln(1+x^4)\}^9\times\frac{4x^3}{1+x^4}>0$$이므로

$f(x)$는 증가함수이고

$0<x<1$에서 $f(x)<f(1)=\{\ln 2\}^{10}$

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$
$$<\int_0^1 f(1)^2dt<(\ln 2)^{20}<1$$

따라서 모든 x에 대하여 $g(x)\le g(1)<1$

(거짓)

44.

$x-t=s$라 하면 $t=x-s$이고

$-1=\frac{ds}{dt}$이므로 $dt=-ds$

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$
$$=-\int_x^0 (x-s)f(s)ds$$
$$=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$$

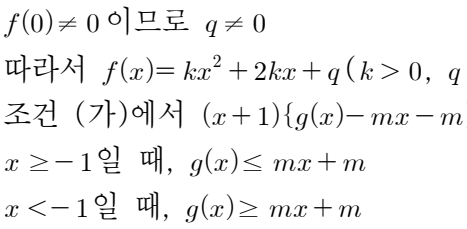
이므로

$$g'(x)=\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(s)ds$$

$x=a_n$에서 극댓값을 가지므로

$g'(a_n)=\int_0^{a_n} f(s)ds=0$이고

자연수 n에 대하여 $f(n^2)=\sin(\pi\sqrt{n^2})=0$이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $1^2<a_1<2^2$
$3^2<a_2<4^2$
$5^2<a_3<6^2$
$\vdots$
$9^2<a_5<10^2$
$11^2<a_6<12^2$

이므로 $k=11$

45.

$A=B$이므로 $\int_0^2 f(x)dx=0$

$$\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$$
$$=\left[(2x+3)f(x)\right]_0^2-\int_0^2 2f(x)dx$$
$$=7f(2)-3f(0)-0=7$$

46.

$f(x)=kx^2+px+q$(p, q는 상수)라 하면

$f(0)=f(-2)$이므로 $q=4k-2p+q$, $p=2k$

$f(0)\ne 0$이므로 $q\ne 0$

따라서 $f(x)=kx^2+2kx+q$($k>0$, $q\ne 0$)

조건 (가)에서 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\le 0$

$x\ge -1$일 때, $g(x)\le mx+m$

$x<-1$일 때, $g(x)\ge mx+m$

이고, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(-1)=0$

$(-a+b)e^{f(-1)}=0$에서 $b=a$

$g(x)=(ax+a)e^{kx^2+2kx+q}$에서

$g'(x)=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$

$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$

$a<0$, $k>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)<0$이고, $x<-1$이면 $g''(x)>0$, $x>-1$이면 $g''(x)<0$이다. 조건 (가)에서 m의 최솟값이 -2이므로 $g'(-1)=-2$

$ae^{-k+q}=-2$ …… ㉠

조건 (나)의 $\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$에서

$kx^2+2kx+q=t$라 하면

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_q^{3k+q}\frac{a}{2k}e^t\,dt$$
$$=\left[\frac{a}{2k}e^t\right]_q^{3k+q}=\frac{a}{2k}(e^{3k+q}-e^q)$$

㉠을 대입하면

$\frac{-2e^k}{2k}(e^{3k}-1)=\frac{e-e^4}{k}$, $-e^{4k}+e^k=e-e^4$

$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$

$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$ 이므로

$e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서

$$\int_{-2f(0)}^{1} g(x)dx-\int_{0}^{1} g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{0} g(x)dx=0$$

$k=1$ 이므로 $x^2+2x+q=t$ 라 하면

$$\int_{-2f(0)}^{0} g(x)dx=\int_{4q^2-3q}^{q}\frac{a}{2}e^t\,dt$$

$$=\left[\frac{a}{2}e^t\right]_{4q^2-3q}^{q}=\frac{a}{2}\left(e^q-e^{4q^2-3q}\right)=0$$

$a\neq 0$ 에서 $q=4q^2-3q$ 이고 $q\neq 0$ 이므로 $q=1$

㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $f(x)=x^2+2x+1$ 이므로

$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$

47.

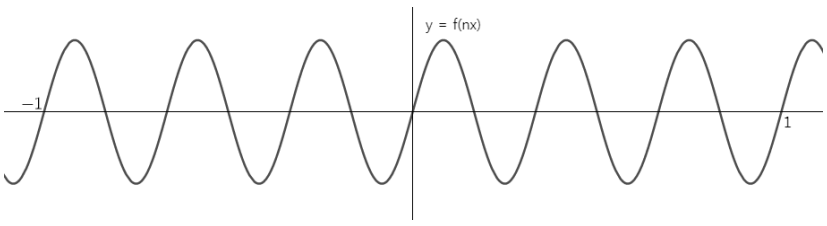
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xf\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[x\cos x\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi-\left[\sin x\right]_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\times(-\pi)=-1$$

48.

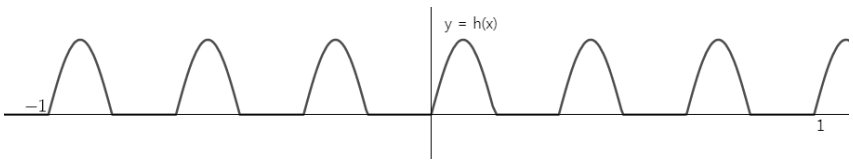


그림은 $n=3$일 때 $y=f(nx)$의 그래프이다.

$\int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2n}}\pi\sin(2n\pi x)dx=\frac{1}{n}$ 이므로

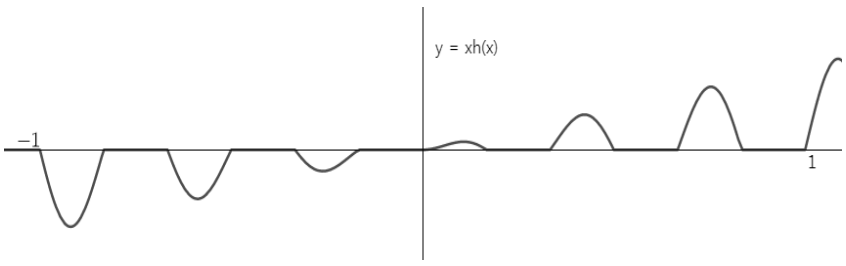
$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2$이려면 $h(x)=f(nx)g(x)$는

$f(nx)\geq 0$일 때 $g(x)=1$이어서 $h(x)=f(nx)$



$f(nx)<0$일 때 $g(x)=0$이어서 $h(x)=0$이면 된다.

$y=xh(x)$의 그래프는 다음과 같다.



대칭성을 고려하면 -1에서 1까지 $y=xh(x)$의 정적분은 0에서 1까지 $xf(nx)$의 정적분과 같다.



즉 $\int_{-1}^{1} xh(x)dx=\int_{0}^{1} xf(nx)dx=\int_{0}^{1}\pi x\sin 2n\pi x\,dx$

$$=\left[-\pi x\times\frac{1}{2n\pi}\times\cos 2n\pi x\right]_{0}^{1}+\pi\int_{0}^{1}\cos 2n\pi x\,dx=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$$

따라서 $n=16$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 13 이차곡선

해 설

1. ⑤
[출제의도] 타원의 장축의 길이를 계산한다.
타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{16}=2\times4=8$

2. 정답 ①
[해설]
포물선 $y^2=-12(x-1)$의 꼭짓점은 $(1, 0)$이므로 준선의 방정식은
$x=1-\left(\frac{-12}{3}\right)=4$

3.
포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P와 y축 사이의 거리가 3이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 $2+3=5$
따라서 $\overline{PF}=5$

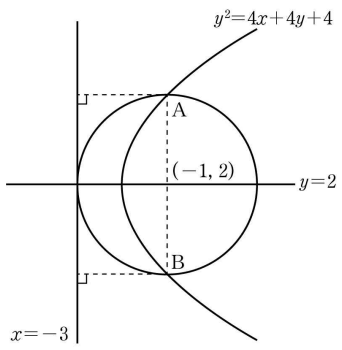
4.
타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점의 좌표는
$(4, 0)$, $(-4, 0)$이므로 $\overline{FF'}=8$

5. ①
[출제의도] 포물선의 방정식을 이해하여 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구한다.
포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0, 2)$이고 준선의 방정식은 $y=-2$이다.
따라서 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는 4이다.

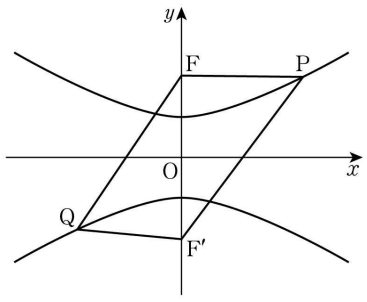
6. ③
[출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2a$이므로 $2a=4$에서 $a=2$
점 $F(3, 0)$이 쌍곡선의 한 초점이므로 $a^2+b^2=3^2$에서 $b^2=5$, $b=\sqrt{5}$
쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선 l의 방정식은
$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $\sqrt{5}x-2y=0$
따라서 점 $F(3, 0)$과 직선 l 사이의 거리는
$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

7. ②
[출제의도] 포물선의 평행이동을 이해하여 점의 좌표를 구한다.
$y^2=4x+4y+4$에서 $(y-2)^2=4(x+2)$
포물선 $y^2=4x+4y+4$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점의 좌표는 $(-1, 2)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
두 점 A, B에서 초점까지의 거리는 모두 원의 반지름의 길이인 2이므로 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B와 준선 사이의 거리는 모두 2이다.
$|a-(-3)|=2$, $|c-(-3)|=2$이고 $a\geq-2$ $c\geq-2$이므로 $a=-1$, $c=-1$
두 점 A, B는 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 축인 직선 $y=2$에 대하여 대칭이므로 $\frac{b+d}{2}=2$, $b+d=4$
따라서 $a+b+c+d=(-1)+(-1)+4=2$

[참고]



8. ④
[출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하여 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$의 주축의 길이는 4이므로
$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$ … ㉠, $\overline{QF}-\overline{QF'}=4$ … ㉡
㉠, ㉡에서
$(\overline{PF'}-\overline{PF})+(\overline{QF}-\overline{QF'})=8$, $(\overline{PF'}-\overline{QF'})+(\overline{QF}-\overline{PF})=8$,
$5+(\overline{QF}-\overline{PF})=8$, $\overline{QF}-\overline{PF}=3$
$\overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{QF}$이므로 $\overline{QF}-\frac{2}{3}\overline{QF}=\frac{1}{3}\overline{QF}=3$
$\overline{QF}=9$, $\overline{PF}=6$이므로 $\overline{PF}+\overline{QF}=15$

9. [정답] ⑤
[출제의도] 쌍곡선의 점근선 이해하기
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 점근선의 방정식은
$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{a}x$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$에서 $a=2$
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$,
$F'(-c, 0)(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$
따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$

10. [정답] ⑤
[출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기
점 F의 x좌표를 c라 하면
$c=\sqrt{40-15}=5$이므로 $F(5, 0)$
$\overline{OF}=\overline{FQ}$이므로 $\overline{OQ}=10$에서 $Q(10, 0)$
점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 위의
점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1}{40}x+\frac{y_1}{15}y=1$
이 직선의 x절편이 10이므로 $x_1=4$
점 $P(4, y_1)$이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ 위의 점이므로
$\frac{4^2}{40}+\frac{{y_1}^2}{15}=1$에서 $y_1=3$
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=3$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times10\times3=15$

11. [정답] ①

[출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

점 Q가 y축 위의 점이므로

삼각형 QF′F는 이등변삼각형이다.

삼각형 PQF가 정삼각형이므로

$\angle F'PF=\angle PFQ=\frac{\pi}{3}$

$\angle FF'Q=\angle QFF'=\theta$라 하면

삼각형 PF′F의 세 내각의 합은 π이므로

$\theta+\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$

그러므로 삼각형 PF′F는

$\angle FF'P=\frac{\pi}{6}$, $\angle PFF'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{F'F}=6\sqrt{3}$이므로 $\overline{PF}=6$, $\overline{PF'}=12$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$\overline{PF'}-\overline{PF}=12-6=6$

12. [정답] ④

[출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{QF'}=\frac{3}{2}\overline{PF}=\frac{3}{2}k$

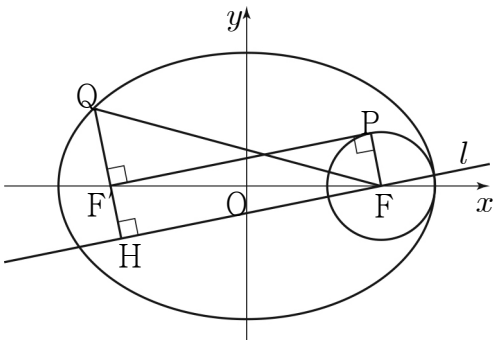
점 A의 x좌표는 $k+5$이므로

타원의 장축의 길이는 $2(k+5)$

$\overline{QF}=2(k+5)-\overline{QF'}=\frac{k}{2}+10$

점 F를 지나고 직선 F′P에 평행한 직선을 l,

두 직선 QF′, l의 교점을 H라 하자.



$\overline{QH}=\overline{QF'}+\overline{F'H}=\frac{3}{2}k+k=\frac{5}{2}k$

$\overline{HF}=\overline{F'P}=\sqrt{\overline{F'F}^2-\overline{PF}^2}=\sqrt{100-k^2}$

삼각형 QHF는 직각삼각형이므로

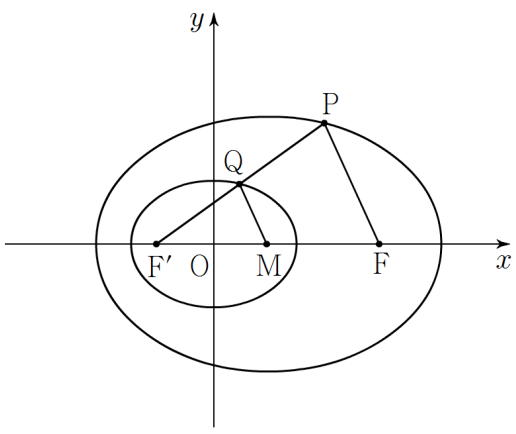
$\left(\frac{5}{2}k\right)^2+(100-k^2)=\left(\frac{k}{2}+10\right)^2$

$k(k-2)=0$에서 $k>0$이므로 $k=2$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(k+5)=2\times7=14$

13. 정답 ④

[해설]



선분 FF′의 중점을 점 M이라 하면 $\overline{FF'}=16$이므로

$\overline{PF'}=16$, $\overline{F'Q}=\overline{QP}=8$

타원의 정의에 의해 $\overline{PF}+\overline{PF'}=24$이므로

$\overline{PF}=24-16=8$

또, 선분 FF′의 중점이 점 M이므로

$\overline{MF}=\overline{MF'}=\frac{12-(-4)}{2}=8$ ∴ M(4, 0)

또, 삼각형 PFF′에서 중점연결정리에 의해

$\overline{QM}=\frac{1}{2}\overline{PF}=4$

이제 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 중심이 원점이고 장축의 길이가 $2a$다.

한 초점이 점 F′이므로 다른 초점은 (4, 0)인 점 M이다.

점 Q가 타원 위의 한 점이고, $\overline{QF'}+\overline{QM}=8+4=12$이므로 장축의 길이가 12이다.

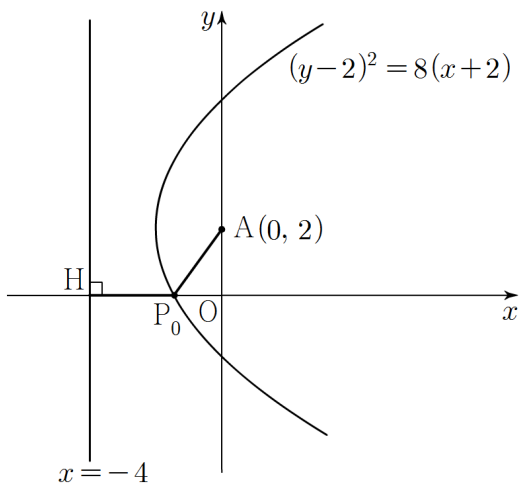
따라서 $2a=12$에서 $a=6$

초점이 F′이므로 $\sqrt{6^2-b^2}=4$, $b^2=20$

∴ $\overline{PF}+a^2+b^2=8+36+20=64$

14. 정답 ③

[해설]



점 A가 포물선 $(y-2)^2=-8(x+2)$의 초점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{AP}$는 점 P에서 이 포물선의 준선까지의 거리와 같다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.

$\overline{OP}+\overline{PA}=\overline{OP}+\overline{PH}$이므로 그 최솟값은 점 P가 x축 위에 있을 때 선분 OH와 같다.

준선이 $x=-4$이므로 점 H의 좌표는 $(-4, 0)$이고 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 4다.

점 Q는 $\overline{OQ}+\overline{QA}=4$를 만족하므로 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이다.

이 타원의 장축은 직선 OA인 y축이고 타원의 중심이 점 $(0, 1)$이므로

$M=1+2=3$, $m=1-2=-1$

∴ $M^2+m^2=9+1=10$

15. [정답] ③

[해설]

타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는

점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{32}+\frac{by}{8}=1$

접선이 점 $(8, 0)$을 지나므로 $\frac{8a}{32}=1$, $a=4$

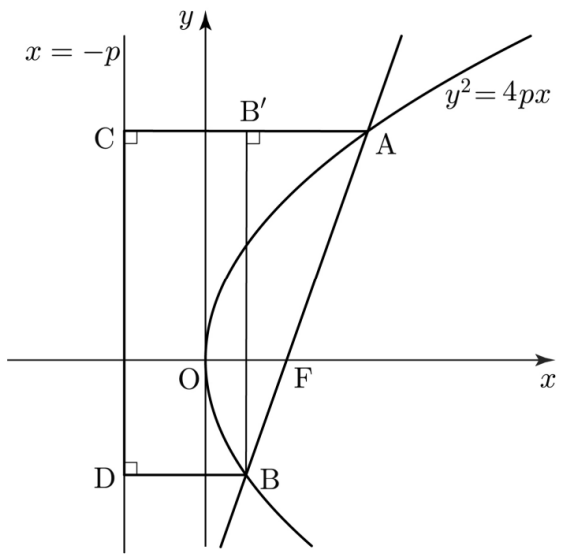
점 $(4, b)$가 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로 $\frac{16}{32}+\frac{b^2}{8}=1$, $b^2=4$

$b>0$이므로 $b=2$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $a+b=4+2=6$

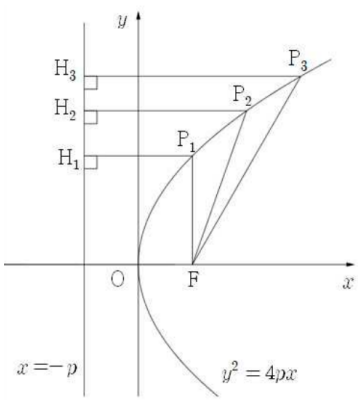
16. [정답] ①
[해설]



$\overline{AC}=2k$, $\overline{BD}=k$ $(k>0)$이라 하자.
포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AC}+\overline{BD}=2k+k=3k$
점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 B′이라 하자.
$\overline{BB'}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$
사각형 ACDB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(2k+k)\times 2\sqrt{2}k=3\sqrt{2}k^2=12\sqrt{2}$
$k^2=4$, $k=2$
따라서 선분 AB의 길이는 $3k=6$

17. ① 1
접선의 방정식은 $x-y-=1$ 이므로 x 절편은 1 이다.

18. ③ 3



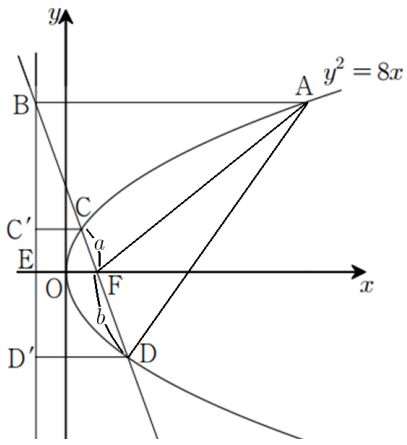
$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=2p+3p+4p=27$ 이므로 $p=3$ 이다.

19. [출제의도] 쌍곡선을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구한다.
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 의 점근선의 기울기는
$\pm\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a^2}}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{a}$
이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$이므로
$\frac{3\sqrt{3}}{a}=3$에서 $a=\sqrt{3}$
따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=2\sqrt{3}$

20. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.
$\overline{AF}=\overline{AH}$ 이고 포물선의 축이 x축이므로 이 포물선의 준선은 y축이다.
포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 1 이므로 포물선의 방정식은
$y^2=4(x-1)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
$\overline{AH}:\overline{BH'}=\overline{OH}:\overline{OH'}=\overline{AF}:\overline{BF}=1:4$
점 A의 좌표를 $(a, b)(a>0,\ b>0)$으로 놓으면 점 B의 좌표는 $(4a, 4b)$이다.
두 점 A, B는 포물선 $y^2=4(x-1)$ 위의 점이므로
$b^2=4(a-1)$, $16b^2=4(4a-1)$
$16\times 4(a-1)=4(4a-1)$, $12a=15$, $a=\frac{5}{4}$
따라서 $\overline{AF}=a=\frac{5}{4}$

21. 정답 ③
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 (x_1, y_1)에서 접선 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이므로
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$의 $(\sqrt{3}, -2)$에서 접선 방정식은 $\frac{\sqrt{3}x}{a^2}-\frac{2y}{6}=1$
기울기는 $\frac{3\sqrt{3}}{a^2}$이다.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$은 $(\sqrt{3}, -2)$을 지나므로 대입하면,
$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{6}=1$, $a^2=9$
$\frac{3\sqrt{3}}{a^2}=\frac{3\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 정답 ③



F(2, 0)이고, 준선은 직선 $x=-2$이다. 준선이 x축과 만나는 점을 E라 하고, 두 점 C, D에서 준선에 내린 수선의 발을 C′, D′
포물선의 정의에 따라 $\overline{CF}=\overline{CC'}=a$, $\overline{DF}=\overline{DD'}=b$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$이고, 삼각형 BCC′과 삼각형 BDD′은 1 : 2닮음이므로
$a:b=1:2$, $b=2a$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{3}{2a}=\frac{1}{2}$, $a=3$, $b=6$
$\overline{CC'}=3$이므로 C$(1, 2\sqrt{2})$, F(2, 0)이므로 두 점을 지나는 직선은 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$, 점 B의 x좌표가 -2이므로 직선에 대입해보면 $y=8\sqrt{2}$, B$(-2, 8\sqrt{2})$, 점 A의 y좌표가 $8\sqrt{2}$이므로
$128=8x$, $x=16$, A$(16, 8\sqrt{2})$
삼각형 ABF의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 18\times 8\sqrt{2}=72\sqrt{2}$
$\overline{BF}=12$, $\overline{BD}=18$이므로 삼각형 $\triangle ABF:\triangle ABD=2:3$이므로 삼각형 ABD의 넓이는 $72\sqrt{2}\times\frac{3}{2}=108\sqrt{2}$

23.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(b>a>0)$이라 하자. 두 초점의 좌표가 $(0,\,3)$, $(0,\,-3)$이므로 $b^2-a^2=9$ …… ㉠
타원이 y축과 만나는 점 $(0,\,7)$은 장축의 한 끝점이므로 $b=7$
㉠에서 $a=2\sqrt{10}$
따라서 타원의 단축의 길이는
$2a=4\sqrt{10}$

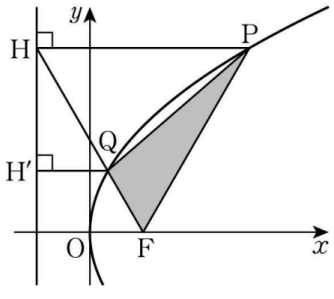
24.
$4x^2-8x-y^2-6y-9=0$에서
$4(x-1)^2-(y+3)^2=4$
$(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$

쌍곡선 $(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은
$y-(-3)=2(x-1),\quad y=2x-5$
직선 $y=2x-5$의 x절편, y절편이 각각 $\frac{5}{2}$, -5이다. 따라서 직선 $y=2x-5$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

25.
타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는 $(4,\,0)$, $(-4,\,0)$
이고 장축의 길이는 10이므로
$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$, $\overline{FF'}=2\times4=8$ …… ㉠
세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{FF'}$…… ㉡
㉠, ㉡에서
$\overline{PF}=2(10-\overline{PF})-8$
$\overline{PF}=4$이므로 $\overline{PF'}=6$
$\overline{PF'}<\overline{FF'}$이므로 점 P의 x좌표를 t라 할 때,
$0<t<4$
점 P에서 선분 FF′에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HF}=4-t$, $\overline{HF'}=4+t$
$\overline{PH}^2=\overline{PF'}^2-\overline{HF'}^2=\overline{PF}^2-\overline{HF}^2$에서
$6^2-(4+t)^2=4^2-(4-t)^2$
$t=\frac{5}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

26.



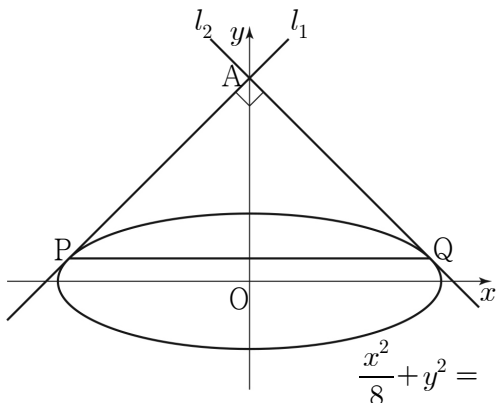
점 Q에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 점 Q는 포물선 위의 점이므로 $\overline{QF}=\overline{QH'}$

조건 (가)에서 $\overline{QF}:\overline{QH}=1:2$이므로
$\cos(\angle HFO)=\cos(\angle HQH')=\frac{\overline{QH'}}{\overline{QH}}=\frac{1}{2}$
그러므로 $\angle HFO=60^\circ$
$\overline{PH}\,/\!/\,\overline{OF}$이므로 $\angle PHF=\angle HFO=60^\circ$
이때 삼각형 PHF는 $\overline{PF}=\overline{PH}$인 이등변삼각형이므로
$\angle PFH=\angle PHF=60^\circ$
$\angle FPH=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$이므로
삼각형 PHF는 정삼각형이다.
이때 초점 F의 좌표가 $(p,\,0)$이므로
$\overline{FH}=4p$
조건 (나)에서 삼각형 PQF의 넓이는 정삼각형 PHF의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로
$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4p)^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $p^2=2$
따라서 $p>0$이므로 $p=\sqrt{2}$

27.
$c^2=9+16=25$, $c=5$에서 $\overline{FF'}=2c=10$이고
$\overline{FP}=\overline{FF'}=10$
쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 6이므로
$\overline{F'P}-\overline{FP}=6$, $\overline{F'P}=\overline{FP}+6=16$
따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는
$\overline{F'P}+\overline{FF'}+\overline{FP}=16+10+10=36$

28.
직선 $x=-c$는 포물선의 준선이므로 $\overline{PQ}=\overline{FP}=8$
삼각형 FPQ의 넓이가 24이고 $\angle F'QP=\frac{\pi}{2}$이므로
$\frac{1}{2}\times8\times\overline{F'Q}=24$에서 $\overline{F'Q}=6$
직각삼각형 PQF′에서 $\overline{F'P}=\sqrt{8^2+6^2}=10$
따라서 타원의 장축의 길이는
$\overline{FP}+\overline{F'P}=8+10=18$

29.



두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
삼각형 APQ는 직각이등변삼각형이고
직선 l_1의 기울기는 1이다.
타원 C에 접하고 기울기가 1인
직선 l_1의 방정식은 $y=x+\sqrt{8\times1^2+1}=x+3$
타원 C와 직선 $y=x+3$이 만나는 점 P의
x좌표를 k라 하면
$\frac{k^2}{8}+(k+3)^2=1$
$9k^2+48k+64=(3k+8)^2=0$에서 $k=-\frac{8}{3}$
따라서 선분 PQ의 길이는 $\frac{8}{3}\times2=\frac{16}{3}$

30.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이므로

$2a=6$

$a=3$ ……㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

이때, $a>0,\ b>0$이므로

$\frac{b}{a}=2$

$b=2a$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=2\times3=6$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을

$\mathrm{F}(c,0),\ \mathrm{F}(-c,0)((c>0)$

이라 하면

$c^2=a^2+b^2$

$=3^2+6^2$

$=45$

$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\mathrm{c}=6\sqrt{5}$

31.

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}$ 즉, $y=x\pm2$

직선 $y=x+2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접 하는 점이 B이고 직선 $y=x-2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 D일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 최대이다.

두 직선 $y=x+2,\ y=x-1$사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x+2$ 위의 점 $(0,2)$에서 직선 $y=x-1$즉 $x-y-1=0$사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

두 직선 $y=x-2,\ y=x-1$사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0,-2)$에서 직선 $y=x-1$ 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_2=\frac{|0-(-2)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$와 직선 $y=x-1$

이 만나는 두 점 A, C의 좌표를 구해 보자.

$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$에서

$2x(2x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$x=0$일 때, $y=-1$

$x=\frac{3}{2}$일 때, $y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

두 점 A, C가

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(0,-1)$

이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

32.

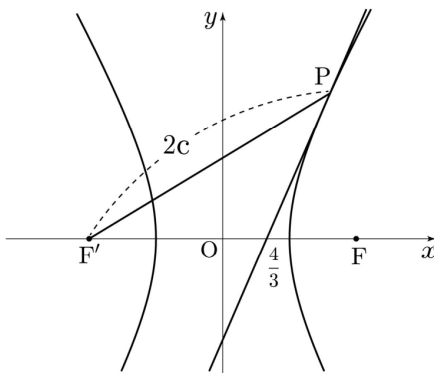
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,6)$에서의 접선의 방정식은 $6y=2(x+9)$

준선의 방정식이 $x=-1$이므로 $a=-1$

점 $(-1,b)$가 접선 위의 점이므로 $b=\frac{8}{3}$

따라서 $a+b=\frac{5}{3}$

33.



점 P의 좌표를 (x_1,y_1)이라 하면

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{4}-\frac{y_1y}{k}=1$

이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{4}{x_1}$

$\frac{4}{x_1}=\frac{4}{3}$이므로 $x_1=3$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로 $\sqrt{(3+c)^2+y_1^2}=2c$

$y_1^2=3c^2-6c-9$ ……㉠

점 $\mathrm{P}(3,y_1)$이 쌍곡선 위의 점이고

$k=c^2-4$이므로 $\frac{9}{4}-\frac{y_1^2}{c^2-4}=1$

$y_1^2=\frac{5}{4}(c^2-4)$ ……㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$3c^2-6c-9=\frac{5}{4}(c^2-4)$

$7c^2-24c-16=0,\ (7c+4)(c-4)=0c>0$이므로 $c=4$

따라서 $k=12$

34.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1,\ \frac{2x}{a}-\sqrt{3}y=1$

이고 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

따라서 $\frac{2}{\sqrt{3}a}\times(-\sqrt{3})=-1$에서 $a=2$

35.

$\overline{\mathrm{AF'}}=5,\ \overline{\mathrm{AF}}=3$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{AF'}}^2=-\overline{\mathrm{AF}}^2=5^2-3^2=16$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF'}}=4$

타원의 두 초점의 좌표를 각각 $\mathrm{F}(c,0),\ \mathrm{F'}(-c,0)$

$(c>0)$이라 하면 $2c=4$이므로 $c=2$이고,

타원의 성질에 의하여 $c^2=a^2-5$이므로 $a^2=9$이다.

$\therefore\ a=3$

타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 $2a$와 같으므로 6이다.

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$(\overline{PF'}+\overline{PF})+\overline{FF'}=6+4=10$ 이다.

36.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{16\times2^2+8}$, $y=2x\pm6\sqrt{2}$

두 직선의 y절편은 각각 $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$이다.

따라서 $\overline{AB}=12\sqrt{2}$

37.

포물선 $x^2=8(y+2)$에서

초점 F의 좌표는 $(0,0)$, 준선의 방정식은 $y=-4$

점 P의 좌표를 $(a,b)\,(a>0,\ b>0)$이라 하자.

점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{PF}=\overline{PH}$

$\overline{PH}+\overline{PF}=40$에서 $\overline{PF}=\overline{PH}=20$

$\overline{PH}=|b-(-4)|=20$에서 $b=16$

$\overline{PF}=\sqrt{a^2+16^2}=20$에서 $a=12$

점 $P(12,16)$은 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$16^2=48p$이다.

따라서 $p=\frac{16}{3}$

38.

포물선 방정식 $y^2=4px$의 초점 $p=\frac{1}{3}$이므로 $y^2=\frac{4}{3}x$

$(a,\ 2)$를 대입하면, $4=\frac{4}{3}a$, $\therefore\ a=3$

39.

타원의 접선 방정식 $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$이므로

$(2,\ 1)$을 대입하면, $1=2m\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$, $(1-2m)^2=m^2a^2+b^2$

$m=-\frac{1}{2}$이므로 $4=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $a^2+4b^2=16$

$(2,\ 1)$은 타원 위의 점이므로 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$, $a^2+4b^2=a^2b^2=16$

$4a^2b^2=64$, a^2, $4b^2$은 더하면 16 곱하면 64이므로 $a^2=8$, $4b^2=8$

$c^2=a^2-b^2=8-2=6$,

$\therefore$ 두 초점 사이 거리 $2c=2\sqrt{6}$

40.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하자. 주축의 길이가 8이므로 $2a=8$에서

$a=4$

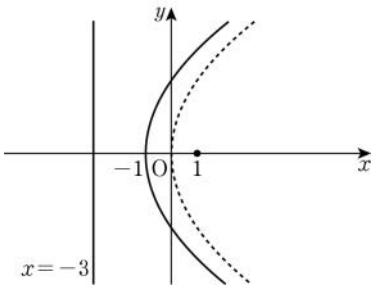
한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$에서

$b=3$

$c^2=a^2+b^2=4^2+3^2=25$

$c>0$이므로 $c=5$

41.



꼭짓점이 점 $(-1,0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인

포물선의 초점은 $(1,0)$이므로 구하는 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2=8(x+1)$, 즉 $y^2=8x+8$

$a=8$, $b=8$이므로

$a+b=16$

42.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c,0)$, $(-c,0)\,(c>0)$이라 하면

$c^2=9+16=25$

에서 $c=5$이므로 $F(5,0)$, $F'(-5,0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AF'}-\overline{AF}=6$ …… ㉠

삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24이므로

$\overline{AF}+\overline{AF'}+\overline{FF'}=24$

이고 $\overline{FF'}=10$이므로

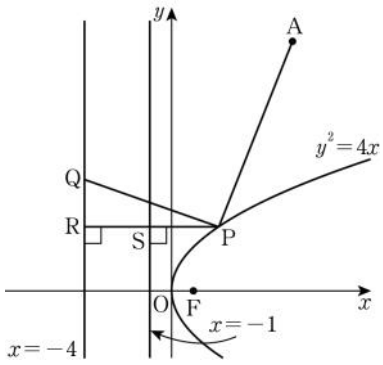
$\overline{AF}+\overline{AF'}=14$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AF}=4$, $\overline{AF'}=10$이므로 삼각형 AF′F는 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 AF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{10^2-2^2}=8\sqrt{6}$

43.



포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1,0)$이다. 점 P에서 직선 $x=-4$와 포물선의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면

$\overline{PR}=\overline{PS}+\overline{SR}=\overline{PS}+3$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PS}=\overline{PF}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}\ge\overline{AP}+\overline{PR}$

$=\overline{AP}+\overline{PS}+3$

$=\overline{AP}+\overline{PF}+3$

$\ge\overline{AF}+3$

$=\sqrt{5^2+12^2}+3$

$=16$

따라서 점 P는 선분 AF와 포물선 $y^2=4x$가 만나는 점이고, 이 교점에서 직선 $x=-4$에 내린 수선의 발이 Q일 때, $\overline{AP}+\overline{PQ}$는 최솟값 16을 가진다.

44.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(4,\ 7)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{4x}{2}-\frac{7y}{7}=1$,

$2x-y=1$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$

45.

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점이므로

$\overline{OP}=\overline{OQ}$, $\overline{QF'}=\overline{PF}$

$\overline{PF'}+\overline{QF'}=\overline{PF'}+\overline{PF}=12$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20이므로 $\overline{PQ}=8$
따라서 $\overline{PQ}=2\overline{OP}$에서 $\overline{OP}=4$

46.
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면
포물선의 정의에 의해 $\overline{HA}=\overline{FA}=8$
$\overline{CA}=\overline{HA}-\overline{HC}=8-p$
$\overline{FB}=\overline{OB}-\overline{OF}=8-2p$
$\overline{AB}=h$라 하면
사다리꼴 OFAC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{(8-p)+p\}\times h=4h$
직각삼각형 FBA의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(8-2p)\times h=(4-p)h$
$4h:(4-p)h=2:1$이므로 $p=2$
$\overline{FB}=4$이므로 직각삼각형 FBA에서
$h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$
따라서 삼각형 ACF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

47.
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 4이므로
$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$에서 $\overline{PF'}=7$
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이가 $2|a|$이므로
$\overline{PF'}+\overline{PF}=7+3=2|a|$에서 $a^2=25$
타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$에서 $c^2=25-7=18$
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $4+b^2=c^2=18,\ b^2=14$
따라서 $a^2+b^2=25+14=39$

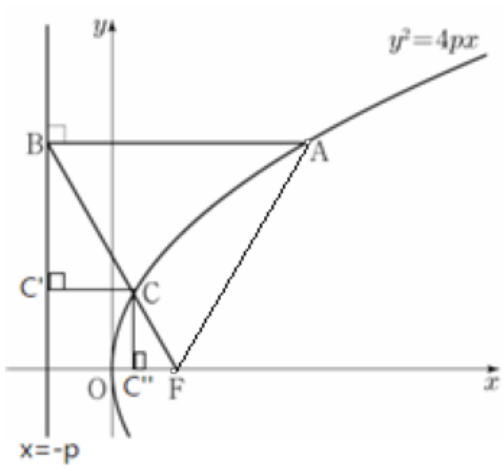
48.
타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은
$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$
이므로 이 직선의 x절편은 4이다.

49.
점 $P(4,k)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로
$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ … ㉠
점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은
$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$
이므로 두 점 Q와 R의 좌표는 각각 $Q\left(\frac{a^2}{4},0\right)$, $R\left(0,-\frac{b^2}{k}\right)$
따라서 삼각형 QOR의 넓이는
$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{4}\times\left|-\frac{b^2}{k}\right|=\frac{a^2b^2}{8k}$
삼각형 PRS의 넓이는
$A_2=\frac{1}{2}\times\overline{PS}\times\overline{OS}=\frac{1}{2}\times k\times4=2k$
이므로
$A_1:A_2=9:4$에서
$\frac{a^2b^2}{8k}:2k=9:4$
$36k^2=a^2b^2$ … ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{\frac{36k^2}{a^2}}=1$, 즉 $\frac{16}{a^2}-\frac{a^2}{36}=1$
$a^4+36a^2-16\times36=0$
$(a^2-12)(a^2+48)=0$
$a^2=12$에서 $a=2\sqrt{3}$이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$이다.

50.
쌍곡선 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax-by=1$
기울기가 2이므로 $\frac{a}{b}=2,\ a=2b$
점 $P(a,\ b)$가 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이므로\
$4b^2-b^2=1$
$3b^2=1$이고 b가 양수이므로 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$a=2b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
따라서 $ab=\frac{2}{3}$

51.
직선 F′Q와 직선 FP가 만나는 점을 R라 하자.
직선 F′Q가 선분 FP를 수직이등분하므로
$\overline{PR}=\overline{FR}=\sqrt{3}$
삼각형 FRF′에서
$\overline{FF'}=2\sqrt{7}$, $\overline{FR}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{F'R}=5$
장축의 길이가 8이므로
$\overline{F'Q}+\overline{QF}=\overline{F'R}+\overline{RQ}+\overline{QF}=8$
$\overline{FQ}=a$라 하면 $\overline{RQ}=3-a$
삼각형 FQR에서
$a^2=(3-a)^2+(\sqrt{3})^2,\ a=2$
따라서 선분 PQ의 길이는 2

52.
두 점 A, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 $\overline{AB}=x_1+p$
이때, $\overline{AB}=\overline{BF}$이므로 $\overline{BF}=x_1+p$ …… ㉠
한편, 점 C에서 포물선의 점근선에 내린 수선의 발을 C′이라 하면
$\overline{CF}=\overline{CC'}=x_2+p$ …… ㉡



이때, $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$이므로 ㉠과 ㉡에서
$\overline{BC}+3\overline{CF}=\overline{BF}+2\overline{CF}=(x_1+p)+2(x_2+p)=x_1+2x_2+3p$
$=6$ …… ㉢
한편, $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF}=\overline{AB}$이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 그러므로 $\angle OFB=60^\circ$
이때, $\overline{BF}\cos60^\circ=2p$, $\overline{CF}\cos60^\circ=p-x_2$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

이므로 $(x_1+p)\times\frac{1}{2}=2p$, $(x_2+p)\times\frac{1}{2}=p-x_2$

즉, $x_1=3p$, $x_2=\frac{1}{3}p$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $3p+\frac{2}{3}p+3p=6$, $\frac{20}{3}p=6$

따라서 $p=\frac{9}{10}$

53.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{4}{a}x$

이때, 점근선 중 하나의 기울기가 3이므로, $a>0$이므로 $\frac{4}{a}=3$

따라서 $a=\frac{4}{3}$

54. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{36\times\frac{1}{4}+16}$, $y=\frac{1}{2}x\pm5$

포물선 $y^2=ax$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

a가 양수이므로 $\frac{a}{2}=5$, $a=10$

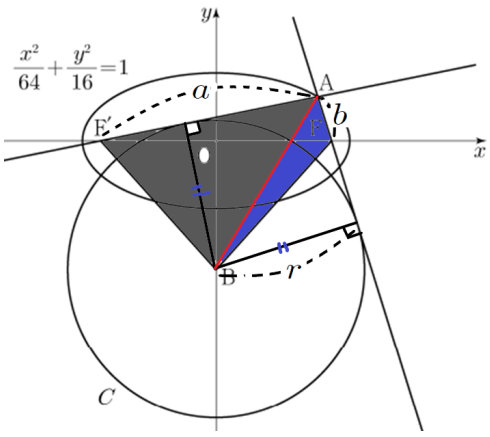
따라서 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는 $\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$

55. $a^2+b^2=c^2$이므로 $a^2+6=(3\sqrt{2})^2=18$, $a=2\sqrt{3}$

주축길이 $4\sqrt{3}$

56. $\overline{AF'}=a$, $\overline{AF}=b$, 원의 반지름을 r라 할 때,

타원의 정의에 따라 $a+b=16$

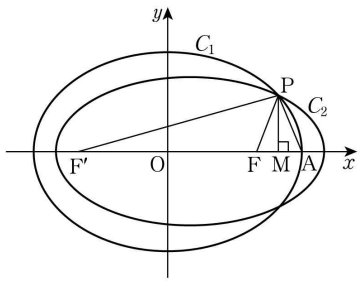


위의 그림과 같이 사각형 AFBF′의 넓이는

$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}r(a+b)=8r=72$, $\therefore\ r=9$

57. ④

[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이가 같으므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PA}+\overline{PF'}$, $\overline{PF}=\overline{PA}$

삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로 선분 FA의 중점을 M이라 하면 $\angle PMF=90^\circ$

$\cos(\angle AFP)=\frac{\overline{FM}}{\overline{PF}}=\frac{3}{8}$에서 $\overline{FM}=3k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{PF}=8k$

타원 C_1의 장축의 길이가 6이므로 $\overline{PF'}=6-8k$

$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{FA}=\overline{OA}-2\overline{FM}=3-6k$이므로

$\overline{F'M}=\overline{F'F}+\overline{FM}=2\overline{OF}+\overline{FM}=2(3-6k)+3k=6-9k$

직각삼각형 PF′M에서 $\overline{PM}^2=\overline{PF'}^2-\overline{F'M}^2$이고

직각삼각형 PFM에서 $\overline{PM}^2=\overline{PF}^2-\overline{FM}^2$이므로

$(6-8k)^2-(6-9k)^2=(8k)^2-(3k)^2$

$k(12-17k)=55k^2$, $12k(6k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=\frac{1}{6}$

따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이는 $\overline{PF}+\overline{PA}+\overline{FA}$

$=8k+8k+6k=22k=\frac{11}{3}$

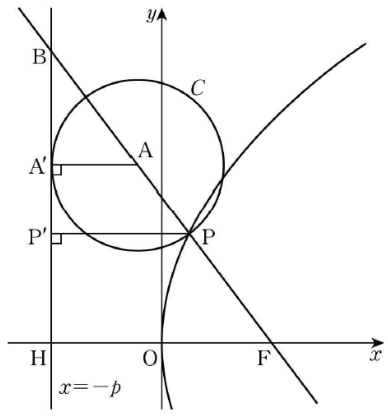
58. 96

[출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결한다.

원 C의 중심을 A라 하자.

세 점 A, P, F에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, H라 하자.

직선 PF가 준선 $x=-p$와 만나는 점을 B라 하자.



원 C의 반지름의 길이가 3이므로 $\overline{AA'}=3\overline{AP}=3$

직선 l의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 $\frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}=\frac{4}{3}$, 즉, $\overline{BA'}=4$, $\overline{BA}=5$, $\overline{BP}=8$

두 삼각형 BA′A, BP′P는 서로 닮음이므로 $\overline{A'A}:\overline{P'P}=\overline{BA}:\overline{BP}$,

$\overline{P'P}=\frac{8\times3}{5}=\frac{24}{5}$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{P'P}=\frac{24}{5}$이므로

$\overline{BF}=\overline{BA}+\overline{AP}+\overline{PF}=\frac{64}{5}$

두 삼각형 BA′A, BHF는 서로 닮음이므로 $\overline{A'A}:\overline{HF}=\overline{BA}:\overline{BF}$,

$\overline{HF}=\frac{\frac{64}{5}\times3}{5}=\frac{192}{25}$

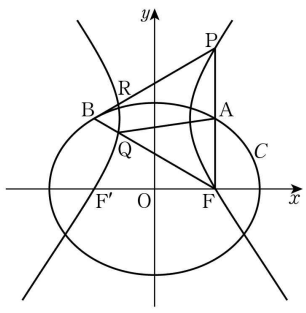
$2p=\overline{HF}=\frac{192}{25}$에서 $p=\frac{96}{25}$

따라서 $25p=96$

59. 100

[출제의도] 타원과 쌍곡선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



$\overline{AF}=a$, $\overline{BQ}=b$라 하자.

점 A는 선분 PF의 중점이고 조건 (가)에 의하여 $\overline{BF}=\overline{PF}=2a$

타원 C의 장축의 길이는 $\overline{BF}+\overline{BF'}=\overline{BF}+\overline{AF}=2a+a=3a$

조건 (나)에서 $(\overline{BF}+\overline{BF'})-3\overline{BQ}=3$, $3a-3b=3$, $b=a-1$

두 점 F, Q는 모두 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{AQ}-\overline{BQ}=\overline{BF}-\overline{AF}$,

$\overline{AQ}=(2a-a)+b=2a-1$

삼각형 AQF에서 $\overline{QF}=\overline{BF}-\overline{BQ}=2a-b=a+1$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AQ}^2=\overline{AF}^2+\overline{QF}^2-2\times\overline{AF}\times\overline{QF}\times\cos 60^\circ$

$(2a-1)^2=a^2+(a+1)^2-a(a+1)$, $3a^2-5a=0$, $a(3a-5)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{5}{3}$

따라서 $60\times\overline{AF}=60a=100$

60. [정답] ④

[출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R라 하고,

점 Q에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 S라 하자.

$\overline{PR}=k$라 하면

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}}{\frac{\overline{RQ}}{\overline{RH}}}=\frac{\overline{RH}}{k}=3$$에서 $\overline{RH}=3k$

두 점 P, Q가 포물선 C 위의 점이므로

$\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{PR}+\overline{RH}=4k$,

$\overline{QF}=\overline{SQ}=\overline{RH}=3k$

한편 원 O의 지름이 선분 PF이므로 삼각형 PQF는

$\angle FQP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{QF}^2}=\sqrt{16k^2-9k^2}=\sqrt{7}k$

$\overline{PQ}^2-\overline{PR}^2=\overline{QH}^2-\overline{RH}^2$

$7k^2-k^2=\overline{QH}^2-9k^2$에서 $\overline{QH}=\sqrt{15}k$

따라서 $\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{7}k}=\frac{\sqrt{105}}{7}$

61. [정답] 171

[출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $P\left(\frac{9}{2},k\right)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{9}{2a^2}x-\frac{k}{27}y=1$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{2}{9}a^2,0\right)$

두 점 R, S는 두 초점이 F, F′이고

점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{RF'}-\overline{RF}=\overline{SF}-\overline{SF'}=\frac{4}{9}a^2$

$\overline{RS}+\overline{SF}-\overline{RF}=(\overline{RF'}-\overline{SF'})+\overline{SF}-\overline{RF}$

$=(\overline{RF'}-\overline{RF})+(\overline{SF}-\overline{SF'})$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2$

$=\frac{8}{9}a^2=8$

에서 $a^2=9$

점 $P\left(\frac{9}{2},k\right)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점이므로

$k^2=\frac{135}{4}$

따라서 $4\times(a^2+k^2)=4\times\left(9+\frac{135}{4}\right)=171$

62. [정답] 80

[해설]

$\overline{PQ}=\alpha$, $\overline{QF'}=\beta$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF}=\alpha+\beta+2$, $\overline{QF}=\beta+4$

$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\alpha+\beta+4$, $2(\alpha+\beta)$, $2\alpha+2\beta+2$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

등차중항의 성질에 의해

$4(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+4+2(\alpha+\beta)+2$

$\therefore\ \alpha+\beta=6$

즉, $\overline{PF'}=6$이고 $\overline{PF}=\alpha+\beta+2=8$이다.

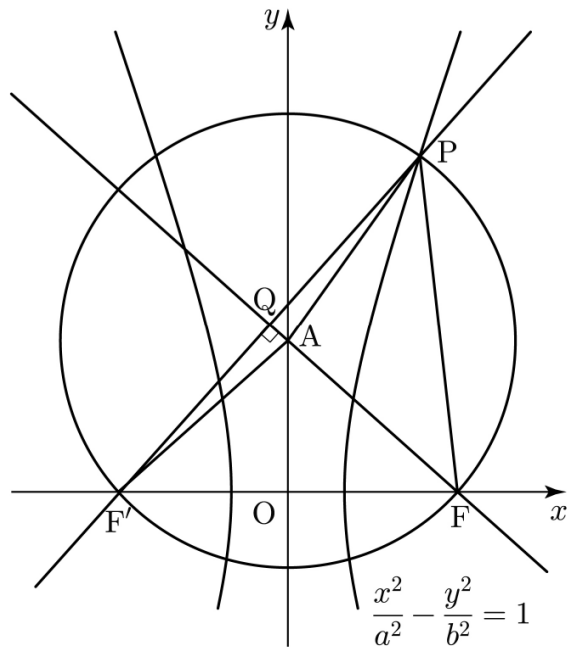
따라서 삼각형 PFF′는 직각삼각형이다.

$\tan\angle PF'F=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 60m=60\times\frac{4}{3}=80$

63. [정답] ②

[해설]



$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=4k$ $(k>0)$이라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2a$

$\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로

삼각형 APF′은 $\overline{AP}=\overline{AF'}$인 이등변삼각형이고

$\overline{QP}=\overline{QF'}=4a$

$\overline{QF}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{QP}^2}=\sqrt{(6a)^2-(4a)^2}=2\sqrt{5}a$

삼각형 FPF′에서 선분 FQ가 선분 PF′을

수직이등분하므로 삼각형 FPF′은

이등변삼각형이고 $\overline{FF'}=\overline{PF}=6a$

$\overline{OF}=c=3a$ (단, O는 원점)

$\angle AFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 QFF′에서

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\tan\theta=\dfrac{\overline{QF'}}{\overline{QF}}=\dfrac{4a}{2\sqrt{5}a}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

직각삼각형 OFA에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}}=\dfrac{6}{c}=\dfrac{2}{a}$

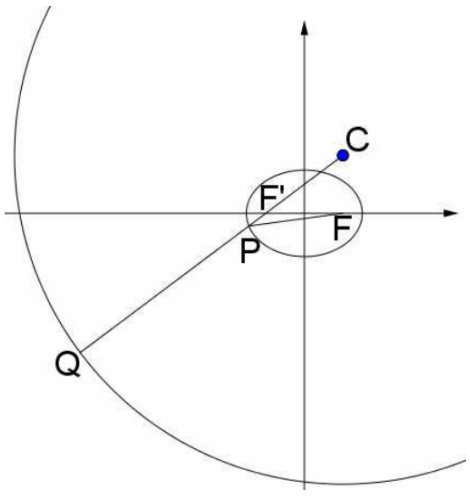
$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\dfrac{2}{a},\ a=\sqrt{5}$

$c^2=a^2+b^2=9a^2,\ b^2=8a^2$

따라서 $b^2-a^2=7a^2=35$

64. 17

원이 타원과 만나거나, 타원의 외부에 있는 경우는 모순이 생기므로 그림과 같이 원의 내부에 타원이 있어야 한다.



$\overline{PQ}-\overline{PF}=\overline{PQ}-(6-\overline{PF'})=\overline{PQ}+\overline{PF'}-6$

이므로 최솟값이 6일 때, r의 값은

$r=\overline{CF'}+\overline{F'P}+\overline{PQ'}=5+12=17$

이다.

65. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 타원의 초점의 좌표를 구한다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{18}=1$의 초점이 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$이므로 $a^2-18=c^2$,

$a^2=c^2+18$ …… ㉠

삼각형 RF′F가 한 변의 길이가 $2c$인 정삼각형이므로 $\overline{OR}=\sqrt{3}c$

점 F′이 선분 QF의 중점이므로 $\overline{QO}=3c$

직선 QR의 기울기가 $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{QO}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 타원 위의 점 P에서의 접선 QR의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2a^2+18}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+18}$

직선 QR의 y절편이 $\sqrt{3}c$이므로

$\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+18}=\sqrt{3}c,\ \dfrac{1}{3}a^2+18=3c^2$

㉠에 의하여 $\dfrac{1}{3}(c^2+18)+18=3c^2,\ \dfrac{8}{3}c^2=24$

따라서 $c^2=9$

66. 정답 11

두 점 P, Q는 모두 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이고 조건 (가)와 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$ … ㉠, $\overline{QF}-\overline{QF'}=6$ … ㉡

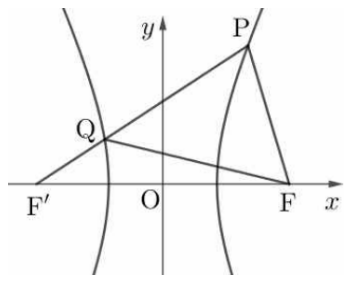
조건 (다)에서 삼각형 PQF의 둘레의 길이가 28이고, ㉡에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF}=\overline{PF}+\overline{PQ}+(\overline{QF'}+6)=\overline{PF}+(\overline{PQ}+\overline{QF'})+6$

$=\overline{PF}+\overline{PF'}+6,\ \overline{PF}+\overline{PF'}+6=28,\ \overline{PF}+\overline{PF'}=22$ … ㉢

조건 (나)에서 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이고 ㉠에서 $\overline{PF'}\neq\overline{PF}$이므로 $\overline{PF'}=\overline{FF'}$ 또는 $\overline{PF}=\overline{FF'}$이다.

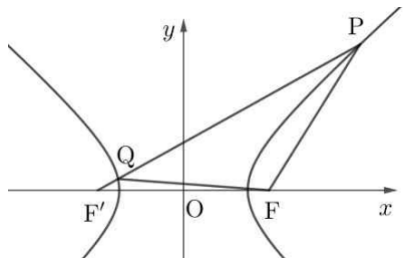
(i) $\overline{PF'}=\overline{FF'}$인 경우



$\overline{FF'}=2c$이므로 $\overline{PF'}=2c$, ㉠에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PF'}-6=2c-6$

㉢에 의하여 $2c+(2c-6)=22,\ c=7$

(ii) $\overline{PF}=\overline{FF'}$인 경우

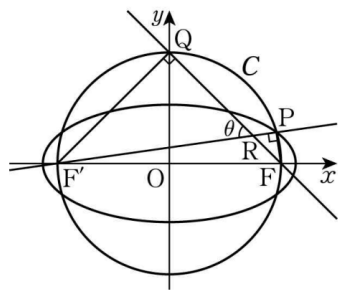


$\overline{FF'}=2c$이므로 $\overline{PF}=2c$, ㉠에 의하여 $\overline{PF'}=\overline{PF}+6=2c+6$

㉢에 의하여 $2c+(2c+6)=22,\ c=4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 c의 값의 합은 $7+4=11$

67.



두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고 $\cos(\angle QRF')=\cos(\angle PRF)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}$

$\overline{QR}=3t(t>0)$이라 할 때

$\overline{RF'}=\dfrac{\overline{QR}}{\cos\theta}=5t,$

$\overline{QF}=\overline{QF'}=\overline{RF'}\sin\theta=4t,$

$\overline{RF}=\overline{QF}-\overline{QR}=4t-3t=t,$

$\overline{RP}=\overline{RF}\cos\theta=\dfrac{3}{5}t$

$\overline{PF}=\overline{RF}\sin\theta=\dfrac{4}{5}t$

점 P는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{RF'}+\overline{RP}+\overline{PF}$

$=5t+\dfrac{3}{5}t+\dfrac{4}{5}t$

$=\dfrac{32}{5}t$

$2a=\dfrac{32}{5}t$에서 $a=\dfrac{16}{5}t$

점 F의 좌표를 $(c,0)(c>0)$이라 할 때

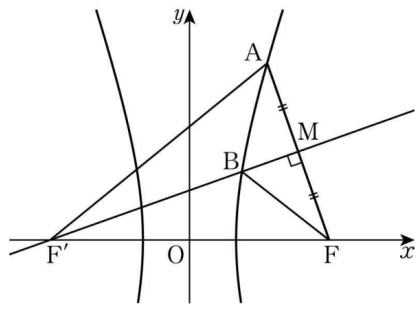
$\overline{FF'}=\sqrt{2}\times\overline{QF}$에서 $c=2\sqrt{2}t$

$b^2=a^2-c^2=\dfrac{256}{25}t^2-8t^2=\dfrac{56}{25}t^2$

따라서 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{\frac{56}{25}t^2}{\frac{256}{25}t^2}=\dfrac{7}{32}$

68.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$의 두 초점의 좌표를 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$이라 하자.
점 F′이 선분 AF의 수직이등분선 위의 점이므로
두 직각삼각형 AF′M, FF′M이 합동이다.
그러므로 $\overline{AF'}=\overline{FF'}=12$
점 A가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{AF'}-\overline{AF}=4$에서 $\overline{AF}=8$
점 M은 선분 AF의 중점이므로
$\overline{AM}=4$
직각삼각형 AF′M에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{MF'}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$
점 B가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{BF^2}=\overline{BF'}-4$이고
$\overline{BM}=8\sqrt{2}-\overline{BF'}$이므로
삼각형 BFM의 둘레의 길이는
$\overline{BF}+\overline{FM}+\overline{BM^2}=(\overline{BF'}-4)+4+(8\sqrt{2}-\overline{BF'})$
$=8\sqrt{2}$
따라서 $k=8\sqrt{2}$이므로 $k^2=128$

69.
좌표평면에서 점 F_1을 원점, 직선 A_1F_1을 x축, 직선 F_1F_2를 y축이라 하자.
포물선 P_1의 방정식을 $y^2=4p(x+p)(p>0)$이라 하면 $\overline{A_1F_1}=p$, $\overline{F_1C}=2p$에서 $\overline{A_1C}=\sqrt{p^2+(2p)^2}=p\sqrt{5}$
조건 (가)에서 $p\sqrt{5}=5\sqrt{5}$이므로 $p=5$
두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $A_1F_1A_2F_2$는 평행사변형이다.
포물선 P_1의 준선 l_1의 방정식은 $x=-10$이고 포물선 P_2의 준선 l_2의 방정식은 $x=10$이다.
점 B에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면
$\overline{BH_1}+\overline{BH_2}=20$ …… ㉠
점 B는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{F_1B}=\overline{BH_1}$, $\overline{F_2B}=\overline{BH_2}$
조건 (나)에서
$\overline{BH_1}-\overline{BH_2}=\frac{48}{5}$…… ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{BH_1}=\frac{74}{5}$, $\overline{BH_2}=\frac{26}{5}$
점 B에서 직선 F_1F_2에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{BH}=10-\overline{BH_2}=\frac{24}{5}$
직각삼각형 BF_2H에서
$\overline{F_2H}^2=\overline{F_2B}^2-\overline{BH}^2$
$=(\overline{F_2B}-\overline{BH})(\overline{F_2B}+\overline{BH})$
$=\left(\frac{26}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{26}{5}+\frac{24}{5}\right)$
$=4$
이므로 $\overline{F_2H}=2$
직각삼각형 F_1BH에서
$\overline{F_1H}^2=\overline{F_1B}^2-\overline{BH}^2$
$=(\overline{F_1B}-\overline{BH})(\overline{F_1B}+\overline{BH})$
$=\left(\frac{74}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{74}{5}+\frac{24}{5}\right)$
$=196$
이므로 $\overline{F_1H}=14$
$\overline{F_1F_2}=\overline{F_1H}+\overline{F_2H}=14+2=16$
그러므로 삼각형 BF_2F_1의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times16\times\frac{24}{5}=\frac{192}{5}$
따라서
$10S=10\times\frac{192}{5}=384$

70.
$\overline{OQ}=\overline{OF}$에서 점 Q는 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle FQF'=\frac{\pi}{2}$
$\overline{FQ}=k$라 하면 $\overline{FQ}:\overline{F'Q}=1:4$에서
$\overline{F'Q}=4k$이고 타원의 장축의 길이는 $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=5k$
삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이는 2이므로
삼각형 PF′Q의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{F'Q}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times2\times(\overline{F'P}+\overline{F'Q}+\overline{PQ})$
$\frac{1}{2}\times4k\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times2\times\{\overline{F'P}+\overline{F'Q}+(\overline{PF}+\overline{FQ})\}$
$2k\times\overline{PQ}=(\overline{F'P}+\overline{PF})+(\overline{F'Q}+\overline{FQ})=5k+5k=10k$
이므로 $\overline{PQ}=5$
$\overline{PF}=\overline{PQ}-\overline{FQ}=5-k$에서
$\overline{F'P}=5k-(5-k)=6k-5$이므로
직각삼각형 PF′Q에서
$(6k-5)^2=(4k)^2+5^2$
$20k^2-60k=20k(k-3)=0$, $k=3$
따라서 직각삼각형 F′QF에서
$\overline{F'F}^2=\overline{F'Q}^2+\overline{FQ}^2$
$(2c)^2=12^2+3^2=153$이므로
$c^2=\frac{153}{4}$, $c=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

71.
점 P의 x좌표를 k라 하면
점 P의 좌표는 $(k, 2\sqrt{kp})$이다.
직선 QR는 x축과 평행하고 $\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$에서
직선 PR는 y축과 평행하므로 두 점 P, R의 x좌표는 서로 같고 두 점 Q, R의 y좌표는 서로 같다.
그러므로 두 점 R, Q의 좌표는
$R(k, -2\sqrt{kp})$, $Q(-p, -2\sqrt{kp})$
포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$2\sqrt{kp}\,y=2p(x+k)$이고 점 Q를 지나므로
$-4kp=2p(-p+k)$, $p=3k$
$\overline{QR}=p+k=4k$에서 $\overline{RF}=\overline{FP}=4k$이고
$\overline{PR}=4\sqrt{kp}=4\sqrt{3}k$이므로
직각삼각형 PQR에서
$\overline{PQ}^2=(4k)^2+(4\sqrt{3}k)^2=64k^2$
$\overline{PQ}=8k$
사각형 PQRF의 둘레의 길이는

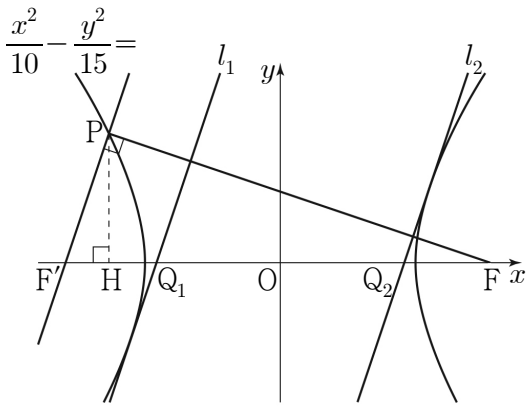
꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{FP}=8k+4k+4k+4k=140$, $k=7$
따라서 $p=3k=21$

72.

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=k-2\sqrt{10}$
삼각형 F′FP는 넓이가 15인 직각삼각형이므로
$\frac{1}{2}\times k\times(k-2\sqrt{10})=15$
$k^2-2\sqrt{10}k-30=(k-3\sqrt{10})(k+\sqrt{10})=0$
$k=3\sqrt{10}$이므로 $\overline{PF}=3\sqrt{10}$, $\overline{PF'}=\sqrt{10}$
직각삼각형 F′FP에서
$\overline{F'F}^2=(\sqrt{10})^2+(3\sqrt{10})^2=100$이므로
$\overline{F'F}=2c=10$, $c=5$
쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$에서
$10+a^2=c^2=25$이므로 $a^2=15$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
삼각형 F′FP와 삼각형 F′PH는 서로 닮음이므로
직선 PF′의 기울기는
$\frac{\overline{PH}}{\overline{F'H}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3$
쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$에 접하고 기울기가 3인
직선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10\times3^2-15}=3x\pm5\sqrt{3}$이므로
$l_1: y=3x+5\sqrt{3}$, $l_2: y=3x-5\sqrt{3}$
에서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각
$Q_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $Q_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$
따라서 $\overline{Q_1Q_2}=\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$에서
$p=3$, $q=10$이므로 $p+q=3+10=13$

73.
두 양수 a, b에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.
이 쌍곡선이 점 $(3, 3)$을 지나고 점 $(3, 3)$에서 직선 $y=2x-3$에 접할 때, $\overline{PB}-\overline{PA}$는 최대이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3, 3)$에서 의 접선의 방정식은 $\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$
즉, $y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$
이 직선이 $y=2x-3$이므로
$\frac{b^2}{a^2}=2$, $-\frac{b^2}{3}=-3$에서
$a^2=\frac{9}{2}$, $b^2=9$
두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로
$c^2=a^2+b^2=\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$
따라서 $c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

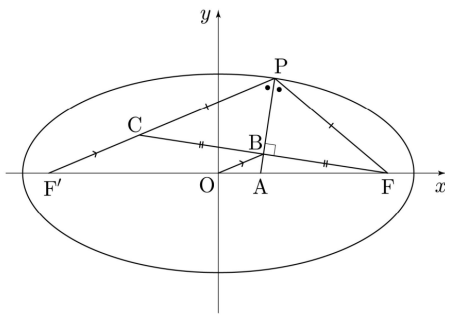
74.
포물선 $y^2=8x$의 초점은 $F(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P의 x좌표를 $a(0<a<2)$라 하면
$P(a, 2\sqrt{2a})$
$F'(-2, 2\sqrt{2a})$
포물선의 성질에 의해
$\overline{PF}=\overline{PF'}=2+a$
한편, 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은
$(y-2\sqrt{2a})^2=-4(2+a)(x-a)$
이 포물선의 준선의 방정식은 $x=2a+2$
점 Q에서 두 직선 $x=-2$, $x=2a+2$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면
포물선의 성질에 의해
$\overline{QF}=\overline{QR}$
$\overline{QF'}=\overline{QS}$
이므로
$\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{QR}+\overline{QS}=\overline{RS}=2a+4$
사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12이므로
$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=12$에서
$2\overline{PF'}+\overline{RS}=12$
$2(2+a)+(2a+4)=12$
$4a=4$
$a=1$
이때, P의 좌표는 $(1, 2\sqrt{2})$이고
점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은
$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$
이다.
두 포물선
$y^2=8x\cdots\cdots$㉠
$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)\cdots\cdots$㉡
이 만나는 점 Q의 y좌표를 구해 보자.
㉠에서
$x=\frac{y^2}{8}$
$x=\frac{y^2}{8}$을 ㉡에 대입하면
$(y-2\sqrt{2})^2=-12\left(\frac{y^2}{8}-1\right)$
$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$
$(y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2})=0$
$y=2\sqrt{2}$ 또는 $y=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$
점 Q의 y좌표는 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$이다.
점 Q에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{PF'}=2-(-1)=3$
$\overline{QH}=2\sqrt{2}-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{12}{5}\sqrt{2}$
삼각형 PF′Q의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{5}\sqrt{2}=\frac{18}{5}\sqrt{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $p=5,\ q=18$이므로
$p+q=5+18=23$

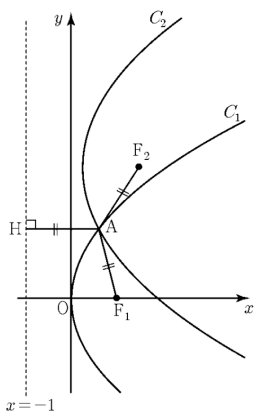
75.

$\overline{AF}=\frac{9}{2}$, $\overline{AF'}=\frac{15}{2}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{PF}:\overline{PF'}=3:5$
$\overline{PF}=3k,\ \overline{PF'}=5k(k>0)$이라 하자.
타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8k=2a$
그러므로 $a=4k$



직선 BF와 선분 PF′이 만나는 점을 C라 하면 각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로 만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다. 그러므로 $\overline{BC}=\overline{BF}$ 두 삼각형 FBO와 FCF′에서
$\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$ 두 삼각형 FBO, FCF′은 서로 닮음이므로
$\overline{OB}:\overline{F'C}=1:2\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC'}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$
$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}$
$k=\sqrt{3},\ a=4\sqrt{3}$
$c^2=a^2-b^2$이므로 $36=48-b^2$
$b^2=12,\ b=2\sqrt{3}$
따라서 $a\times b=24$

76.



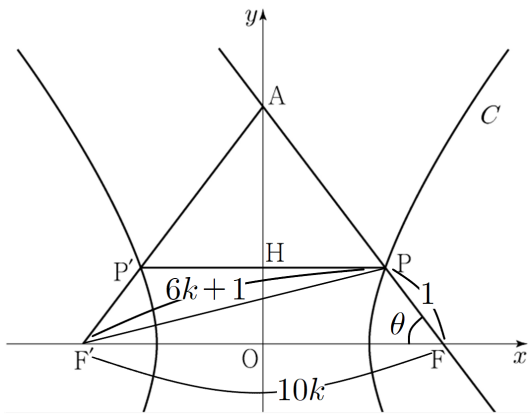
A에서 포물선 C_1의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AF_1}=\overline{AH}=\overline{AF_2}$에서 포물선 C_2의 준선이 포물선 C_1의 준 선과 같다.
즉, C_2의 준선 $x=-p+f(p)$이 $x=-1$이므로 $-p+f(p)=-1$이다.
$(p+a)^2-p+1=0$
$p^2+(2a-1)p+a^2+1=0$
이 식을 만족하는 p가 오직 하나이므로 판별식 $D=0$이다.
따라서, $D=(2a-1)^2-4a^2-4=0$에서 $a=-\frac{3}{4}$이다.

77.

$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$에서 점 P는 두 초점이 $F_1(4,0),\ F_2(-6,0)$이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1,0)$이므로
쌍곡선의 방정식은
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ …… ㉠
점 P는 포물선 $y^2=16x$와 쌍곡선 ㉠의 교점이므로
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{16x}{16}=1,\ x^2-7x-8=0,$
$(x-8)(x+1)=0,\ x=8$ 또는 $x=-1$
제1사분면 위의 점 P의 좌표는 $(8,8\sqrt{2})$이다.
포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식이
$8\sqrt{2}y=8(x+8)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+8)$ …… ㉡
이므로 점 F_3의 좌표는 $(-8,0)$이다.
두 점 $F_1(4,0),\ F_3(-8,0)$을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은 x축 또는 직선 $x=-2$ 위에 있다.
이때 선분 PF_3 위에 있는 꼭짓점은 직선 $x=-2$ 위에 있으므로 ㉡에 $x=-2$를 대입하면 $y=3\sqrt{2}$
이 타원의 단축의 길이는 $6\sqrt{2}$이고 두 초점 사이의 거리는 12이다.
따라서 $a^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=54$

78.

선분 OA와 $\overline{PP'}$의 교점을 H라 할 때, 삼각형 AFF′은 이등변삼각형이고, y축에 대칭인 쌍곡선이므로 삼각형 APP′도 이등변 삼각형이다.
그러므로 $\overline{AP}:\overline{HP}=5:3$
삼각형 APH의 길이의 비는 $5:4:3$이고 삼각형 AFO는 닮음이므로 길이의 비는 $5:4:3$
직선 AF의 기울기와 점근선의 기울기가 같으므로 $y=\pm\frac{4}{3}x$
쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 할 때, $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$이므로
$a=4k,\ b=3k$라 할 때, $16k^2+9k^2=c^2,\ c=5k$
얻어진 조건에 맞게 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.

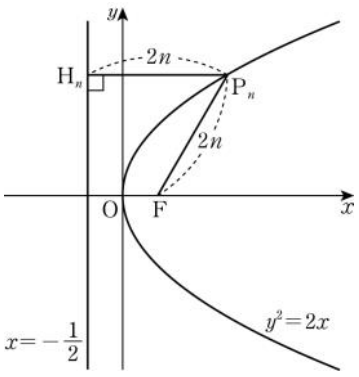


쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a=6k$이므로 $\overline{PF'}=6k+1$이라 할 수 있다.
$\angle AFF'=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이고 삼각형 PFF′에서 코사인 법칙에 따라 $(6k+1)^2=1+(10k)^2-20k\times\frac{3}{5}$
$36k^2+12k+1=100k^2-12k+1,\ 64k^2-24k=0,\ \therefore\ k=\frac{3}{8}$
주축의 길이 $2a=6k=\frac{9}{4}$

79.

포물선 $y^2=2x$의 초점은 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$이고
준선은 직선 $x=-\frac{1}{2}$이다.
점 P_n에서 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

꿈을 현실로!
희망 부산교육



포물선의 정의에 의하여

$\overline{P_nH_n}=\overline{FP_n}=2n$

이므로 점 P_n의 x좌표는 $2n-\frac{1}{2}$이다.

$y^2=2\left(2n-\frac{1}{2}\right)=4n-1$

에서 점 P_n의 y좌표는 $\sqrt{4n-1}$이다.

따라서 점 P_n의 좌표는 $\left(2n-\frac{1}{2},\ \sqrt{4n-1}\right)$이고

$\overline{OP_n}=\sqrt{\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{4n-1})^2}$

$=\sqrt{\left(4n^2-2n+\frac{1}{4}\right)+(4n-1)}$

$=\sqrt{4n^2+2n-\frac{3}{4}}$

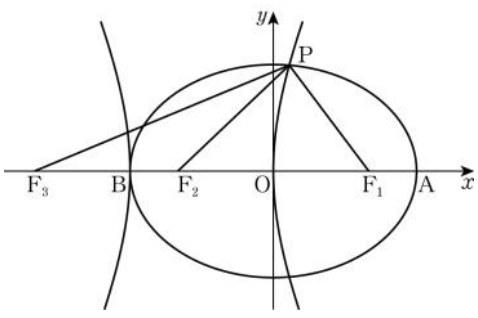
따라서

$\sum_{n=1}^{8}\overline{OP_n}^2=\sum_{n=1}^{8}\left(4n^2+2n-\frac{3}{4}\right)$

$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}-8\times\frac{3}{4}$

$=882$

80.



점 P에서 타원의 두 초점 F_1, F_2까지의 거리의 합은 장축인 선분 AB의 길이와 같다.

즉 $\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=6$ …… ㉠

점 P에서 쌍곡선의 두 초점 F_1, F_3까지의 거리의 차는 주축인 선분 BO의 길이와 같다.

즉 $\overline{PF_3}-\overline{PF_1}=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 더하면

$\overline{PF_2}+\overline{PF_3}=9$

쌍곡선의 두 초점이 F_3, F_1이므로

$\overline{F_3B}=\overline{OF_1}=c$

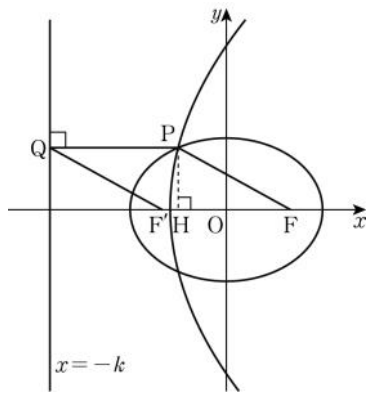
$\overline{BF_2}=\overline{BO}-\overline{F_2O}=3-c$

그러므로 $\overline{F_3F_2}=\overline{F_3B}+\overline{BF_2}=3$

따라서 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이는

$\overline{PF_2}+\overline{PF_3}+\overline{F_3F_2}=12$

81.



점 F가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP}=\overline{PQ}$이다.

조건 (나)의 $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$에서

$\overline{F'Q}=\overline{FF'}$

두 직선 FF′, PQ가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, F′FQ에서

$\angle PQF=\angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, F′FQ는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP=\angle PQF=\angle F'FQ=\angle F'QF$

이고, 선분 FQ는 공통이므로

두 삼각형 PQF, F′FQ는 서로 합동이다.

즉 $\overline{FP}=\overline{PQ}=\overline{F'Q}=\overline{FF'}$

장축의 길이가 12이고 $\overline{FP}=\overline{FF'}=2c$이므로

$\overline{PF'}=12-2c$

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2=(2c)^2+(2c)^2-2\times(2c)^2\times\cos(\angle F'FP)$

$c^2-16c+48=0$

$(c-4)(c-12)=0$

장축의 길이가 12이므로 $c<6$에서 $c=4$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{FP}=8$에서

$\overline{FH}=\overline{FP}\times\cos(\angle F'FP)=7$

$\overline{FH}=7$에서 점 H의 x좌표는 $4-7=-3$이고

$\overline{PQ}=\overline{FP}=8$에서 점 H의 x좌표는 $-k+8$이므로

$-3=-k+8$, 즉 $k=11$

따라서 $c+k=15$

82.

점 $F\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$이 포물선의 초점이므로

준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{PF}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$에서 $x_1=4,\ y_1=6$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$6y=\frac{9}{2}(x+4)$이고 점 F′을 지나므로 $c=4$

$P(4,\ 6)$, $F'(-4,\ 0)$이므로 $\overline{PF'}=10$

타원의 장축의 길이는 $\overline{PF'}+\overline{PF}=\frac{65}{4}$이고

$\overline{F'F}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$이므로

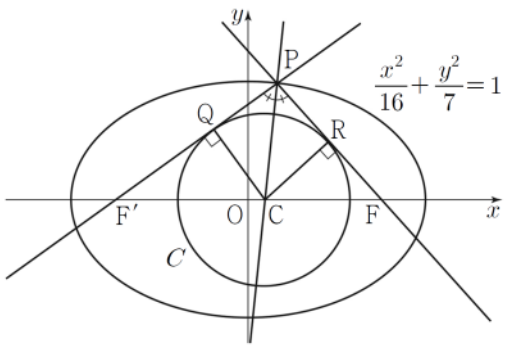
타원의 단축의 길이를 k라 하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$

따라서 타원의 단축의 길이는 15

83.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



$c^2=16-7=9$, $c=3$

$\overline{FF'}=2c=6$

직선 FP가 원 C와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{PQ}=a$라 하면

$\overline{PF}=2\overline{PQ}=2a$이므로 $\overline{RF}=\overline{PF}-\overline{PR}=\overline{PF}-\overline{PQ}=a$

$\overline{PR}=\overline{RF}$이고, $\angle PRC=90°$이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{CP}=l$이라 하면 $\overline{CP}=\overline{FC}$에서 $\overline{F'C}=6-l$

$\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{QF'}$이고

$\overline{PF'}+\overline{PF}=8$이므로 $\overline{QF'}=8-3a$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{PF'}>\overline{PF}$에서 $a<2$ …… ㉠

삼각형 FPF′에서 $\angle F'PC=\angle CPF$이므로

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'C}:\overline{CF}$

$(8-2a):2a=(6-l):l$에서 $l=\frac{3}{2}a$ …… ㉡

점 Q는 점 C에서 선분 PF′에 내린 수선의 발이므로

$\overline{F'C}^2-\overline{F'Q}^2=\overline{CP}^2-\overline{PQ}^2$

$(6-l)^2-(8-3a)^2=l^2-a^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의해 $4a^2-15a+14=0$

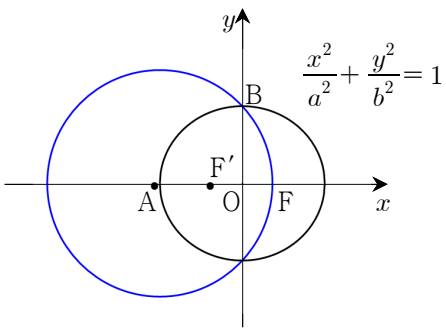
$(a-2)(4a-7)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{4}$

㉠에 의해 $a=\frac{7}{4}$, $l=\frac{21}{8}$

따라서 $24\times\overline{CP}=63$

84.

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$라 하면 두 초점의 좌표는

$F'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F(\sqrt{a^2-b^2},0)$

이다.

주어진 타원이 음의 x축과 만나는 점을 A, 양의 y축과 만나는 점을 B라 하면 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $A(-a,0)$, $B(0,b)$이다.

점 A를 중심으로 하고 두 점 B와 F를 지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$\overline{AB}=1$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

$b^2=1-a^2$ … ㉠

$\overline{AF}=1$에서 $\sqrt{a^2-b^2}+a=1$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2-(1-a^2)}=1-a$

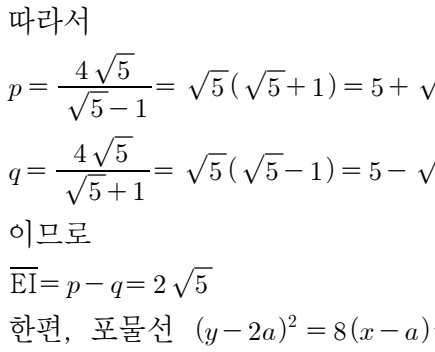
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$2a^2-1=1-2a+a^2$

$a^2+2a-2=0$

따라서 $a=-1+\sqrt{3}$ $(a>0)$

85.



직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2,0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

따라서 $\overline{AF}=p$, $\overline{EF}=q$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}=p$, $\overline{EH}=q$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 두 점 A, E의 x좌표는 각각 $p-2$, $q-2$이다.

선분 AI와 x축의 교점을 P, 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{FP}=p-4$, $\overline{FQ}=4-q$

이므로 두 직각삼각형 AFP, EFQ에서

$p=\sqrt{5}(p-4)$, $q=\sqrt{5}(4-q)$

따라서

$p=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)=5+\sqrt{5}$,

$q=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)=5-\sqrt{5}$

이므로

$\overline{EI}=p-q=2\sqrt{5}$

한편, 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B는 각각 두 점 E, A를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AE}$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AE}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AF}+\overline{EF})$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AC}+\overline{EH})$

$=\overline{BD}-\overline{EH}$

$=\overline{EJ}$

$=2\times\overline{EI}$

$=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

따라서 $k=4\sqrt{5}$이므로

$k^2=80$

[다른 풀이]

직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

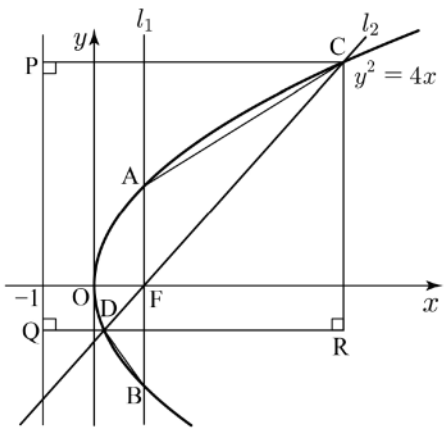
점 F의 좌표는 $(2,0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

이때 연립방정식

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$
의 해는 $y^2 = 4(y+4)$ 즉, $y^2 - 4y - 16 = 0$에서 $y = 2 \pm 2\sqrt{5}$
$y = 2 + 2\sqrt{5}$ 이면 $x = 3 + \sqrt{5}$
$y = 2 - 2\sqrt{5}$ 이면 $x = 3 - \sqrt{5}$
이므로 두 점 A와 E의 좌표는 각각 $A(3+\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$, $E(3-\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$이다.
포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$은 포물선 $y^2 = 8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB} = \overline{AE}$
따라서 포물선의 정의에 의해
$\overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AB}$
$= \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AE}$
$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AF} + \overline{EF})$
$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AC} + \overline{EH})$
$= \overline{BD} - \overline{EH}$
$= \overline{EJ}$
$= 2 \times \overline{EI}$
$= 2 \times \{(3+\sqrt{5}) - (3-\sqrt{5})\}$
$= 4\sqrt{5}$
$k = 4\sqrt{5}$ 이므로 $k^2 = 80$

86.



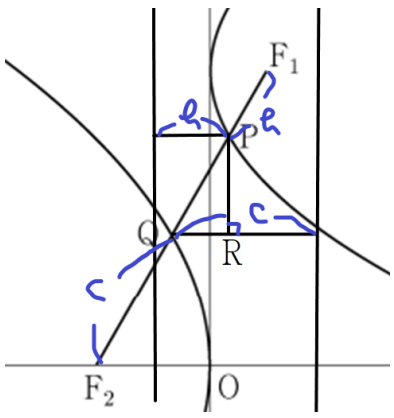
$\angle AFC = \angle DFB$이고 $\overline{FA} = \overline{FB}$이다.
삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배이므로
$\frac{1}{2} \times \overline{FA} \times \overline{FC} \times \sin(\angle AFC)$
$= 5 \times \frac{1}{2} \times \overline{FB} \times \overline{FD} \times \sin(\angle DFB)$
$\overline{FC} = 5\overline{FD}$
두 점 C, D에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 C를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 QD가 만나는 점을 R라 하자.
$\overline{FD} = s$라 하면 $\overline{QD} = \overline{FD} = s$
$\overline{PC} = \overline{FC} = 5s$
$\overline{DR} = \overline{QR} - \overline{QD} = 4s$, $\overline{CD} = 6s$에서
$\overline{CR} = 2\sqrt{5}\,s$
따라서 $m = \frac{\overline{CR}}{\overline{DR}} = \frac{2\sqrt{5}\,s}{4s} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

87.

점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1$, $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$
그러므로 점 S의 좌표는 (8, 0)이다. 한편, $c = \sqrt{16-12} = 2$이므로 F(2, 0), F′(−2, 0)
이때, 두 삼각형 F′FQ, F′SR는 $\angle QF'F = \angle RF'S$이고 $\overline{FQ} // \overline{SR}$이므로 닮은 삼각형이다. 한편, $\overline{F'F} = 4$, $\overline{F'S} = 10$이므로 두 삼각형 F′FQ, F′SR의 둘레의 길이의 비는 2 : 5
한편, 삼각형 F′FQ의 둘레의 길이는 타타원의 정의에 의해
$\overline{FQ} + \overline{QF'} = 2 \times 4 = 8$이므로 $\overline{FF'} + \overline{FQ} + \overline{QF'} = 4 + 8 = 12$
따라서, 구하는 삼각형 SRF′의 둘레의 길이를 l이라 하면
$12 : l = 2 : 5$이므로 $l = 30$

88. 직선 QR가 $\angle FQP$를 이등분하므로 $\overline{PQ} : \overline{QF} = \overline{PR} : \overline{RF}$
이때 $4\overline{PR} = 3\overline{RF}$ 이므로 $\overline{PQ} : \overline{QF} = 3 : 4$
$\overline{PQ} = 3k\,(k > 0)$이라 하면 $\overline{QF} = 4k$이고 $\angle PQF = 90°$
이므로 삼각형 PQF 에서 $\overline{PF} = 5k$
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2$이므로
$\overline{PF'} = 5k + 2$, $\overline{QF'} = \overline{PF'} - \overline{PQ} = (5k+2) - 3k = 2k + 2$
$F(\sqrt{17}, 0)$, $F'(-\sqrt{17}, 0)$이므로 직각삼각형 QF′F 에서
$\overline{FF'}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{QF'}^2$, $(2\sqrt{17})^2 = (4k)^2 + (2k+2)^2$
$5k^2 + 2k - 16 = 0$, $(5k-8)(k+2) = 0$, $k = \frac{8}{5}\,(k > 0)$
따라서 삼각형 PF′F 의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{QF} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{32}{5} = 32$

89. $F_1(p, a)$, $F_2(-1, 0)$
직선 F_1F_2은 $(-1, 0)$을 지나므로 $y = m(x+1)$이라 하면
$F_1(p, a)$이므로 $a = m(p+1)$, $\overline{F_1F_2} = 3$이므로 $(p+1)^2 + a^2 = 9$이므로
$(p+1)^2 + m^2(p+1)^2 = (p+1)^2(m^2+1) = 9$



위의 그림과 같이 직각삼각형 PQR을 나타내면
포물선의 정의에 따라 $b + c = \overline{F_1P} + \overline{F_2Q} = \overline{F_1F_2} - \overline{PQ} = 3 - 1 = 2$
$\overline{QR} = (b+c) - (\text{두 준선 간 거리}) = 2 - (p+1) = 1 - p$
$\angle F_1F_2O = \theta$라 할 때, $\tan\theta = m$이므로
직각 삼각형 PQR에서 $\tan\theta = \frac{\overline{PR}}{1-p} = m$, $\overline{PR} = m(1-p)$
$\overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2$이므로
$m^2(1-p)^2 + (1-p)^2 = (1-p)^2(m^2+1) = 1$
얻어진 두 조건식을 이용해서
$\frac{(p+1)^2(m^2+1)}{(1-p)^2(m^2+1)} = \left(\frac{p+1}{1-p}\right)^2 = 9$
$\therefore$ $\frac{p+1}{1-p} = 3$, $p + 1 = 3 - 3p$, $p = \frac{1}{2}$
$(p+1)^2 + a^2 = 9$에 $p = \frac{1}{2}$를 대입하면 $\frac{9}{4} + a^2 = 9$, $a^2 = \frac{27}{4}$
$\therefore$ $a^2 + p^2 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4} = \frac{28}{4} = 7$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

단원 14 평면벡터

해 설

1. [정답] ③
[출제의도] 벡터의 연산 계산하기
정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면
$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{ME}$
따라서 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|=|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{2}$

2. [정답] ②
[해설]
$2\vec{a}+\vec{b}=(4, 6)+(4, -2)$
$=(4+4, 6+(-2))$
$=(8, 4)$
따라서 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 12

3.
$|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{BE}|=2$

4.
두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로
$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$
를 만족하는 실수 l이 존재한다.
$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$에서
$3\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+2l\vec{b}$
$3=l$, $k=2l$
따라서 $k=6$

5.
0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$이므로
$(2m-1, 3m+1)=(3k, 12k)$
$2m-1=3k$ ……㉠
$3m+1=12k$ ……㉡
따라서 두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $m=1$

6.
$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=(2-n)\vec{a}-(m-4)\vec{b}$
$=\vec{a}-\vec{b}$
에서 $m-4=1$, $2-n=1$이므로
$m=5$, $n=1$
따라서 $m+n=6$

7.
두 벡터 $\vec{a}=(k+3, 3k-1)$과 $\vec{b}=(1, 1)$이 서로 평행하므로 적당한 실수 m에 대하여
$\vec{a}=m\vec{b}$
가 성립한다.
$(k+3, 3k-1)=m(1, 1)$에서
$k+3=m$, $3k-1=m$
따라서 $k=2$, $m=5$

8.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면
$(2, 4)=t(-1, k)$를 만족시키는 실수 $t(t\neq 0)$가 존재한다.
그러므로 $2=-t$, $4=kt$
따라서 $k=-2$

9. 0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{b}=k\vec{a}$
$(2m+1, 9)=(k(m-2), 3k)$이므로
$3k=9$, $k=3$
$2m+1=3(m-2)$, $2m+1=3m-6$
따라서 $m=7$

10. 정답 ④
[해설]
$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$에서
$2\overrightarrow{AB}+p(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-q\overrightarrow{AC}$
$(2-p)\overrightarrow{AB}+(-p-q)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$이므로 $2-p=0$, $-p-q=0$
따라서 $p=2$, $q=-2$이므로
$p-q=2-(-2)=4$

11. 정답 ②
[해설]
$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$에서
$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+3k(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD})+k(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$
$+3k^2(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})=0$
$|\overrightarrow{AB}|^2-3k|\overrightarrow{AB}|^2+k|\overrightarrow{BC}|^2=0$
$1-3k+k=0$
$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

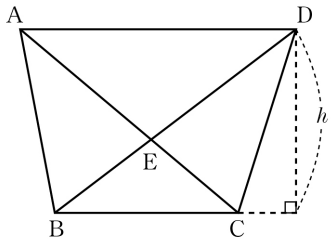
12. [정답] ⑤
[해설]
직선 l이 벡터 $\vec{u}=(3, -1)$에 평행하므로
직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하자.
직선 m의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(7, 1)$
$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$
$|\vec{v}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3, -1)\cdot(7, 1)=3\times 7+(-1)\times 1=20$
따라서
$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|20|}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

13. ⑤ 10π
점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다. 따라서 구하는 길이는 10π이다.

14. [출제의도] 평면벡터의 연산의 성질을 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.
선분 BD를 2:3으로 내분하는 점을 E라 하면
$\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{5}$
조건 (나)에서
$t\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AE}$
를 만족시키는 실수 t가 존재하므로 점 E는 선분 AC 위의 점이다.
조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$가 서로 평행하고
$\overline{BE}:\overline{ED}=2:3$
이므로 두 삼각형 EDA, EBC는 서로 닮음이고 닮음비는 3:2이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{BC}|=3:2$에서 $|\overrightarrow{BC}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|$ …… ㉠



사다리꼴 ABCD의 높이를 h로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AD}|\times h=12,\ |\overrightarrow{AD}|\times h=24$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|)\times h$

$=\frac{1}{2}\times\left(|\overrightarrow{AD}|+\frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|\right)\times h$

$=\frac{5}{6}\times|\overrightarrow{AD}|\times h=\frac{5}{6}\times 24$

$=20$

15. **정답** ②

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=|2\vec{a}-\vec{b}|^2=17,$

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=53-4\vec{a}\cdot\vec{b}=17,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=9$

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=11-2\times 9+9=2$

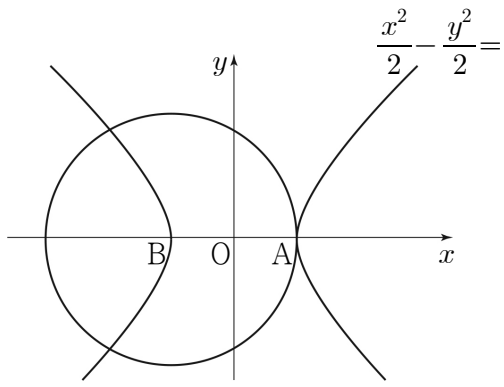
$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$

16.

쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 B라 하자.

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$

$|\overrightarrow{BP}|=k$를 만족시키는 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 쌍곡선이 만나는 점이다.



그림과 같이 점 P의 개수가 3이려면

$k=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

17.

두 직선

$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\ x-1=\frac{2-y}{3}$

즉,

$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\ x-1=\frac{y-2}{-3}$

의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$라 하면

$\vec{d_1}=(4,\ 3)$

$\vec{d_2}=(1,\ -3)$

따라서

$\cos\theta=\frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{|4\times 1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{5}{5\sqrt{10}}$

$=\frac{\sqrt{10}}{10}$

18.

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{2},\ \angle ABC=45^\circ$

이므로

$AH=BH=1$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=3,\ \overline{DI}=1$이고

$\triangle BID\backsim\triangle BHF$이므로

$\overline{BI}:\overline{DI}=\overline{BH}:\overline{FH}$

즉, $3:1=1:FH$

$\overline{FH}=\frac{1}{3}$

$\overline{AF}=\overline{AH}-\overline{FH}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

한편 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{BJ}=\overline{CJ}=2,\ \overline{BH}=\overline{HJ}=1$

이므로

$\overline{EJ}=2\overline{FH}=\frac{2}{3}$

직각삼각형 JCE에서

$\angle JCE=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}$

이고,

두 벡터 $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각의 크기는

$\frac{\pi}{2}+\theta$이다.

그리고 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EJ}$이므로

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{CE}$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times(-\sin\theta)$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times\left(-\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)=-|\overrightarrow{EJ}|^2=-\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{4}{9}$

19.

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$라 하자.

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y)$

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,\ y-6)$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$에서

$(x+2,\ y)\cdot(x-6,\ y-6)=0$

$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$

$x^2-4x-12+y^2-6y=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 10π

20.

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자.

그러면 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-3,\ y)$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=(x-3)^2+y^2=5$

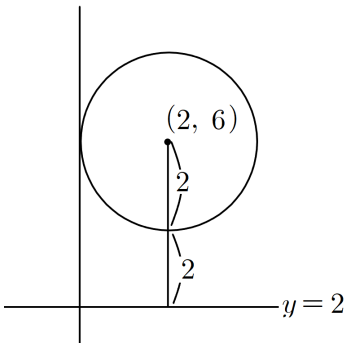
즉 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(3,\ 0)$이고 반지름이 $\sqrt{5}$인 원이다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육

이 도형과 직선이 접하므로
점 $(3, 0)$에서 직선 $x-2y+2k=0$에 이르는 거리가
반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|3+2k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Rightarrow |3+2k|=5 \Rightarrow 3+2k=5$ 또는 $3+2k=-5$
$\Rightarrow k=1$ 또는 $k=-4$
$\therefore k=1 (\because k$는 양수 $)$

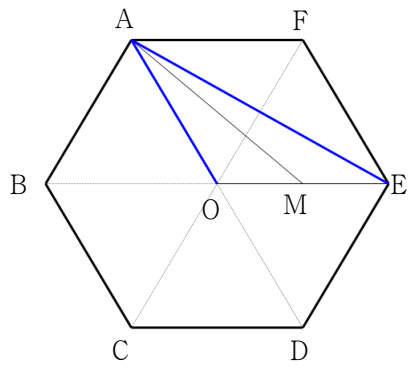
21.
조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$
조건 (나)에서 $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=6$
사각형 ABCD는 평행사변형이면서 두 대각선 AC, BD의 길이가 같으므로 직사각형이다.
따라서 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

22.
$\vec{p}=(x, y)$라 할 때, $\vec{p}-\vec{a}=(x-2, y-4)$, $\vec{p}-\vec{b}=(x-2, y-8)$
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=(x-2)^2+(y-4)(y-8)=0$
$(x-2)^2+(y-6)^2=4$, $\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}=(1, 2)+(t, 0)=(t+1, 2)$
$\vec{p}$의 종점이 그리는 원과 $\vec{q}$의 종점이 그리는 직선 $y=2$사이 거리의 최솟값은 2



23.
$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$에서
$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|$
이때
$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$
이므로
$|\overrightarrow{AP}|=5$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 길이는 10π이다.

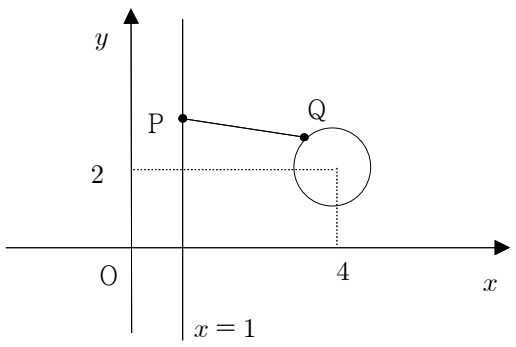
24.
두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$이므로



$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AM}$ … ㉠
삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AM}^2=\overline{AO}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{OM}\times\cos 120°$
$=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{7}{4}$
$\overline{AM}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이므로 ㉠에서
$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|=2\overline{AM}=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

25.
점 P의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{a-5}{2}=b-5$ …… ㉠
$\overrightarrow{AP}=(a-2, b-6)$
직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, 1)$
두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\vec{u}$는 서로 수직이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$
$2(a-2)+(b-6)=0$
$b=-2a+10$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=3$, $b=4$
따라서 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

26.
$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$
이때, $\vec{a}=(3, 0)$, $\vec{b}=(1, 2)$이므로 점 $P(x, y)$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}=(x, y)$라 하면
$(3, 0)\cdot(x-1, y-2)=0$
$3(x-1)=0$
$x=1$
그러므로 점 P는 직선 $x=1$ 위의 점이다. 또, $|\vec{q}-\vec{c}|=1$이고 $\vec{c}=(4, 2)$이므로 $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$라 하면 점 Q는 중심이 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편,
$|\vec{p}-\vec{q}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QP}|=\overline{PQ}$
따라서, 이 값의 최솟값은 원의 중심 $(4, 2)$와 직선 $x=1$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 1을 빼면 되므로 $3-1=2$

27. 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\overrightarrow{AM}$이다.
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$ 이므로 $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$
$\overline{AD}=\overline{BM}=\overline{CM}$이고 변 AD와 변 BC가 평행하므로
사각형 ABMD와 사각형 AMCD는 평행사변형이다.
평행사변형 AMCD에서 $\overline{CD}=\overline{AM}=\sqrt{5}$
사각형 ABMD가 평행사변형이므로
$\angle MBA=\angle CMD=\angle DCM$
즉 삼각형 DMC는 이등변삼각형이므로 $\overline{DM}=\sqrt{5}$
점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CM}=2$이므로 $\overline{HM}=\overline{CH}=1$
직각삼각형 DMH에서
$\overline{DH}=\sqrt{\overline{DM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{5-1}=2$
$\overline{BH}=\overline{BM}+\overline{HM}=2+1=3$
직각삼각형 DBH에서
$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BH}|^2+|\overrightarrow{DH}|^2=3^2+2^2=13$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

따라서 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$

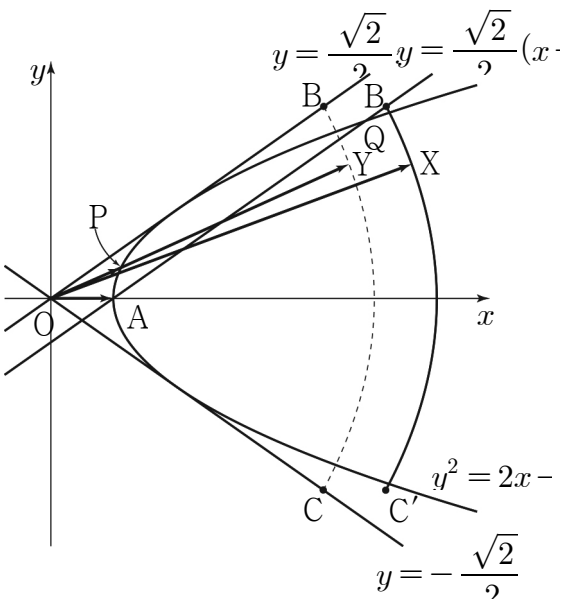
28. 두 직선의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}=(2,\ 1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1,\ 3)$
두 방향벡터가 이루는 각은

$$\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{2\times1+1\times3}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

29. [정답] 24
[출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기
점 O에서 포물선 $y^2=2x-2$에 그은 접선의 방정식을 $y=ax$라 하자.
$(ax)^2=2x-2$에서 $a^2x^2-2x+2=0$
이차방정식 $a^2x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-2a^2=0$에서 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
중심이 점 O이고 반지름의 길이가 k인 원이
직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 제1사분면에서 만나는 점을 B,
직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 제4사분면에서 만나는 점을 C라 하자.
$\overrightarrow{OY}=\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$를 만족시키는 점 Y에 대하여

$$|\overrightarrow{OY}|=\left|\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}\right|=\frac{|k|}{|\overrightarrow{OP}|}\times|\overrightarrow{OP}|=k$$

이므로 점 Y가 나타내는 도형은 부채꼴 OCB의 호 CB이다.
또한 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$에서 점 X는 점 Y를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이므로
두 점 B, C를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 각각 B′, C′이라 하면 도형 C는
부채꼴 AC′B′의 호 C′B′이다.

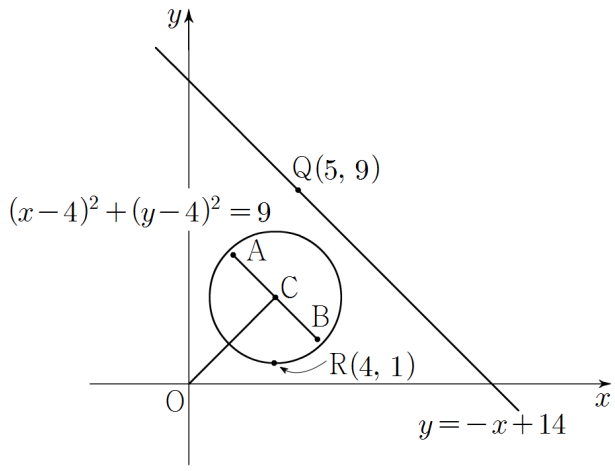


점 A(1, 0)을 지나고 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행한 직선이 포물선 $y^2=2x-2$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 Q라 하면 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$k=\overline{AB'}\geq\overline{AQ}$를 만족시켜야 하므로
구하는 실수 k의 최솟값은 $\overline{AQ}$이다.
직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행하고 점 A(1, 0)을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$이므로

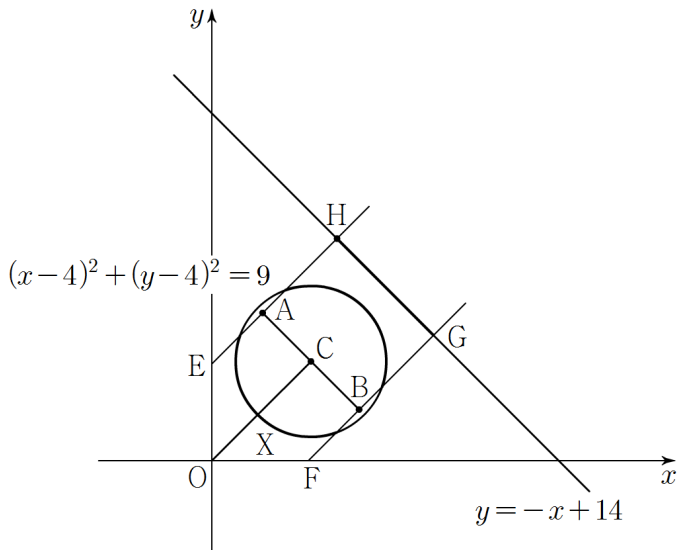
$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\right\}^2=2x-2$$에서 $x^2-6x+5=0$,

$x=1$ 또는 $x=5$
점 Q는 점 A가 아니므로 $Q(5,\ 2\sqrt{2})$
$\overline{AQ}=\sqrt{(5-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$
따라서 $m=2\sqrt{6}$이며 $m^2=24$

30. 정답 ⑤
[해설]
조건 (가)에서 $(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}=0$ 또는 $|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|=3$이므로
$\overrightarrow{DX}\perp\overrightarrow{OC}$ 또는 $|\overrightarrow{CX}|=3$
(i) $\overrightarrow{DX}\perp\overrightarrow{OC}$일 때,
직선 OC가 기울기가 1인 직선이므로 점 X의 자취는 점 D를 지나고 기울기가 −1인 직선이다.
∴ $y=-(x-8)+6$, 즉 $y=-x+14$
(ii) $|\overrightarrow{CX}|=3$일 때,
점 X의 자취는 점 C를 중심으로 하고 반지름이 3인 원이다.
∴ $(x-4)^2+(y-4)^2=9$
(i), (ii)에서 집합 S는
$S=\{(x,\ y)|y=-x+14$ 또는 $(x-4)^2+(y-4)^2=9\}$ …… ㉠



조건 (나)에서 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PX}$이고 점 P는 선분 AB 위의 점이므로 점 X는 점 P를 지나고 기울기가 1인 선분 위의 점이다.
㉠에서 점 X가 될 수 있는 점들은 아래 그림에서 직선 EH와 직선 FG의 사이 부분에 존재한다.

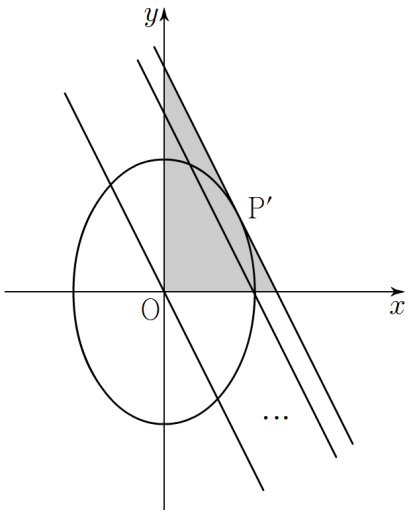


그림에서 y좌표가 최대인 점 X는 점 H다.
점 Q는 $y=(x-2)+6=x+4$와 $y=-x+14$의 교점이므로
$x+4=-x+14$
$x=5$, $y=9$
∴ Q(5, 9)
원 $(x-4)^2+(y-4)^2=3^2$의 가장 y좌표가 작은 점인 (4, 1)이 직선 FG보다 위에 존재하므로 이 점에서 y좌표가 최소다.
∴ R(4, 1)

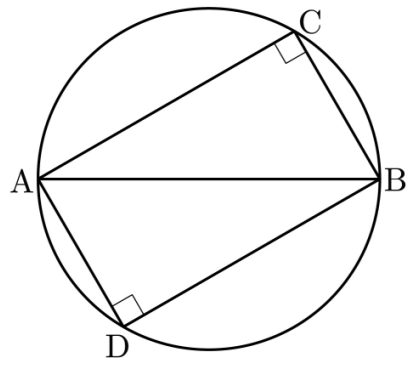
꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\therefore\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=(5,9)\cdot(4,1)$
$=20+9=29$

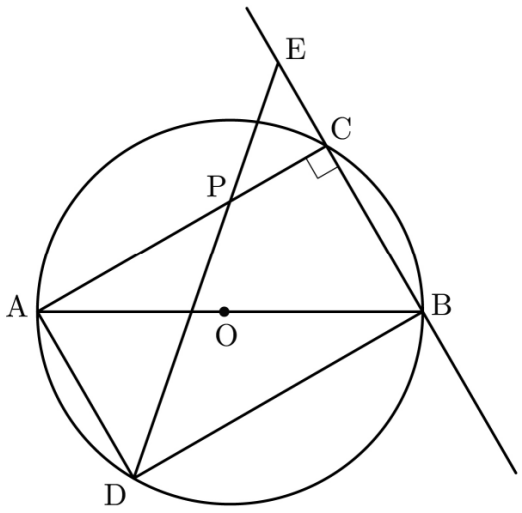
31. 정답 13
[해설]
점 P는 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이고 점 Q는 원점을 중심으로 한 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직인다.
$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$는 점 P를 $2x+y=0$ 위를 움직이며 점 Q는 점 P를 타원의 중심 O를 점 P로 평행이동시키는 이동에 의해 타원 $2x^2+y^2=3$를 평행이동시킨 도형 위의 점이다
즉, 타원이 직선 $y=-2x$ 위의 점을 중심으로 평행이동한 도형을 모두 연결하면 점 X가 움직이는 영역이 된다.



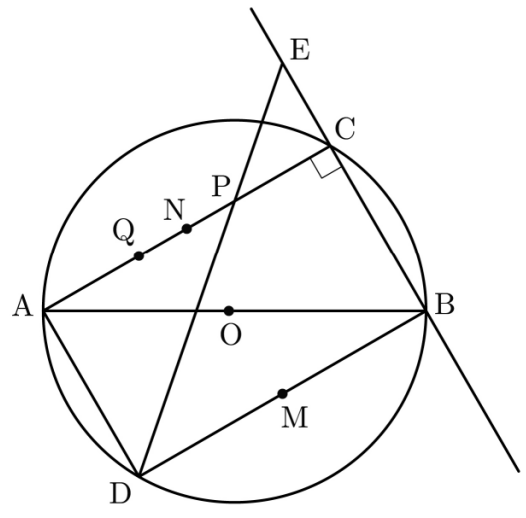
이때 타원 $2x^2+y^2=3$의 접선 중 기울기가 -2이고 접점의 x좌표와 y좌표가 모두 0이상인 접선을 l, 그 때의 접점을 P′라 하면 구하는 영역의 넓이는 직선 l 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
접선 l의 방정식은
$y=-2x\pm\sqrt{\frac{3}{2}\times2^2+3}=-2x\pm3$
$x>0,\ y>0$인 부분에서 접선이 존재하므로
$y=-2x+3$
이때, x절편이 $\frac{3}{2}$이고 y절편이 3이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$
$\therefore\ p+q=4+9=13$
32. [정답] 15
[해설]
두 점 C, D는 원 위의 점이므로
$\angle ACB=\frac{\pi}{2},\ \angle ADB=\frac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=27$에서 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=9$에서 $\overline{AD}=3$
그러므로 $\overline{BC}=3,\ \overline{BD}=3\sqrt{3}$
$\overline{CD}>3$이므로 $\overline{CD}=6$
$\overline{AC}=\overline{DB}=3\sqrt{3},\ \overline{AD}=\overline{CB}=3,$
$\angle ACB=\angle ADB=\frac{\pi}{2}$이므로
사각형 ADBC는 직사각형이다.
그러므로 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$



조건 (가)에 의하여
$\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$에서
$\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=k\overrightarrow{BC}$
$\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$
$=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}$
$=(k-1)\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}$를 만족시키는 점을 E라 하면
$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=(k-1)\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BE}=(k-1)\overrightarrow{BC}$
그러므로 점 E는 직선 BC 위에 있다.



두 삼각형 EPC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 3이므로
$\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{BC}$이므로 $k-1=\frac{3}{2}$에서 $k=\frac{5}{2}$
$\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{DB}=\sqrt{3}$
그러므로 $\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{PC}=2\sqrt{3}$ …… ㉠



선분 BD의 중점을 M이라 하면
조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$
$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}$
$=(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MD})$
$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$
$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{MB}|^2$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$= |\overrightarrow{QM}|^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= |\overrightarrow{QM}|^2 - \frac{27}{4}$

이므로 $|\overrightarrow{QM}|^2 = \frac{39}{4}$

선분 AC의 중점을 N이라 하면

$\overline{MN} = \overline{BC} = 3$

$|\overrightarrow{QM}|^2 = |\overrightarrow{QN}|^2 + |\overrightarrow{MN}|^2$

$= |\overrightarrow{QN}|^2 + 9$

$|\overrightarrow{QN}|^2 = |\overrightarrow{QM}|^2 - 9 = \frac{3}{4}$

$|\overrightarrow{QN}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AQ} = \overline{AC} - \overline{QC}$이므로

$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{3}$ 또는 $|\overrightarrow{AQ}| = 2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AQ}| = 2\sqrt{3}$이면 ㉠에 의하여

점 P는 점 Q와 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DP} = |\overrightarrow{AQ}| \times |\overrightarrow{DP}| \times \cos(\angle DPA)$

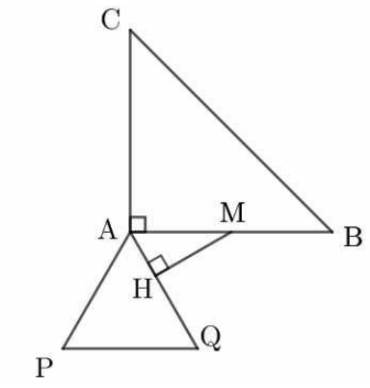
$= |\overrightarrow{AQ}| \times |\overrightarrow{AP}|$

$= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6$

따라서 $k \times (\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DP}) = \frac{5}{2} \times 6 = 15$

33. 27

조건을 만족시키는 A,B,C,P,Q의 위치는 그림과 같다.



$|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| \geq 2|\overrightarrow{HM}| = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

따라서 $m^2 = 27$이다.

34. [출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 벡터의 내적을 구하는 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$에서 $\overline{OP} \perp \overline{AP}$

$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$에서 $\overline{OQ} \perp \overline{AQ}$

직각삼각형 OAP에서 $\overline{OA} = 5$, $\overline{OP} = 2$이므로

$\cos(\angle AOP) = \frac{2}{5}$

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{OA} = 5$, $\overline{AQ} = 1$이므로

$\cos(\angle QAO) = \frac{1}{5}$

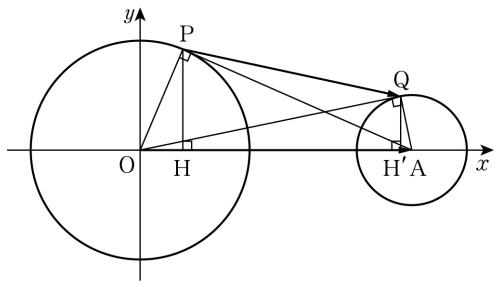
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\overline{OH} = \overline{OP} \times \cos(\angle AOP) = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

$\overline{H'A} = \overline{QA} \times \cos(\angle QAO) = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

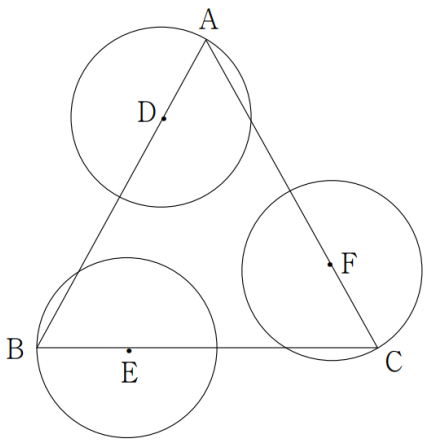
이므로 $\overline{HH'} = \overline{OH'} - \overline{OH} = \left(5 - \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5} = 4$

따라서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overline{OA} \times \overline{HH'} = 5 \times 4 = 20$



35. 정답 147

조건 (가)에서 점 P는 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고, 점 Q는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고, 점 R은 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



조건 (나)에서

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA} = (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DP}) + (\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EQ}) + (\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FR})$

$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} - (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{FR})$

그런데 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$이므로 $\overrightarrow{AX} = -(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{FR})$

이 때, $|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대이려면 세 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{FR}$의 방향이 모두 같아야 한다. 즉, $|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이는 삼각형 DEF의 넓이와 같다.

삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \times \overline{DB} \times \overline{BE} \times \cos\frac{\pi}{3} = 9 + 1 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 7$

따라서 삼각형 DEF는 한 변의 길이가 $\sqrt{7}$인 정삼각형이므로

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{7})^2 = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

즉, $16S^2 = 16 \times \frac{49 \times 3}{16} = 147$

36.

조건 (가)에서

$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$이므로

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A′, B′, D′, E′, F′이라 하면

점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 위의 점

을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인

원 위를 움직인다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$이므로

$(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CX}) - \overrightarrow{CX} + 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CX}) = k\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CG}$라 하면

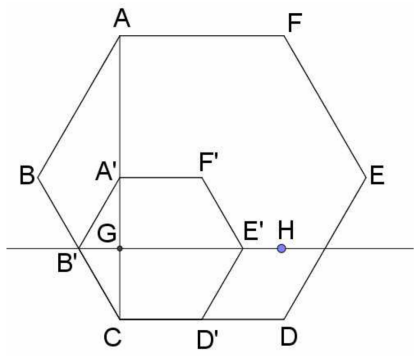
점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE′ 위의 점 H가

$\overline{E'H} = 1$, $\overline{GH} > \overline{GE'}$

를 만족시키도록 점 H를 잡는다.

꿈을 현실로! 희망 부산교육



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최소이다.

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CG}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$에서

$\frac{2-k}{4}=0$

$k=2$

즉 , $\alpha=2$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{GH}|=4$에서

$\left|\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}\right|=4$

즉 $\frac{2-k}{4}|\overrightarrow{CD}|=4$이므로

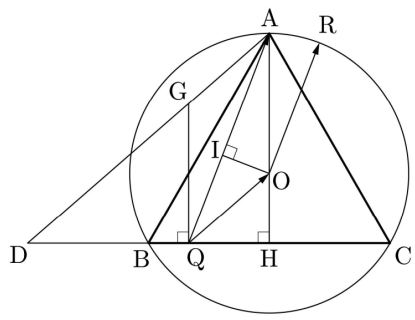
$\frac{2-k}{4}\times 4=4$

$k=-2$

즉, $\beta=-2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2^2+(-2)^2=8$

37.



$\overrightarrow{OD}=\frac{3OB-OC}{3-1}$이므로 점 D는 선분 CB를 3 : 1로 외분하는 점이다.

선분 DA를 2 : 1로 내분하는 점을 G라 하면 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$이므로 선분 PG의 길이가 최소일 때 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.

그러므로 점 Q는 점 G에서 선분 CD에 내린 수선의 발이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DH}=6$

$\overline{QH}=\frac{1}{3}\overline{DH}=2$, $\overline{AH}=3\sqrt{3}$이므로 $\overline{QA}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$

$\overline{OA}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로 점 R는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이다.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_1(0\le\theta_1\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AI}:\overline{AH}=\overline{OA}:\overline{QA}$

$\overline{AI}:3\sqrt{3}=2\sqrt{3}:\sqrt{31}$

$\overline{AI}=\frac{18}{\sqrt{31}}=\frac{18\sqrt{31}}{31}$

$\overline{QI}=\overline{QA}-\overline{AI}=\sqrt{31}-\frac{18\sqrt{31}}{31}=\frac{13\sqrt{31}}{31}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QI}|=\sqrt{31}\times\frac{13\sqrt{31}}{31}=13$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{OR}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_2(0\le\theta_2\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|\cos\theta_2=\sqrt{31}\times 2\sqrt{3}\times\cos\theta_2$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{OR}$가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 최댓값은 $\sqrt{31}\times 2\sqrt{3}\times\cos 0=2\sqrt{93}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

$\le 13+2\sqrt{93}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값은 $13+2\sqrt{93}$

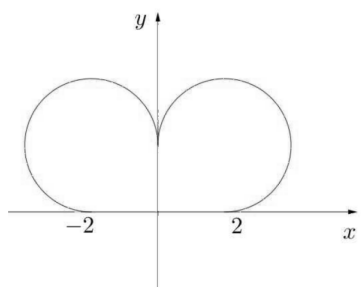
$p=13$, $q=2$

따라서 $p+q=15$

38.

$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0$에서 $|\overrightarrow{AX}|=2$ 또는 $|\overrightarrow{BX}|=2$이므로

X는 중심이 A이고 반지름이 2인 원 또는 중심이 B이고 반지름이 2인 원 위의 점이다. 그런데, $|\overrightarrow{OX}|\ge 2$를 만족해야 하므로 만족하는 도형은 [그림1]과 같다.



[그림1]

또한 $(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u})\ge 0$를 만족하므로 점 P, Q의 x좌표가 모두 같은 방향이어야 한다.

즉, [그림1]에서 점 P, Q가 제 1사분면 도형에 있는 경우와 제 2사분면 도형에 있는 경우 2가지가 있다.

(i) 제 1사분면에 있는 경우

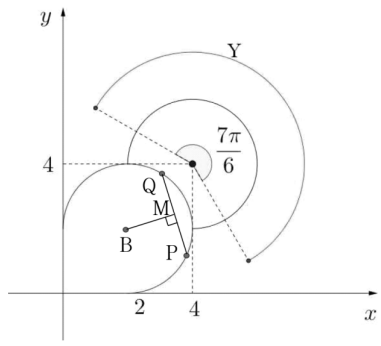
선분 PQ의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\right)=2\overrightarrow{OM}$

즉, $\overrightarrow{OY}=2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM})$

그런데, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{PQ}|=2$이므로 $|\overrightarrow{PM}|=1$

따라서 $|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2-|\overrightarrow{PM}|^2}$에서 $|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{3}$



따라서 P, Q가 조건을 만족하며 움직일 때의 M의 자취는 중심이 B이고 반지름이 $\sqrt{3}$이며 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호가 된다.

이때 $\overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{OM}$이므로 점 Y의 자취는 중심이 $(4, 4)$이고 반지름이 $2\sqrt{3}$이며 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호이다.

따라서 구하는 자취의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(ii) 제2사분면에 있는 경우

(i)과 마찬가지이므로 자취의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(i), (ii)에서 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이는

$\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$이므로 $p=3$, $q=14$

$\therefore\ p+q=3+14=17$

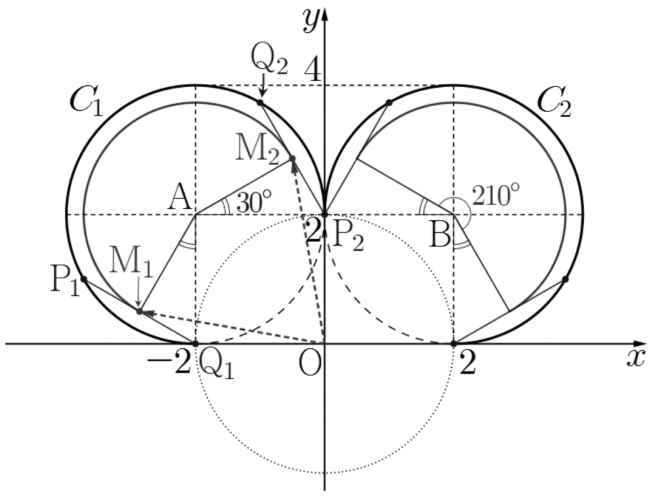
꿈을 현실로! 희망 부산교육

[다른 풀이]

주어진 등식과 부등식

$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0,\ |\overrightarrow{OX}|\geq 2$

에서 점 X는 두 점 A 또는 B로부터의 거리가 2이고, 원점 O로부터의 거리가 2 이상이므로 A, B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 두 원 C_1 또는 C_2의 둘레 중 아래 그림과 같이 실선 부분이다.



또, 조건 (가)는 두 점 P, Q의 x좌표가 같은 부호임을 뜻하므로 원 C_1 또는 C_2 중 어느 한쪽에 존재해야 하고, $\overline{PQ}=2$이다.

한편, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OY}=\frac{OP+OQ}{2}=\overrightarrow{OM}$으로 놓자.

y축 대칭성으로 인해 원 C_1에서만 고려하면, 삼각형 AP_1Q_1은 정삼각형이므로 $\angle M_1AQ_1=\frac{\pi}{6}$이고, $\overline{AM_1}=\sqrt{3}$

그러므로 점 M은 점 A를 중심, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고

중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 호에 해당하고 그 길이는

$\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi$

$\overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{OM}$이므로 점 Y의 자취의 길이는

$\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

원 C_2에서도 마찬가지이므로 구하는 길이는

$\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$

따라서, $p=3,\ q=14$이므로 $p+q=17$이다.

39.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$에서 $\angle COB=90°,\ \angle AOC=30°$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OC}|\times\cos 30°=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{OC}|$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=24$에서 $|\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-|\overrightarrow{OP}|^2$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-16$ …… ㉠

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$0°\leq\theta\leq 90°$이고

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ})$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$=16\sqrt{3}\cos\theta+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$\theta=0°$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 16\sqrt{3}+4$ …… ㉡

$\theta=90°$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 반대일 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최소이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-4-16\leq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}\leq 16\sqrt{3}+4-16$

$M=16\sqrt{3}-12,\ m=-20$

따라서 $M+m=16\sqrt{3}-32$

40.

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB})$

선분AD의 연장선위에 한 점을 E라 할 때, $\overline{AD}=\overline{DE}$를 만족하는 점을 E라 하자. 이때, $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$이고

$|\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{AB}|$이고 $\overrightarrow{EC}\ /\!/\ \overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB},\ \therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

선분 AB의 연장선 위에 점 A에서 거리가 3인 점이 P

선분BC의 길이가 4이므로 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=6$에서

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$이므로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{AH}|=6,\ \therefore\ |\overrightarrow{AH}|=\sqrt{3}$

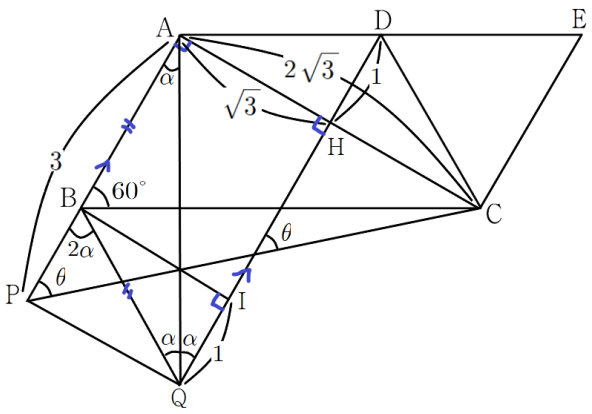
수선 HQ가 대각선AC를 수직 이등분하고, $\overline{HQ}\ /\!/\ \overline{AB}$

점 B에서 직선 DQ에 내린 수선의 발을 I라 할 때,

삼각형 BQI에서 $\overline{BI}=\sqrt{3}$, $\overline{BQ}=2$이므로 $\overline{QI}=1$이고

$\overline{QI}=\overline{BP}=1$이므로 $\angle APQ=\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

얻어진 조건들에 따라 점 P, Q의 위치를 잡고, 그림을 그려보면 아래 그림과 같다.



직선 CP와 직선 DQ가 이루는 각을 θ라 할 때, 동위각이므로

$\angle APC=\theta$

$\overline{CP}^2=\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=9+12=21,\ \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{CP}|}=\frac{3}{\sqrt{21}}$

$\overline{HI}=2,\ \overline{IQ}=1,\ \overline{DH}=1$이므로 $\overline{DQ}=4$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}=\sqrt{21}\times 4\times\frac{3}{\sqrt{21}}=12$

41.

(ⅰ) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})$

$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$

$|\overrightarrow{MP}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$의 방향이 같고

$|\overrightarrow{MQ}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다.

그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면

점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때

$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다.

$\overline{MC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

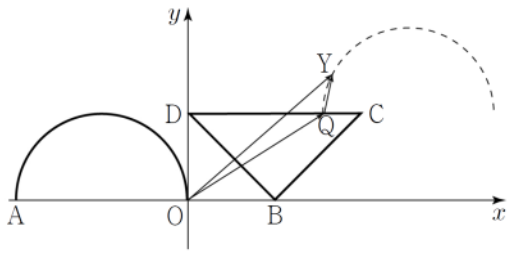
$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|\leq|\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MC}|=\sqrt{10}+1$

따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ⅱ) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$

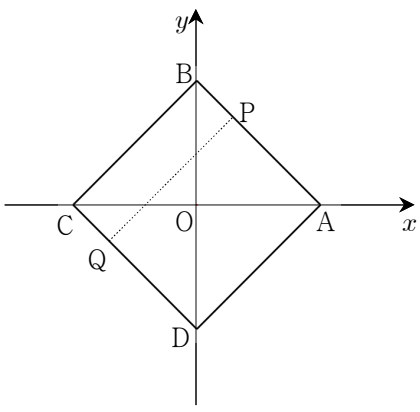
$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

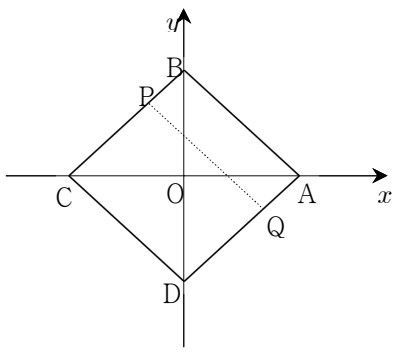


삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여
$\overrightarrow{QY}=\overrightarrow{AP}$인 점을 Y라 하자.
$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OY}|\geq|\overrightarrow{OQ}|$
이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이다.
점 Q가 선분 BD 위에 있고
$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{BD}$일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이므로
$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$
(i), (ii)에 의해
$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\frac{1}{2}=\frac{23}{2}+2\sqrt{10}$
따라서 $p=\frac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

42.
조건 (가)에서
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 또는 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$
이므로 다음과 같이 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 즉 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$인 경우
두 조건 (나)와 (다)에서
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq0$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq0$
이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이고 점 Q는 선분 CD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, 2-a)$ $(0\leq a\leq2)$라 하면 점 Q의 좌표는
$Q(a-2, -a)$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq-2$에서
$(2, 0)\cdot(a, 2-a)=2a\geq-2$
이므로
$a\geq-1$ … ㉠
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq0$에서
$(0, 2)\cdot(a, 2-a)=2(2-a)\geq0$
이므로
$a\leq2$ … ㉡
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq-2$에서
$(2, 0)\cdot(a-2, -a)=2(a-2)\geq-2$
이므로
$a\geq1$ … ㉢
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq0$에서
$(0, 2)\cdot(a-2, -a)=-2a\leq0$
이므로
$a\geq0$ … ㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서
$1\leq a\leq2$ … ㉮
한편, 점 R(4, 4)에 대하여
$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$
$=(a, 2-a)-(4, 4)$
$=(a-4, -a-2)$
$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}$
$=(a-2, -a)-(4, 4)$
$=(a-6, -a-4)$
이므로
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$
$=(a-4, -a-2)\cdot(a-6, -a-4)$
$=(a-4)(a-6)+(a+2)(a+4)$
$=2a^2-4a+32$
$=2(a-1)^2+30$
㉮에서
$30\leq\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}\leq32$
(ii) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, 즉 $\overline{PQ}\perp\overline{AD}$인 경우
두 조건 (나)와 (다)에서
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq0$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq0$
이므로 점 P는 선분 BC 위의 점이고 점 Q는 선분 AD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, a+2)$ $(-2\leq a\leq0)$라 하면 점 Q의 좌표는
$Q(a+2, a)$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq-2$에서
$(2, 0)\cdot(a, a+2)=2a\geq-2$
이므로
$a\geq-1$ … ㉰
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq0$에서
$(0, 2)\cdot(a, a+2)=2(a+2)\geq0$
이므로
$a\geq-2$ … ㉱
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq-2$에서
$(2, 0)\cdot(a+2, a)=2(a+2)\geq-2$
이므로
$a\geq-3$ … ㉲
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq0$에서
$(0, 2)\cdot(a+2, a)=2a\leq0$
이므로
$a\leq0$ … ㉳
㉰, ㉱, ㉲, ㉳에서
$-1\leq a\leq0$ … ㉴
한편, 점 R(4, 4)에 대하여
$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$
$=(a, a+2)-(4, 4)$
$=(a-4, a-2)$
$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}$
$=(a+2, a)-(4, 4)$
$=(a-2, a-4)$
이므로
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$
$=(a-4, a-2)\cdot(a-2, a-4)$
$=2(a-4)(a-2)$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$=2(a^2-6a+8)$

$=2(a-3)^2-2$

㉣에서

$16 \le \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} \le 30$

(i), (ii)에서

$16 \le \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} \le 32$

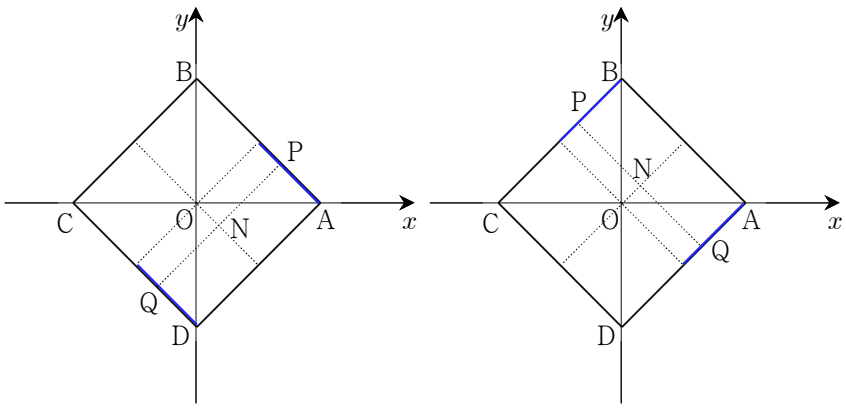
따라서 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 $M=32$, 최솟값은 $m=16$이므로

$M+m=48$

정답 48

[다른 풀이]

위의 풀이에서 두 점 P, Q가 지나는 영역은 다음 그림의 굵은 선분 위이다.



선분 PQ의 중점을 N이라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{NQ}=0$,

$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=|\overrightarrow{NP}||\overrightarrow{NQ}|\cos\pi=-\overline{NP}^2$

이므로

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$

$=(\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP})\cdot(\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NQ})$

$=\overrightarrow{RN}\cdot\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{RN}\cdot\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}$

$=|\overrightarrow{RN}|^2+\overrightarrow{RN}\cdot(\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP})+\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}$

$=\overline{RN}^2+0-\overline{NP}^2$

이때 항상 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{2}$

따라서

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\overline{RN}^2-2$

이므로 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값과 최솟값은 $\overline{RN}$의 최댓값과 최솟값에 의하여 결정된다.

$\overline{RN}$이 최대일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,0)$, $(0,-2)$이므로

$N(1,-1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{34}$

이므로 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값은

$M=(\sqrt{34})^2-2=32$

$\overline{RN}$이 최소일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(0,2)$, $(2,0)$이므로

$N(1,1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}$

이므로 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최솟값은

$m=(\sqrt{18})^2-2=16$

이상에서

$M+m=32+16=48$

43.

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP})$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로

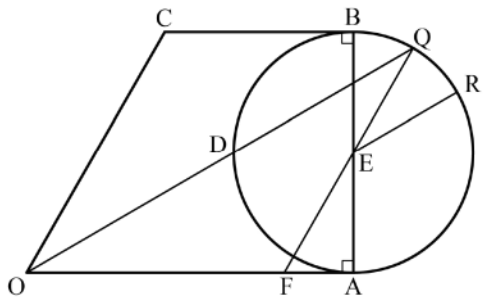
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



선분 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle EFA=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AE}=2$이므로

$\overline{FE}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{FA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{FA}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{FQ}=\overline{FE}+\overline{EQ}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{OF}=\overline{FQ}$이므로 $\angle OQF=\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{DQ}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER})$

$=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$ …… ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\le 2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

㉠에 의하여

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$

$\le 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$

44.

$|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 점 P는 중심이 $A(-3,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다. 또, $|\overrightarrow{BQ}|=2$이므로 점 Q는 중심이 $B(0,2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

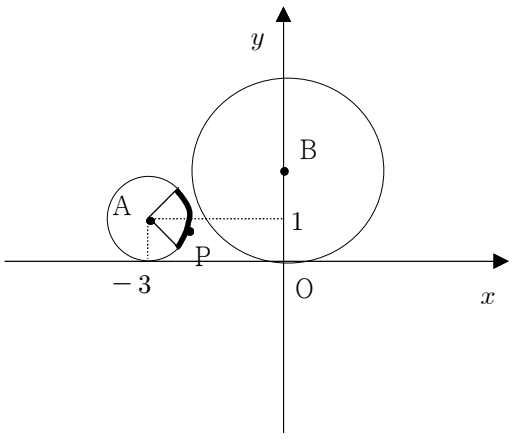
$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

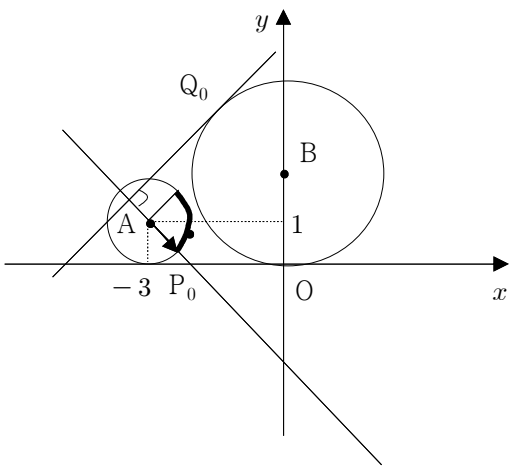
$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.

꿈을 현실로!
희망 부산교육

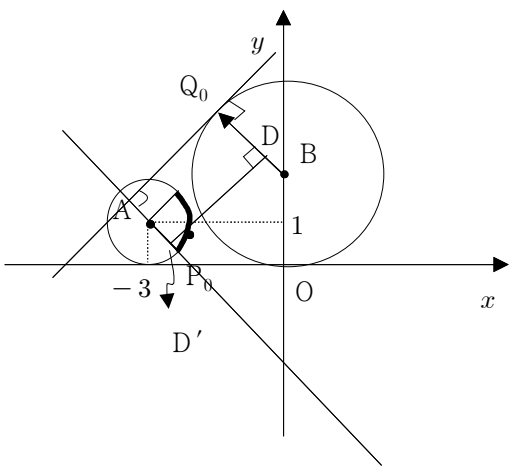


또, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$
그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이 직선과 수직이면서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\ge 1$에서 두 벡터
$\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BQ_0}$가 이루는 각의 크기를 θ''이라 하면
$|\overrightarrow{BX}||\overrightarrow{BQ_0}|\cos\theta''\ge 1$
$2|\overrightarrow{BX}|\cos\theta''\ge 1$
$|\overrightarrow{BX}|\cos\theta''\ge\frac{1}{2}$

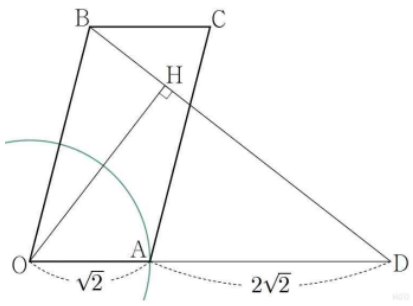
그러므로 선분 BQ_0위의 점 D를 $\overline{BD}=\frac{1}{2}$가 되도록 잡은 후, 점 D에서 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 점 X는 선분 AD′위의 점이다.



따라서, $|\overrightarrow{Q_0X}|$의 최댓값은 X가 D′일 때 가지므로 $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\overline{Q_0D'}^2=\overline{Q_0D}^2+\overline{DD'}^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+(2\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}+8=\frac{41}{4}$
그러므로 $p+q=4+41=45$

45. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
$\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$에서 $|\overrightarrow{PC}|=t\,(t>0)$이라 하면 $|\overrightarrow{PA}|=3t$
두 벡터 $\overrightarrow{PB}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|$이므로
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=135°$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|=-2|\overrightarrow{PC}|^2$에서
$|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{PC}|$이므로 $|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}t$
$\angle APB=\angle BPC=135°$, $\angle CPA=90°$이므로
세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면
$S_1:S_2:S_3=3t^2:t^2:\frac{3}{2}t^2=6:2:3$
직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로
$\overline{AD}:\overline{DP}=(S_1+S_2+S_3):S_2=11:2$
따라서 $\overrightarrow{AD}=\frac{11}{2}\overrightarrow{PD}$이므로 $k=\frac{11}{2}$

46. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2$
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$이므로
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\cos(\angle AOB)=4\times\frac{1}{4}=1$이므로
$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-1=2$, $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=3$
$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=3$
$s|\overrightarrow{OA}|^2+t|\overrightarrow{OB}|^2+(s+t)\times\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2s+8t+s+t=3s+9t$
$s+3t=1$



$3\overrightarrow{OP}=s(3\overrightarrow{OA})+3t\overrightarrow{OB}$이므로 위의 그림과 같이
$3\overrightarrow{OP}=s(3\overrightarrow{OD})+3t\overrightarrow{OB}$이고 점 P는 선분 BD위의 한 점이다.
$|\overrightarrow{OP}|^2=s^2|\overrightarrow{OA}|^2+t^2|\overrightarrow{OB}|+2st\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2s^2+8t^2-2st$
$\angle AOX=\alpha$, $\angle BOX=\beta$라 할 때,
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}=(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OX}$

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$은 원 위의 한 점과 선분 BD위의 한 점 사이의 거리
최댓값은 원의 중심과 점 D까지 거리에서 반지름을 더한 값이므로 $M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
최솟값은 원의 중심과 선분 BD까지 거리에서 반지름을 뺀 값이다.
삼각형 OBD에서 코사인2법칙에 따라
$\overline{BD}^2=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2-2\overline{OB}\times\overline{OD}\times\cos\theta=8+18-12\times\frac{1}{4}=20$
$\therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{5}$
삼각형 OBD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\sin\theta=6\times\frac{\sqrt{15}}{4}$ ($\because\ \cos\theta=\frac{1}{4}$)
밑변을 $\overline{BD}$라 할 때, $\frac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\overline{OH}=\sqrt{5}\times\overline{OH}$
$\sqrt{5}\times\overline{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{15}$, $\overline{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$
원의 중심과 선분 BD까지 거리는 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $m=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$M\times m=4\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{6}-8$
$a^2+b^2=36+64=100$

꿈을 현실로!
희망 부산교육

단원 15 공간도형과 공간좌표

해 설

1. ④ 4

$B(8,\ 6,\ -2)$이므로 $\overline{AB}=4$이다.

2. [출제의도] 좌표공간에서 외분점의 좌표를 계산한다.

선분 AB를 3:2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times2-2\times a}{3-2},\ \frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2},\ \frac{3\times0-2\times1}{3-2}\right)$

즉, $(6-2a,\ -9,\ -2)$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $6-2a=0$

따라서 $a=3$

3. **정답** ④

$\frac{a+9}{2}=4,\ \frac{6+b}{2}=7$이므로 $\therefore\ a=-1,\ b=8,\ a+b=7$

4.

두 점 A, B의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-5}{2},\ \frac{1+b}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$이고,

이점이 $(8,\ 3,\ 1)$과 같으므로

$\frac{a-5}{2}=8,\ \frac{1+b}{2}=3,\ \frac{-1+3}{2}=1$

따라서 $a=21,\ b=5$이므로 $a+b=26$

5.

선분 AB의 중점이 xy평면 위에 있으려면

중점의 z좌표가 0이어야 하므로

$\frac{-2+a}{2}=0$에서 $a=2$이다.

6.

x축에 대칭이동한 점 $B(2,\ -2,\ 1)$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+(1-(-2))^2+(1-1)^2}=\sqrt{25}=5$

7.

점 B는 점 $A(3,0,-2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이므로

$B(3,\ 0,\ 2)$. 따라서 $C(0,4,2)$이므로

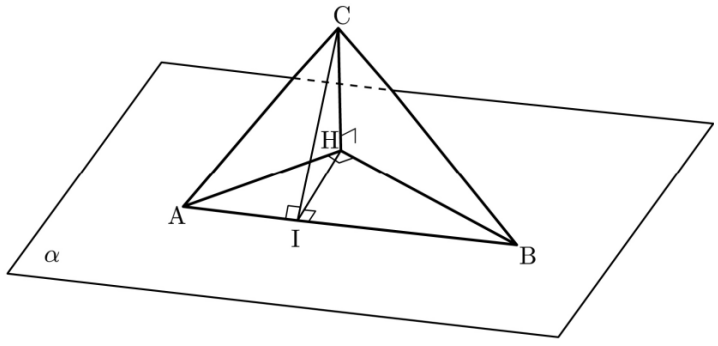
$\overline{BC}=\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2+(2-2)^2}=5$

8. xy대칭이동 : $P(2,\ 1,\ -3)$, yz대칭이동 : $Q(-2,\ 1,\ 3)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(2-(-2))^2+(1-1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

9. [정답] ④

[해설]



$\overline{CH}=a\ (a>0)$이라 하자.

직각삼각형 CAH에서

$\overline{AC}=\sqrt{3}a,\ \overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{6}a,\ \overline{BH}=\sqrt{(\sqrt{6}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=2a$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{CH}\perp\alpha,\ \overline{CI}\perp\overline{AB}$

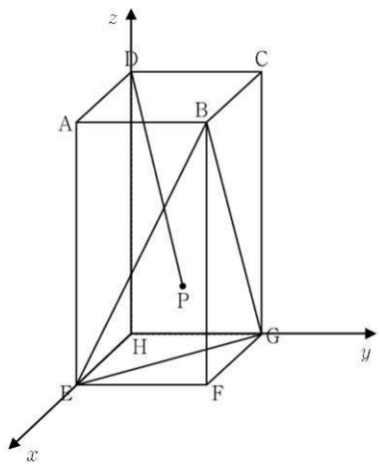
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 HBI에서 $\overline{HI}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{CI}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}a$

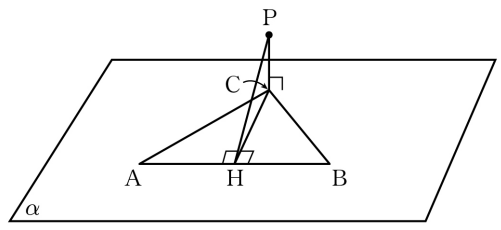
따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{HI}}{\overline{CI}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

10. ⑤ 10π



B(3,3,6), E(3,0,0), G(0,3,0)에서 P(2,2,2)이고, D(0,0,6)이다. 그러므로 $\overline{DP}=2\sqrt{6}$이다.

11. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.



점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times6\times\overline{CH}=12$에서 $\overline{CH}=4$

$\overline{PC}\perp\alpha,\ \overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

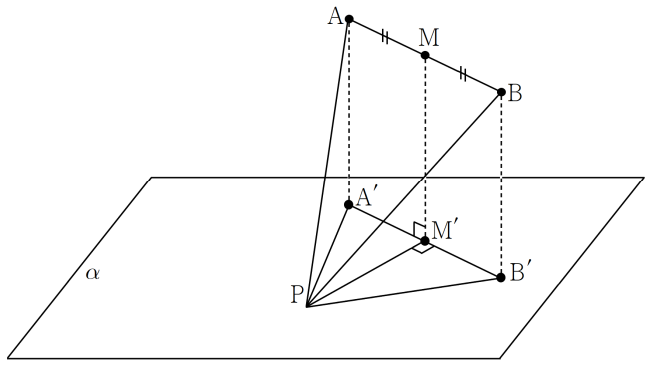
$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

삼각형 PHC는 선분 PH를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{PH}$

$=\sqrt{\overline{PC}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.

12. **정답** ⑤



삼각형 A′B′P의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times6=18$

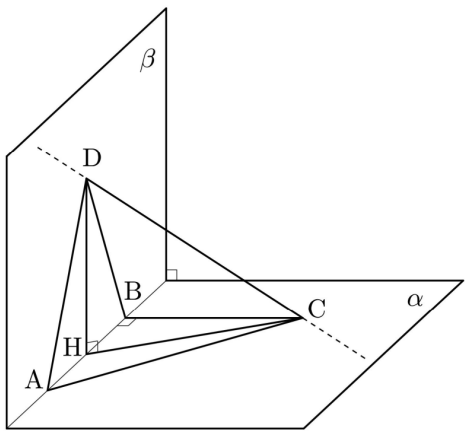
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이는 두 평면이 이

꿈을 현실로! 희망 부산교육

루는 각을 θ라 할 때, $18\cos\theta=\frac{9}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{4}$

θ는 삼각형 PM′M에서 $\angle MPM'=\theta$, $\overline{PM}=\overline{PM}'\sec\theta=6\times4=24$

13.



삼각형 ABC가 직각삼각형이므로 $\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-6^2}=4\sqrt{5}$

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 DAB가 이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{5}$, $\overline{DH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$

삼각형 HBC가 직각삼각형이므로 $\overline{CH}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$

두 평면 α, β는 서로 수직이므로 $\overline{DH}\perp\overline{BC}\overline{DH}\perp\overline{AB}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 직선 DH는 평면 α와 수직이다.

그러므로 $\angle DHC=\frac{\pi}{2}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DH^2}+\overline{CH^2}}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{14})^2}=6\sqrt{2}$

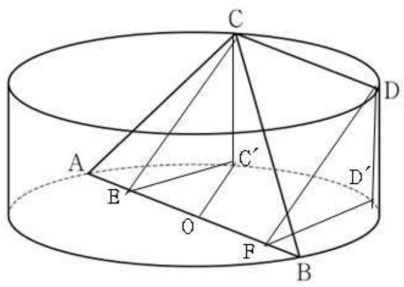
점 D의 평면 α위로의 정사영이 점 H이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$

따라서 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

14.

두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이 라 하고, 두 점 C′, D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{CC'}\perp$(평면 ABD′C′),, $\overline{C'E}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$이다.

조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CE}=16$

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{CE}=16$

$CE=4$

직각삼각형 CC′E에서 $\overline{CC'}=3$이므로

$\overline{C'E}=\sqrt{\overline{CE^2}-\overline{CC'}}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

선분 AB의 중점을 O라 하면

직각삼각형 OC′E에서

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC'^2}-\overline{C'E}}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$

마찬가지 방법으로 $\overline{OF}=3$

조건 (나)에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{OE}+\overline{OF}=3+3=6$

15.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AH'}\times\overline{BC}=6$에서 $\overline{AH'}=4$

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{AH'}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HH'}\perp\overline{BC}$

두 직각삼각형 BH′H, BCD의 닮음비는 1:3이므로

$\overline{HH'}=1$, $\overline{H'C}=2$

$\overline{HC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{AH}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

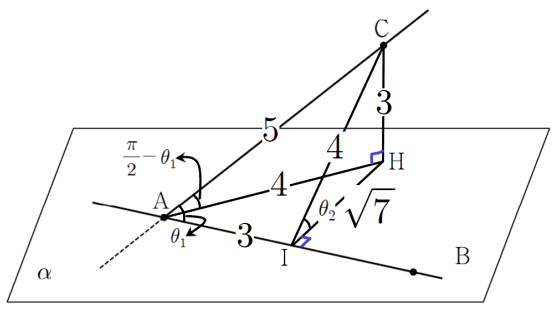
따라서 삼각형 AHC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

16.

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각은 $\angle CIH=\theta_2$

그림을 그려보면 아래와 같다.

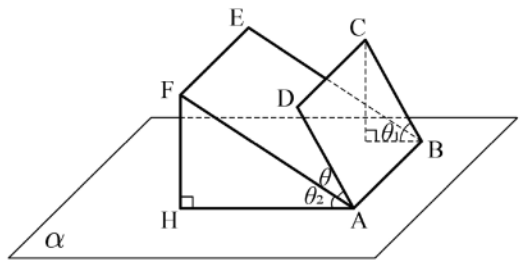


삼각비에 따라 길이에 관계없이 비율 관계이므로 $\overline{AC}=5$로 가정할 때, $\overline{AI}=3$, $\overline{CI}=4$, $\overline{AH}=4$, $\overline{CH}=3$

직각삼각형 AHI에서 피타고라스 정리에 따라 $\overline{HI}=\sqrt{7}$

$\therefore\ \cos\theta_2=\frac{\sqrt{7}}{4}$

17.



정사각형 ABCD의 넓이는 36

정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 18이므로

두 평면 ABCD와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면

$36\times\cos\theta_1=18$이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

점 F의 평면 α 위로의 정사영이 H이므로

두 평면 ABEF와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면

$\cos\theta_2=\frac{\overline{AH}}{\overline{AF}}=\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta_2=\frac{\pi}{6}$

두 평면 ABCD와 ABEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{6}$

따라서 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=36\times\cos\frac{\pi}{6}=18\sqrt{3}$

18.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 $\overline{AD}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AP'}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DP'}\perp\overline{BC}$이다. 이때, $\overline{AP}+\overline{DP}\geq\overline{AP'}+\overline{DP'}$이므로 구하는 최소의 길이는 $\overline{AP'}+\overline{DP'}$이다. 한편, 직각삼각형 BCD에서

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{DC}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DP'}$

$\overline{DB}\times\overline{DC}=\overline{BC}\times\overline{DP'}$

$2\times2\sqrt{3}=4\times\overline{DP'}$

$\overline{DP'}=\sqrt{3}$ …… ㉠

이때, 직각삼각형 ADP′에서

$\overline{AP'}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DP'}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 구하는 최솟값은

$\overline{AP'}+\overline{DP'}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

19. 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는 $\left(\frac{2m-n}{m+n},\ \frac{4m+n}{m+n},\ \frac{m-2n}{m+n}\right)$이다.

xy평면 위의 점 P의 z좌표는 0이므로

$m-2n=0,\ m=2n$

그러므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 3,\ 0)$이다.

따라서 선분 AP의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-1)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{3}$

20. 좌표공간의 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overline{OA}=7$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$

$a^2+b^2+c^2=49$ …… ㉠

구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=64$

xy평면 위의 모든 점의 z좌표는 0이므로

구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{64-c^2}$이다.

원 C의 넓이가 25π이므로

$64-c^2=25,\ c^2=39$

㉠에서 $a^2+b^2=49-c^2=49-39=10$

점 A에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0,\ 0,\ c)$이다.

$\overline{AH}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$

점 B는 구 위의 점이므로 $\overline{AB}=8$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{64-10}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

따라서 $\overline{BC}=2\times\overline{BH}=2\times3\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

21. 점 E를 공간좌표의 원점이라 할 때, M(−2, 0, 4), G(−4, 4, 0)

$\overline{EM}=2\sqrt{5},\ \overline{EG}=4\sqrt{2},\ \overline{MG}=6$

코사인 2법칙에 따라

$\cos(\angle MEG)=\frac{20+32-36}{2\times2\sqrt{5}\times4\sqrt{2}}=\frac{16}{16\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

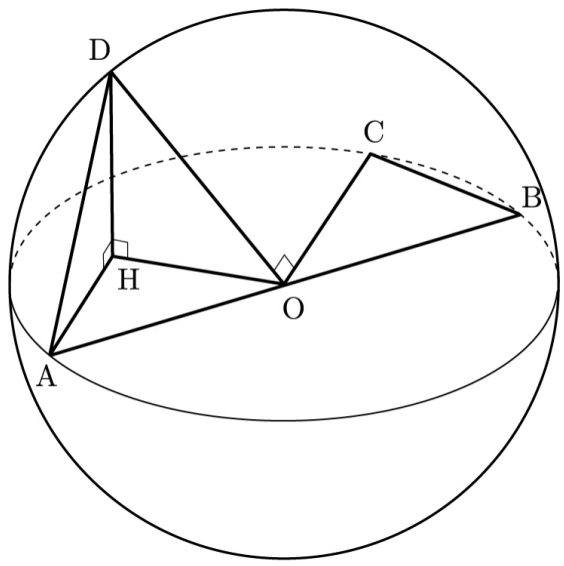
$\sin^2(\angle MEG)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10},\ \sin(\angle MEG)=\frac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형 MEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{EM}\times\overline{EG}\times\sin(\angle MEG)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=12$

22. [정답] 27

[해설]



조건 (가)에 의하여

$\overline{OC}\perp\overline{OD}$, $\overline{DH}\perp$ (평면 COH) 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{OC}$

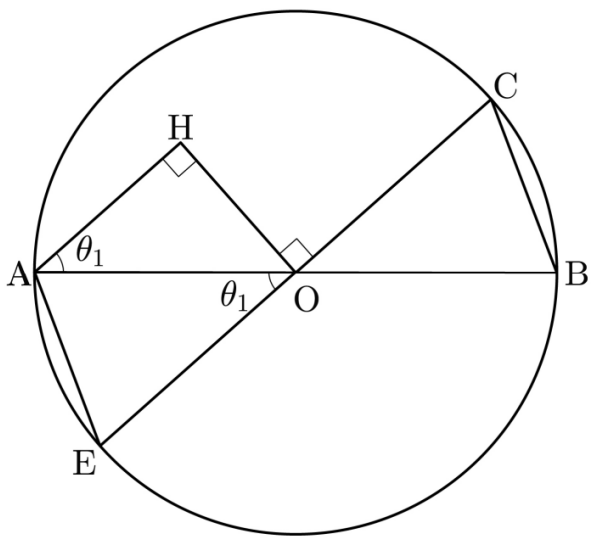
$\overline{DH}\perp$(평면 ABC) 이므로 $\overline{DH}\perp\overline{OH}$

조건 (나)에 의하여

$\overline{AD}\perp\overline{OH}$, $\overline{OH}\perp\overline{DH}$이므로

$\overline{OH}\perp$(평면 DAH)

그러므로 $\overline{OH}\perp\overline{AH}$



직선 OC와 구가 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 E라 하면 $\overline{AE}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$ $\angle AOE=\theta_1$이라 하면 $\angle OAH=\angle AOE=\theta_1$삼각형 OAE에서

$\cos\theta_1=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4}=\frac{3}{4}$

그러므로 $\overline{AH}=\overline{OA}\cos\theta_1=4\times\frac{3}{4}=3$

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

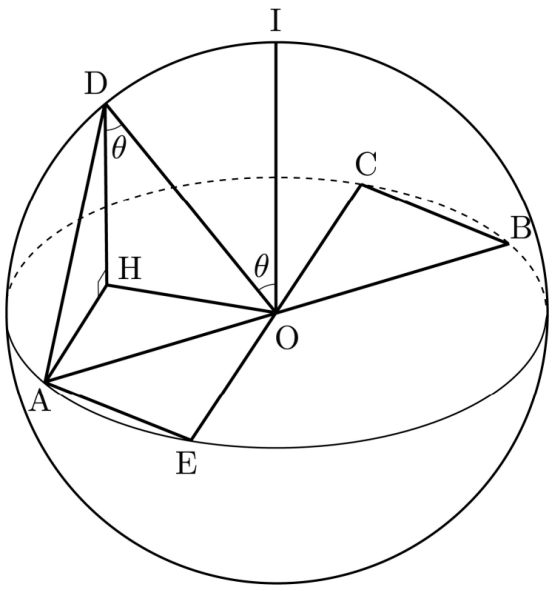
삼각형 DHO에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{16-7}=3$

삼각형 DAH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육



점 O를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선과 구가 만나는 점 중 점 D에 가까운 점을 I라 하자.

$\overline{DH} /\!/ \overline{OI}$이므로 $\overline{DH} /\!/$ 평면 IEC)

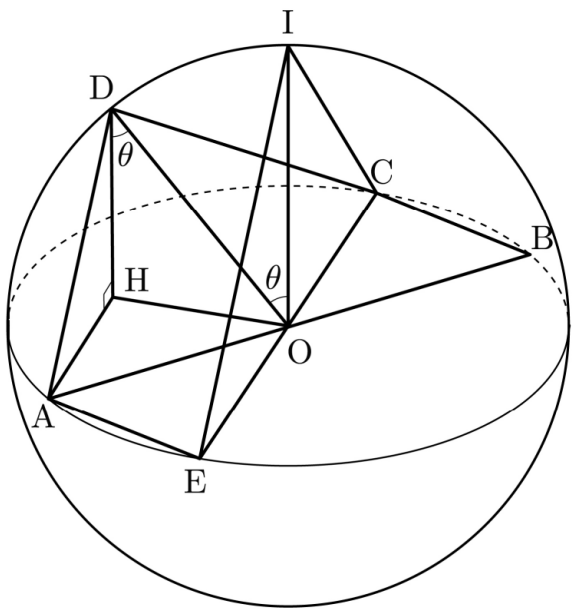
$\overline{AH} /\!/ \overline{EC}$이므로 $\overline{AH} /\!/$(평면 IEC)

그러므로 두 직선 DH, AH를 포함하는

평면 DAH는 평면 IEC와 평행하다.

직선 CE는 두 평면 IEC, DOC의 교선이고 $\overline{CE} \perp \overline{OI}$, $\overline{CE} \perp \overline{OD}$이므로

두 평면 IEC, DOC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\angle DOI = \theta$



$\angle ODH = \angle DOI = \theta$이므로

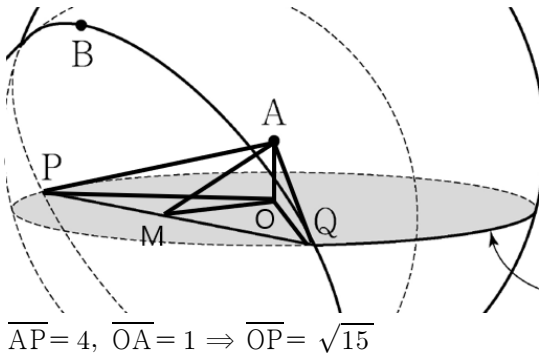
$$\cos\theta = \cos(\angle ODH) = \frac{\overline{DH}}{\overline{OD}} = \frac{3}{4}$$

삼각형 DAH의 넓이를 S_1이라 하면

$$S = S_1 \times \cos\theta = \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8}$$

따라서 $8S = 27$

23. ① 6



$\overline{AP} = 4$, $\overline{OA} = 1 \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{15}$

$\overline{AM} = 2 \Rightarrow \overline{OM} = \sqrt{3}$

또한 $\overline{PM} = 2\sqrt{3}$, $\overline{PQ} = 4\sqrt{3}$

$\angle AMO = \frac{\pi}{6}$, $\angle BMA = \frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 최댓값은

$\left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}\right) \times \cos\frac{\pi}{3} = 6$이다.

24. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

구 S의 중심을 $E(0, 0, \sqrt{5})$라 하면 점 E에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.

점 O는 원 C의 중심이므로

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{OE}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 2이다.

삼각형 BCD의 외접원을 C'이라 하고, 구의 중심 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 원 C'의 중심이다.

조건 (나)에 의하여 $\overline{EH} = \overline{OB} = 2$

직각삼각형 EBH에서

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

이므로 원 C'의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{HM} \perp \overline{BC}$이고

$\overline{HB} = \sqrt{5}$, $\overline{BM} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$\cos(\angle HBM) = \frac{\overline{BM}}{\overline{HB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\angle HBM = 30°$

조건 (다)에 의하여 $\angle CBD = 2 \times \angle HBM = 60°$

조건 (나)에서 직선 AB가 평면 BCD에 수직이므로 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta = \angle CBD = 60°$

조건 (나)에서 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는

$2\sqrt{15} \times \cos 60° = \sqrt{15}$

따라서 $k^2 = 15$

25. 정답 ⑤

평면 β를 xy평면, 선분 FF′의 중점을 원점 O, 직선 AB를 x축이라 하면 $\overline{AB} = 18$이므로 A(9, 0), B(−9, 0)이다.



점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원의 반지름의 길이가 4이므로 점 H에서 x축에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{HH'} = \overline{HQ} = 4$, 직각삼각형 HH′F에서 $\angle HFH' = \frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{HF} = \frac{\overline{HH'}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$, $\overline{H'F} = \frac{\overline{HH'}}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{3}$, 타원의 정의에 의하여 타원 C_2의 주축의 길이가 18이므로 $\overline{QF} + \overline{QF'} = 18$,

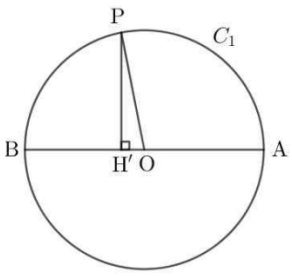
즉, $\overline{HF} + \overline{HQ} + \overline{QF'} = 18$, $\overline{QF'} = 18 - \overline{HF} - \overline{HQ} = 18 - 8 - 4 = 6$

세 점 F′, H′, F는 한 직선 위에 있고,

$\overline{QF} : \overline{HF} = \overline{QF'} : \overline{HH'} = 3 : 2$이므로 두 삼각형 FHH′, FQF′는 서로 닮음이고 닮음비가 3 : 2이다.

따라서 $\overline{FF'} = \frac{3}{2} \times \overline{H'F} = \frac{3}{2} \times 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$,

$\overline{OH'} = \overline{H'F} - \overline{OF} = \overline{H'F} - \frac{1}{2}\overline{FF'} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$



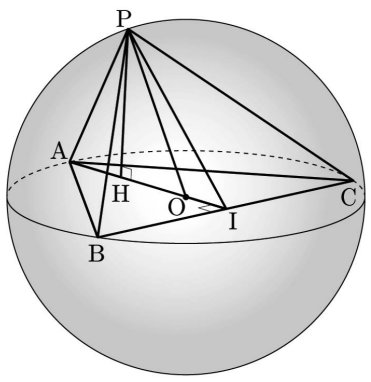
점 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 9인 원 위의 점이고, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH'} \perp \overline{AB}$이므로

$\overline{PH'} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH'}^2} = \sqrt{81-3} = \sqrt{78}$

$\overline{PO} \perp \overline{AB}$, $\overline{HH'} \perp \overline{AB}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ는 $\theta = \angle PH'H$이다.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{HH'}}{\overline{PH'}} = \dfrac{4}{\sqrt{78}} = \dfrac{2\sqrt{78}}{39}$

26.



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle PAO = \dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$이므로 삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$\overline{PA} = 4$, $\overline{PH} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AH} = \overline{OH} = 2\overline{OI} = a\,(a>0)$이라 하면 직각삼각형 OIB에서 $\overline{IB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{16-a^2}$ 직각삼각형 AIB에서 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2} = \sqrt{(a+4)^2 + 16 - a^2} = \sqrt{8a+32}$

직각삼각형 PHI에서

$\overline{PI} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a+2)^2} = \sqrt{a^2+4a+16}$

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{BC}$이다.

직각삼각형 PIB에서

$\overline{PB} = \sqrt{\overline{PI}^2 + \overline{IB}^2} = \sqrt{(a^2+4a+16) + (16-a^2)} = \sqrt{4a+32}$

삼각형 PAB에서

$\cos(\angle PAB) = \dfrac{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2 \times \overline{AP} \times \overline{AB}} = \dfrac{16 + (8a+32) - (4a+32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a+32}}$

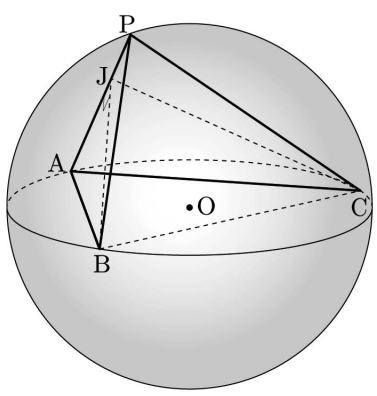
$= \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

그러므로 $\dfrac{\sqrt{10}}{8} = \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

$(a+4)^2 = 5(a+4)$

$a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\sin(\angle PAB) = \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}}$

$\sin(\angle PAB) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$이므로 $\overline{BJ} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ 삼각형 PAB의 넓이를 S'이라 하자.

$S' = \dfrac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{BJ} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{PB} = \overline{PC}$이므로 두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$\overline{BJ} \perp \overline{AP}$이므로 $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이고 $\overline{BJ} = \overline{CJ}$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\overline{BJ} \perp \overline{AP}$, $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이므로 $\theta = \angle BJC$

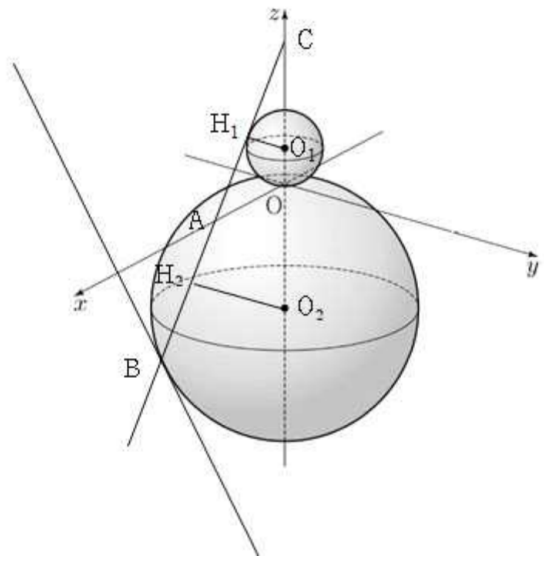
$\overline{JB} = \overline{JC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{15}$

$\cos\theta = \dfrac{\overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{JB} \times \overline{JC}} = \dfrac{2 \times \left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{9}$

$S = S' \times \cos\theta = 3\sqrt{15} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $30 \times S^2 = 30 \times \dfrac{15}{9} = 50$

27.



두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면

$O_1(0, 0, 2)$, $O_2(0, 0, -7)$

이고, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 2, 7이다.

두 점 O_1, O_2에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 O_1CH_1에서 $\overline{O_1C} = k\,(k>0)$이라 하면

$\overline{CH_1} = \sqrt{\overline{O_1C}^2 - \overline{O_1H_1}^2} = \sqrt{k^2 - 2^2} = \sqrt{k^2-4}$

원점을 O라 하면 $\triangle O_1CH_1$와 $\triangle ACO$는 서로 닮음이고,

$\overline{OC} = 2 + k$

이므로 $(k+2) : \sqrt{k^2-4} = \sqrt{5} : 2$ 에서

$k^2 - 16k - 36 = 0$

$(k-18)(k+2) = 0$

$k > 0$ 이므로 $k = 18$

$\triangle O_1CH_1$과 $\triangle O_2CH_2$도 서로 닮음이고,

$\overline{O_1C} = 18$, $\overline{O_2C} = 27$이므로 $18 : 2 = 27 : \overline{O_2H_2}$에서

$\overline{O_2H_2} = 3$

평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 원 C의 중심은 H_2이고 반지름의 길이는 $\overline{BH_2}$이다. 이때,

$\overline{BH_2} = \sqrt{\overline{O_2B}^2 - \overline{O_2H_2}^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$

이므로 원 C의 넓이는 $\pi \times (2\sqrt{10})^2 = 40\pi$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

꿈을 현실로!
희망 부산교육

$\theta = \angle BO_2H_2$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{7}$

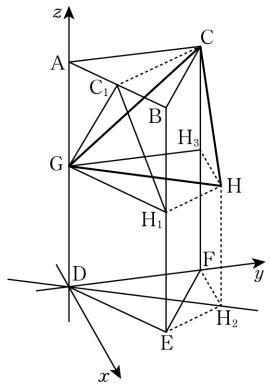
원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이는

$40\pi \times \frac{3}{7} = \frac{120}{7}\pi$

따라서 $p=7,\ q=120$이므로 $p+q=7+120=127$

28.

그림은 정삼각기둥 ABC−DEF를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H의 평면 ADEB 위로의 정사영을 각각 C_1, H_1이라 하자.

$\overline{AC_1}=2$, $\overline{AG}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{GC_1}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$, $\angle AGC_1=30°$

조건 (가)에서 삼각형 GH_1C_1은 정삼각형이므로

$\angle C_1GH_1=60°$, $\overline{GH_1}=4$

조건 (나)를 만족시키려면 점 H_1은 점 G에서 선분 BE에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.

점 H의 평면 DEF 위로의 정사영을 H_2라 하자.

조건 (나)에서 삼각형 CGH의 평면 DEF 위로의 정사영인 삼각형 FDH_2의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF의 넓이의 $\frac{1}{2}$인 $2\sqrt{3}$이므로 직선 DH_2는 선분 EF의 중점을 지난다.

그러므로 두 삼각형 DEH_2, DFH_2가 합동이고

$\angle DEH_2=90°$이므로 $\angle DFH_2=90°$이다.

점 H의 평면 ADFC 위로의 정사영을 H_3이라 하면

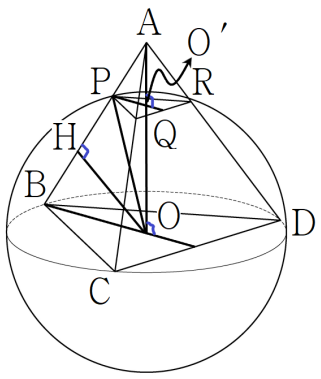
점 H_3은 점 G에서 선분 CF에 내린 수선의 발과 일치한다.

그러므로 삼각형 CGH의 평면 ADFC 위로의 정사영인 삼각형 CGH_3의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

따라서 $S^2=48$

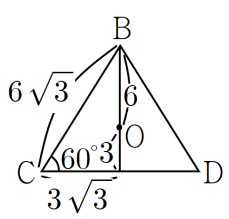
29.



삼각형 BCD의 외심을 O, 삼각형 PQR의 외심을 O′이라 할 때,

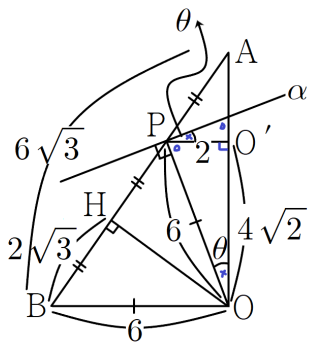
정삼각형BCD에서 외심은 무게중심과 같으므로, 반지름이 6이므로

특수각의 삼각비에 따라 아래 그림과 같이 $\overline{BC}=6$



점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 AOB를 포함한 단면을 그려보면 아래 그림과 같다.



삼각형 OAB에서 $\overline{AB}\times\overline{OH}=\overline{OA}\times\overline{OB}$,

$6\sqrt{3}\times\overline{OH}=6\times 6\sqrt{2}$, $\overline{OH}=\frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$

직각삼각형 OBH에서 $\overline{BH}^2=6^2-(2\sqrt{6})^2=12$, $\overline{BH}=2\sqrt{3}$

위의 그림처럼 $\overline{BH}=\overline{PH}$, $\overline{AP}=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

삼각형APO′와 삼각형 ABO는 1 : 3닮음이므로 $\overline{PO'}=2$

$\angle POA=\theta$라 할 때,

점P에서 접하는 평면 α는 직선 OP와 직각이고

삼각형 PQR과 접평면과 이루는 각은 위의 그림에서 선분 PO′과 이루는 각과 같고, 그 각은 $\angle POA=\theta$와 같음을 알 수 있다.

$\cos\theta$의 값은 삼각형 OPO′을 통해서 $\cos\theta=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 PQR은 삼각형 BCD와 3 : 1닮음이므로 한 변 길이는 $2\sqrt{3}$

정삼각형PQR의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$

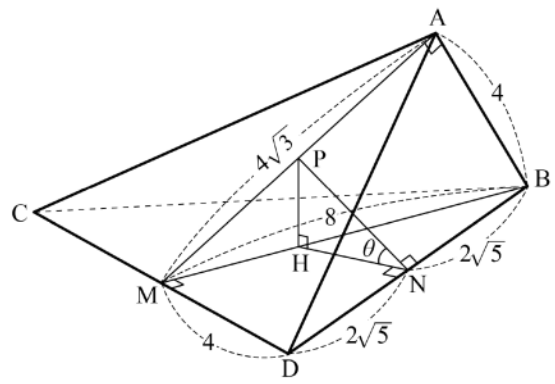
정사영의 넓이는 $3\sqrt{3}\times\cos\theta=3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{6}=k$

$\therefore\ k^2=24$

30.

$\angle BMD=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BM}=8$

$\angle BAM=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AM}=4\sqrt{3}$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PM}\perp\overline{BM}$ …… ㉠

직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$

직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로

$\overline{CD}\perp$(평면 AMB)

직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로

$\overline{PH}\perp\overline{CD}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{PH}\perp$(평면 CDB)

$\overline{PH}\perp$(평면 CDB)이고 $\overline{PN}\perp\overline{BD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HN}\perp\overline{BD}$

두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BM}$: $\overline{MD}=\overline{BN}$: $\overline{NH}$에서

$\overline{NH}=\frac{\overline{MD}\times\overline{BN}}{\overline{BM}}=\sqrt{5}$

$\angle BNH=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BH}^2=\overline{BN}^2+\overline{NH}^2=25$

$\overline{BH}=5$, $\overline{MH}=3$

$\tan(\angle AMB)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{PH}=\sqrt{3}$

꿈을 현실로! 희망 부산교육

$\overline{PN}^2=\overline{PH}^2+\overline{HN}^2=8$

$\overline{PN}=2\sqrt{2}$

두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB이고

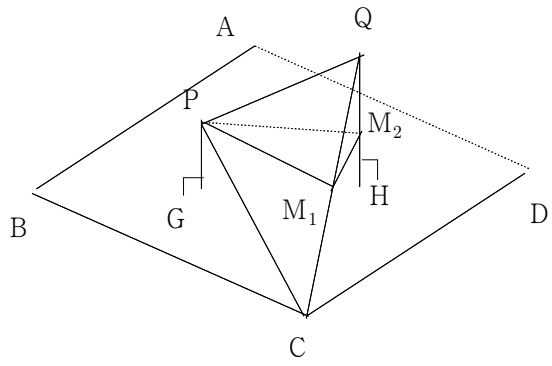
평면 PDB 위의 점 P의 평면 CDB 위로의 정사영이 H이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{HN}}{\overline{PN}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

따라서 $40\cos^2\theta=25$

31.

$\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다. 이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P′, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

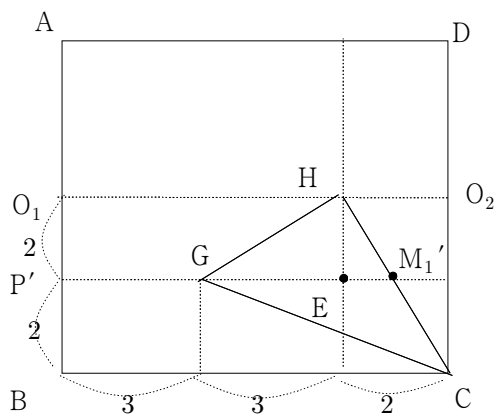
$\overline{O_1P'}=4\cos60^\circ=2$

$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{PP'}^2-\overline{PG}^2}=\sqrt{(4\sin60^\circ)^2-(\sqrt{3})^2}=3$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q′, 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$\overline{HO_2}=\sqrt{\overline{QO_2}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영 시킨 점을 M_1'이라 M_1'은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때, $\overline{GH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\overline{HM_1'}=\dfrac{1}{2}\overline{HC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

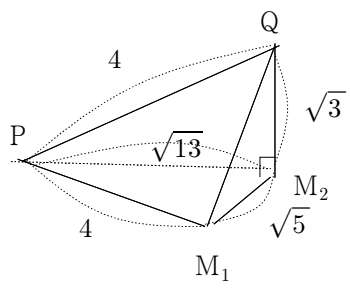
또, 선분 GM_1'과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면 $\overline{GM_1'}=\overline{GE}+\overline{EM_1'}=3+1=4$

이때, $\overline{PM_2}=\overline{GH}=\sqrt{13}$, $\overline{M_1M_2}=\overline{HM_1'}=\sqrt{5}$, $\overline{PM_1}=\overline{GM_1'}=4$

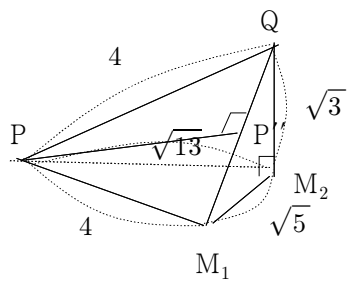
이고

$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4$, $\overline{QM_1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$

이므로 다음 그림과 같다.

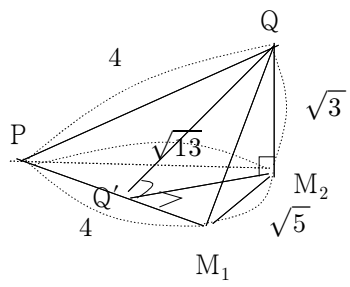


점 P에서 선분 QM_1에 내린 수선의 발을 P″이라 하자.



이때, $\angle PM_1Q=\alpha$라 하면 $\cos\alpha=\dfrac{\overline{M_1P''}}{\overline{PM_1}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{M_1Q}}{\overline{PM_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

또, 점 Q에서 선분 PM_1에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 $\overline{QQ'}\perp\overline{PM_1}$이고 $\overline{QM_2}\perp$(평면PM_1M_2)이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{M_2Q'}\perp\overline{PM_1}$



이때, $\overline{M_1Q'}=\overline{QM_1}\cos\alpha=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}=1$

이므로 $\overline{QQ'}=\sqrt{\overline{QM_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$

$\overline{M_2Q'}=\sqrt{\overline{M_2M_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서, $\cos\theta=\dfrac{\overline{Q'M_2}}{\overline{QQ'}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

이므로 $70\times\cos^2\theta=70\times\dfrac{4}{7}=40$

32. 조건 (나)에서 $\angle CED=90^\circ$이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HE}\perp\overline{BC}$이므로 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. …… ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$\angle DAE=\angle EAH+\angle HAD=90^\circ$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다. 즉 $\overline{AE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

직각삼각형 AED에서 $\overline{AE}\times\overline{AD}=\overline{AH}\times\overline{DE}$이므로

$2\sqrt{3}\times2=\overline{AH}\times4$, $\overline{AH}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AHD에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

삼각형 AHD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\angle BAE=30^\circ$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cos30^\circ=\dfrac{3}{4}$

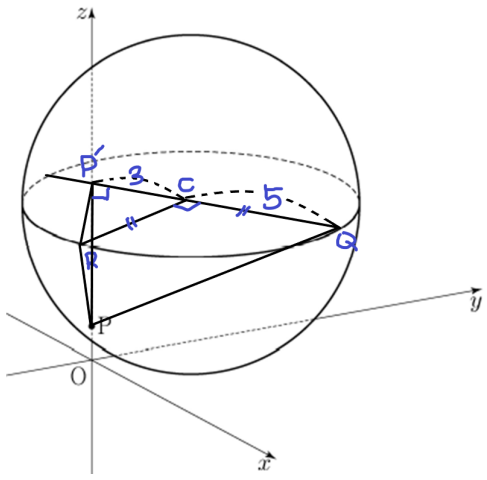
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

33. 주어진 구와 y축이 만나는 두 점의 중점을 P′이라 할 때, xy축 위로의 정사영의 넓이는 밑변 길이와 높이가 최대일 때이므로

밑변은 직선 P′C의 연장선 위에 점 Q가 존재하므로 지름의 가장

꿈을 현실로!
희망 부산교육

끝 점일 때, 밑변 길이는 최대가 되고 높이는 xy평면과 평행한 구의 단면이 되는 원 위의 점 중에서 직선 P′Q와 가장 멀리 있는 점이므로 평행한 접선의 접점이 Q일 때, 높이가 최대가 된다.
그림으로 나타내면 아래 그림과 같다.
점 R은 접점이므로 $\overline{RC} \perp \overline{P'Q}$



$\overline{P'C}$는 원점과 xy평면 위의 점$(2,\ \sqrt{5},\ 0)$사이의 거리와 같다.
$\overline{P'C} = \sqrt{4+5} = 3$
직각삼각형P′CR에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{P'R} = \sqrt{34}$
직각삼각형 P′PR에서 $\overline{PR} = \sqrt{34+16} = \sqrt{50}$
직각삼각형 PP′Q에서 $\overline{PQ} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$
직각삼각형 RQC에서 $\overline{RQ} = 5\sqrt{2}$
$\angle RPQ = \theta$라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{50+80-50}{2\times\sqrt{50}\times\sqrt{80}} = \dfrac{80}{40\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

삼각형 PRQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{50}\times\sqrt{80}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = 10\sqrt{6}$

정사영 OR′Q′의 넓이는 그림위의 삼각형 P′RQ의 넓이와 같다.

삼각형 P′RQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 8\times 5 = 20$

삼각형 PRQ를 포함하는 평면과 xy평면과 이루는 각을 α라 할 때,

$10\sqrt{6}\times\cos\alpha = 20,\ \cos\alpha = \dfrac{20}{10\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$20\times\cos\alpha = 20\times\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{40}{\sqrt{6}} = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ p+q = 23$